燎原®高数

高等院校教材同步辅导及考研复习用书

数学分析

辅导及习题精解

华东师大第四版 下册

主 编 张天德

详解教材习题 剖析重点难点

渗透考研真题 精解典型例题

浙江教育出版社
ZHEJIANG EDUCATION PUBLISHING HOUSE

数学分析
辅导及习题精解

华东师大第四版 下册

主　编　张天德
副主编　赵树欣　孙书荣

浙江教育出版社·杭州

图书在版编目(CIP)数据

数学分析辅导及习题精解 ：华东师大第四版. 下册 / 张天德主编. -- 杭州 ：浙江教育出版社，2018.8

ISBN 978-7-5536-7619-7

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①数学分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 178237 号

数学分析辅导及习题精解(华东师大第四版)下册

SHUXUEFENXI FUDAO JI XITI JINGJIE HUADONGSHIDA DISIBAN XIACE

主编　张天德

出版发行： 浙江教育出版社

（杭州市天目山路 40 号　邮编：310013）

责任编辑： 谢　园

封面设计： 星火视觉设计中心

美术编辑： 曾国兴

责任印务： 刘　建

责任校对： 栗　丽

印　　刷： 滨州传媒集团印务有限公司

开　　本： 720mm×1020mm　1/16

印　　张： 20

字　　数： 420 000

版　　次： 2018 年 8 月第 1 版

印　　次： 2018 年 8 月第 1 次印刷

标准书号： ISBN 978-7-5536-7619-7

定　　价： 32.80 元

联系电话： 0571-85170300-80928

前言

《数学分析》是数学专业最重要的一门基础课，也是报考数学类专业硕士研究生的专业考试科目。为帮助、指导广大读者学好这门课程，我们编写了这本与华东师范大学数学系主编的《数学分析》(第四版)配套的辅导用书，以帮助读者加深对基本概念的理解，加强对基本解题方法与技巧的掌握，进而提高学习能力和数学思维水平。

讲解结构四大部分

1. 本章教材全解：用网络结构图的形式揭示本章知识点之间的有机联系，以便读者从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容。用表格形式对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行系统的梳理，并指出在理解与应用基本概念、定理、公式时需注意的问题以及各类考试中经常考查的重要知识点。

2. 典型例题解析：这一部分是每节讲解中的核心内容，也是全书的核心内容。我们基于多年的教学经验和研究生入学考试试题的研究经验，将该节教材内容中读者需要掌握的、考试中的重点、难点、考点，归纳为可能出现的基本题型，然后针对每种基本题型，精选大量的例题加以详细讲解，使读者扎实掌握每一个知识点，并能在具体解题过程中熟练运用。基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题，三重互动、一举突破，从而帮助读者全面提升实际应用应试能力。例题讲解中穿插出现的“思路探索”“方法点击”，更是巧妙点拨，让读者举一反三、触类旁通。

3. 考研真题精析：针对每一个基本题型，精选最新研究生入学考试真题，并进行精心深入的解答。

4. 教材习题详解：对教材中各章节的全部习题作详细解答。在解题过程中，对部分有代表性的习题，设置“思路探索”，以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法；设置“归纳总结”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。部分习题还给出多种解题方法，以培养读者的分析能力和发散思维能力。

内容编写三大特色

1. 知识梳理清晰、简洁: 直观、形象的条目总结,精练、准确的考点提炼,实用、独到的方法归纳,将教材内容抽丝剥茧、层层展开,呈现简明扼要、层次分明的知识结构,便于读者快速复习、高效掌握,形成稳固、扎实的知识网,为提高读者的解题能力和思维水平夯实基础。

2. 能力提升迅速、持续: 本书将所有的重点、难点、考点归纳为考试中可能出现的基本题型,然后针对每种基本题型,精选考研真题,加以详细讲解,真正将知识掌握和解题能力提升做到高效结合,一举两得。

3. 联系考研密切、实用: 本书既是一本教材同步辅导书,也是一本考研复习用书:例题中有考研真题,讲解中处处渗透考研经常涉及的重点、考点等,旨在让读者同步完成考研备考,顺利通过硕士研究生入学考试。

本书博采众长,涵盖考研备考的诸多重点、难点、考点。书中如有疏漏与不妥之处,敬请广大读者提出宝贵意见,以便再版时更正、改进。

编　者

2018 年 8 月

目录

教材知识全解

教材习题详解

教材知识全解

第十二章　数 项 级 数

本章教材全解

本章知识结构图解

- 数项级数
  - 级数的收敛性
    - 定　　义
    - 性　　质
    - 柯西准则
  - 正项级数
    - 充要条件
    - 比较原则
    - 比式判别法
    - 根式判别法
    - 积分判别法
    - 拉贝判别法
  - 一般项级数
    - 交错级数收敛判别法
    - 绝对收敛级数
      - 绝对收敛
      - 条件收敛
      - 性　　质
    - 阿贝尔判别法
    - 狄利克雷判别法

重点及常考点突破

1. 数项级数的基本概念

名　称	定　义	说　明
定　　义	给定一个数列$\{u_n\}$，把它的各项依次用"+"号连接起来的表达式：$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 称为数项级数或无穷级数(简称级数)，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.	① 研究级数的首要问题，是判断级数的敛散性. 级数敛散性定义是研究级数的基础.
部 分 和	级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项之和，记为 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，称为级数的前 n 项部分和，简称部分和.	

续表

<table>
<tr><th>名　称</th><th>定　义</th><th>说　明</th></tr>
<tr><td>收敛与发散</td><td>若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$\{S_n\}$收敛于$S$,即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,则称级数收敛,并称$S$为该级数的和,记为$S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,称$R_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$为该级数的余项和.否则,称该级数发散.</td><td rowspan="3">② 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,则对任意的常数$a$与$b$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(au_n+bv_n)$也收敛,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(au_n+bv_n)=a\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n+b\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$
③ 去掉、增加或改变级数的有限项并不改变级数的敛散性.
④ 在收敛级数的各项间任意加括号,不改变级数的收敛性,也不改变它的和.</td></tr>
<tr><td>绝对收敛</td><td>若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛,则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛.</td></tr>
<tr><td>条件收敛</td><td>若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散,而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛.</td></tr>
</table>

2. 一般项级数敛散性判别法

<table>
<tr><th>名　称</th><th>定　义</th><th>说　明</th></tr>
<tr><td>柯西准则</td><td>级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充要条件是:$\forall\varepsilon>0$,$\exists$正整数$N$,当$m>N$时,$\forall$自然数$p$,都有$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon$.</td><td></td></tr>
<tr><td>级数收敛的必要条件</td><td>若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.</td><td>常用其判别级数发散.</td></tr>
<tr><td>绝对收敛性</td><td>若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$一定收敛.</td><td></td></tr>
<tr><td>阿贝尔判别法</td><td>若$\{a_n\}$为单调有界数列,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$一定收敛.</td><td rowspan="2">阿贝尔判别法实质上是狄利克雷判别法的特例.</td></tr>
<tr><td>狄利克雷判别法</td><td>若$\{a_n\}$为单调递减且趋于零,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$的部分和有界,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$一定收敛.</td></tr>
</table>

3. 正项级数敛散性判别法

名　称	内　容
充要条件	正项级数收敛的充要条件是它的部分和数列有界.
比较判别法	设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$是两个正项级数,且$u_n\leqslant v_n$.若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

续表

名　称	内　容
比式判别法	若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$，则当$q<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；当$q>1$或$q=+\infty$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.
根式判别法	若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$，则当$l<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；当$l>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.
积分判别法	设$f(x)$为$[1,+\infty)$上非负递减函数，则正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$与无穷积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$同时收敛或同时发散.
拉贝判别法	设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，且$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=r$，则当$r>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；当$r<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

4. 交错级数的莱布尼茨判别法

名　称	内　容
莱布尼茨判别法	设$u_n>0$，且$\{u_n\}$单调递减趋于零，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$收敛.

5. 重点、难点与考点

重　点	正项级数敛散性判别
难　点	任意项级数敛散性判别
难　点	综合运用级数的概念、性质和有关判别方法，判断级数的敛散性

典型例题解析

基本题型 Ⅰ：用定义判断级数敛散性并求和

【例 1】　设$x_0=0,x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n\geqslant 1),\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x_n+x_{n-1})$的和.

【思路探索】　按常规思路求S_n，会涉及通项$u_n=a_n(x_n+x_{n-1})$拆项，由条件$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，明显可得$a_n=x_n-x_{n-1}$.

解：因为$x_0=0,x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n\geqslant 1)$，所以$a_n=x_n-x_{n-1}$.

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x_n+x_{n-1})$的部分和

$$
\begin{aligned}
S_n &= a_1(x_1+x_0)+a_2(x_2+x_1)+\cdots+a_n(x_n+x_{n-1}) \\
&= (x_1-x_0)(x_1+x_0)+(x_2-x_1)(x_2+x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})(x_n+x_{n-1}) \\
&= x_1^2-x_0^2+x_2^2-x_1^2+\cdots+x_n^2-x_{n-1}^2 \\
&= x_n^2-x_0^2,
\end{aligned}
$$

注意到$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=b^2-x_0^2=b^2$.

方法点击: 凡是要求级数和的问题,都可采用定义的方法,只需说明部分和数列 S_n 有极限,并求出即可.一般采用"拆项法",求出 S_n 的极限.定义法常用于求级数的和.

【例 2】 设 $0<a<1$,求$\lim\limits_{n\to\infty}(a+2a^2+3a^3+\cdots+na^n)$.

【思路探索】 若按常规思路求 S_n,会涉及通项 $u_n=na^n$ 拆项问题.直接拆项不容易找到解题思路.考虑到奇数项与偶数项特点,不妨先令 $S_n=a+2a^2+\cdots+na^n$,而 $aS_n=a^2+2a^3+\cdots+na^{n+1}$,两式相减可得$(1-a)S_n=a+a^2+\cdots+a^n-na^{n+1}$,于是 $S_n=\dfrac{a(1-a^n)}{(1-a)^2}-\dfrac{na^{n+1}}{1-a}$.这样就可以求极限了.

解:令 $S_n=a+2a^2+\cdots+na^n$,则 $aS_n=a^2+2a^3+\cdots+na^{n+1}$,$(1-a)S_n=\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}-na^{n+1}$.

由于 $0<a<1$,$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}na^{n+1}=0$,因此$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{(1-a)^2}$.

基本题型 Ⅱ:用级数的性质判断级数的敛散性

【例 3】 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{3n+1}\right)$的敛散性.

【思路探索】 通项 $u_n=\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{3n+1}>\dfrac{1}{2n}$,而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.通过正项级数的比较判别法可以得出该级数发散.

解:因为 $\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{3n+1}>\dfrac{1}{2n}$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.由正项级数比较判别法得,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{3n+1}\right)$发散.

基本题型 Ⅲ:用柯西准则判断级数敛散性

【例 4】 设$\{na_n\}$收敛,级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$收敛,证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

证明:因为$\{na_n\}$收敛,所以对任意的 ε,存在 N,当 m、$n>N$,不妨设 $m>n$,有$|ma_m-na_n|<\varepsilon$.

又因为$\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$收敛,对上述的 ε,有

$$
\begin{aligned}
|S_m-S_n| &= |(n+1)a_{n+1}-(n+1)a_n+(n+2)a_{n+2}-(n+2)a_{n+1}+\cdots+ma_m-ma_{m-1}| \\
&= |-na_n-(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{m-1})+ma_m| \\
&\geqslant -|ma_m-na_n|+|a_n+\cdots+a_{m-1}|,
\end{aligned}
$$

所以

$$|a_n+\cdots+a_{m-1}|\leqslant|S_n-S_m|+|ma_m-na_n|<2\varepsilon,$$

从而由柯西收敛准则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

基本题型 Ⅳ:正项级数比较判别法

【例 5】 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数,证明:

(1) 若存在正数 α 及正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,有 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant 1+\alpha$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 若存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,有 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leqslant 1$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证明:(1) 当 $n\geqslant N$ 时,由 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant 1+\alpha$ 知,$0<a_n\leqslant\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}$. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}$ 收敛,故由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 当 $n\geqslant N$ 时,由 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leqslant 1$ 知,$a_n\geqslant\dfrac{1}{n}$. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,故由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

方法点击:使用正项级数判别法,关键在于找到比较的对象级数.

【例 6】 讨论正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n+2)}{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n}(a>0)$ 的敛散性.

解:由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{\ln(n+2)}{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{\ln(n+2)}}{a+\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{a}$,所以当 $a>1$ 时收敛,当 $0<a<1$ 时发散;当 $a=1$ 时,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+2)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=+\infty$,故发散.

【例 7】 证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}\right]$收敛.

证明:因为 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$,所以原级数为正项级数,且

$$\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}<\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})},$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{2},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}\right]$收敛.

基本题型 Ⅴ:利用级数的性质证明数列极限

【例 8】 试证数列 $x_n=\dfrac{11\cdot 12\cdot 13\cdot\cdots\cdot(n+10)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}(n=1,2,3,\cdots)$ 有极限,并求此极限.

证明:当 $n\geqslant 6$ 时,可证 $\dfrac{n+10}{3n-1}<1$,故 $\{x_n\}$ 当 $n\geqslant 6$ 时为单调减小,且有下界 0,故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,再考虑正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$,因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+11}{3n+2}=\frac{1}{3}<1,$$

由此可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛,故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

基本题型 Ⅵ:判别级数条件收敛或绝对收敛

【例 9】 证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{n}-1)$ 条件收敛.

【思路探索】 验证级数条件收敛的条件.

证明:因为 $\sqrt[n]{n}-1>0$,故该级数为交错级数.

令 $y=x^{\frac{1}{x}}$,$y'=\dfrac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1-\ln x)$,故当 $x>\mathrm{e}$ 时,y 单调递减,所以当 $n>3$ 时,$\{\sqrt[n]{n}-1\}$ 单调递减,

且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0$,由莱布尼茨判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{n}-1)$ 收敛. 但是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x)}{-\frac{1}{x^2}}=+\infty,$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$ 发散,所以该级数条件收敛.

【例 10】 证明:若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 亦必绝对收敛.

【思路探索】 验证级数绝对收敛的条件.

证明:记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$,因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,所以存在 $M>0$ 使得

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|<M,n>0,$$

从而

$$|a_n(a_1+a_2+\cdots+a_n)|\leqslant M|a_n|,n>0,$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,故由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 亦必绝对收敛.

考研真题精析

1. (华东师范大学) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

证明：记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 的前 n 项和为 S_n. 则

$$\begin{aligned}S_n&=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+\cdots+n(a_n-a_{n+1})\\&=a_1+a_2+\cdots+a_n-na_{n+1}\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k-na_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-(n+1)a_{n+1}.\end{aligned}$$

对上式两边取极限，从而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n+1}a_k-(n+1)a_{n+1}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

2. (云南大学) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}}$ 仍收敛，其中 $r_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k$.

【思路探索】　考虑前 n 项部分和，并注意分母有理化.

证明：令 $b_n=\dfrac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}}$，则 $b_n=\dfrac{a_n(\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n})}{r_{n-1}-r_n}=\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n}$.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k})=\sqrt{r_0}-\sqrt{r_n},$$

对上式两边取极限得 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{r_0}-\sqrt{r_n})=\sqrt{r_0}$.

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}}$ 收敛到 $\sqrt{r_0}$.

3. (西安电子科技大学) 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内的可微函数，且满足：

(1) $f(x)>0$；　(2) $|f'(x)|\leqslant m|f(x)|$，其中 $0<m<1$.

任取 a_0，定义 $a_n=\ln f(a_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛.

【思路探索】　考虑比值判别法.

证明：$$\begin{aligned}|a_{n+1}-a_n|&=|\ln f(a_n)-\ln f(a_{n-1})|=\left|\frac{f'(\xi_n)}{f(\xi_n)}(a_n-a_{n-1})\right|\\&\leqslant m|a_n-a_{n-1}|.\end{aligned}$$

即 $\left|\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}\right|\leqslant m<1$，由比值判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛. 这里 $\xi_n\in(\min\{a_n,a_{n-1}\}$，$\max\{a_n,a_{n-1}\})$.

4. **(西北师范大学)** 对函数 $f(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\quad(s>1)$，证明：$f(s)=s\int_1^{+\infty}\frac{[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x$，其中 $[x]$ 为 x 的整数部分.

【思路探索】 积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x$.

证明：
$$s\int_1^{+\infty}\frac{[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{ns}{x^{s+1}}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(-x^{-s}\Big|_n^{n+1}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^s}-\frac{n}{(n+1)^s}\right)$$
$$=1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^s}-\frac{n+1}{(n+1)^s}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

所以 $f(s)=s\int_1^{+\infty}\frac{[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x$.

5. **(上海交通大学)** 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^{2n\sin\frac{1}{n}}\cdot a_n)=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛?试证之.

解：已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^{-2n\sin\frac{1}{n}}}=1$，又 $0\leqslant n^{-2n\sin\frac{1}{n}}=\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}<\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{3}{4}}$（当 n 充分大时），而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{3}{4}}$ 收敛，

由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-2n\sin\frac{1}{n}}$ 收敛，再由比较判别法的极限形式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

6. **(中国科学院)** 若数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足以下条件：

(a) $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；

(b) 存在正数 M，对任意的正整数 n，均有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\right|\leqslant M$.

证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

证明：记 $B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$，由 Abel 变换有
$$\left|\sum_{i=m+1}^{n}a_ib_i\right|=\left|\sum_{i=m+1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})B_i+a_nB_{n-1}-a_{m+1}B_m\right|$$
$$\leqslant M\sum_{i=m+1}^{n-1}|a_i-a_{i+1}|+M(|a_n|+|a_{m+1}|)$$
$$=M\left|\sum_{i=m+1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})\right|+M(|a_n|+|a_{m+1}|)$$
$$=M|a_{m+1}-a_n|+M(|a_n|+|a_{m+1}|)$$
$$\leqslant 2M(|a_n|+|a_{m+1}|)\leqslant 4M|a_{m+1}|\to 0.$$

由 Cauchy 收敛准则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

第十三章　函数列与函数项级数

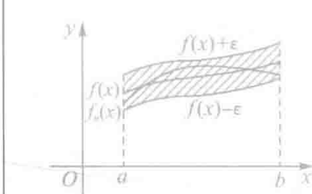
本章教材全解

本章知识结构图解

- 函数列与函数项级数
  - 函数列
    - 函数列有关概念
      - 函数列定义
      - 收 敛 域
      - 极限函数
    - 函数列一致收敛
      - 一致收敛定义
      - 一致收敛判别法
        - 柯西准则
        - 最值判别法
    - 一致收敛函数列性质
      - 连 续 性
      - 可 积 性
      - 可 导 性
  - 函数项级数
    - 函数项级数有关概念
      - 函数项级数定义
      - 部分和函数列
      - 收 敛 域
      - 和 函 数
    - 函数项级数一致收敛
      - 一致收敛定义
      - 一致收敛判别法
        - 优级数判别法
        - 阿贝尔判别法
        - 狄利克雷判别法
    - 一致收敛函数项级数性质
      - 连 续 性
      - 逐项可积性
      - 逐项可导性

重点及常考点突破

1. 函数列与一致收敛性

<table>
<tr><th>名　称</th><th>定　义</th><th>说　明</th></tr>
<tr><td>函数列</td><td>设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots$ 是一列定义在同一数集 E 上的函数,称为定义在 E 上的函数列,记作 $\{f_n\}$ 或 $f_n(n=1,2,\cdots)$.</td><td rowspan="3">研究函数列首要的问题是确定收敛域和极限函数. 主要问题是研究极限函数的性质. 一致收敛性起到重要作用.</td></tr>
<tr><td>收敛域</td><td>设 $x_0\in E$, 以 x_0 代入函数列 $\{f_n\}$, 得到数列 $\{f_n(x_0)\}$. 若此数列收敛,则称函数列在点 x_0 收敛,称 x_0 为函数列的收敛点;若此数列发散,则称函数列在 x_0 发散. 使函数列 $\{f_n\}$ 收敛的全体收敛点的集合称为收敛域.</td></tr>
<tr><td>极限函数</td><td>若函数列 $\{f_n\}$ 在数集 $D\subset E$ 上每一点都收敛,则称
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x),x\in D$$
为函数列 $\{f_n\}$ 的极限函数.</td></tr>
<tr><td>一致收敛</td><td>设函数列 $\{f_n\}$ 与函数 f 定义在同一数集 D 上,若对任给的正数 ε,总存在某正整数 N,使得当 $n>N$ 时,对一切 $x\in D$,有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,则称函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f,记作 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)\ (n\to\infty),x\in D$.</td><td>一致收敛性与所在的收敛域有关.</td></tr>
<tr><td>一致收敛的几何意义</td><td>函数列 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f 的几何意义:对任给的正数 ε,存在正整数 N,对一切序号大于 N 的曲线 $y=f_n(x)$ 都落在以曲线 $y=f(x)+\varepsilon$ 与 $y=f(x)-\varepsilon$ 为上、下边界的带形区域内.</td><td></td></tr>
</table>

2. 函数列一致收敛的判别准则

名　称	内　容
柯西准则	函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛的充要条件是:对任给的正数 $\varepsilon>0$,总存在正整数 N,当 $m,n>N$ 时,对一切 $x\in D$,都有 $\lvert f_n(x)-f_m(x)\rvert<\varepsilon$.
最值判别法	函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}\lvert f_n(x)-f(x)\rvert=0$.