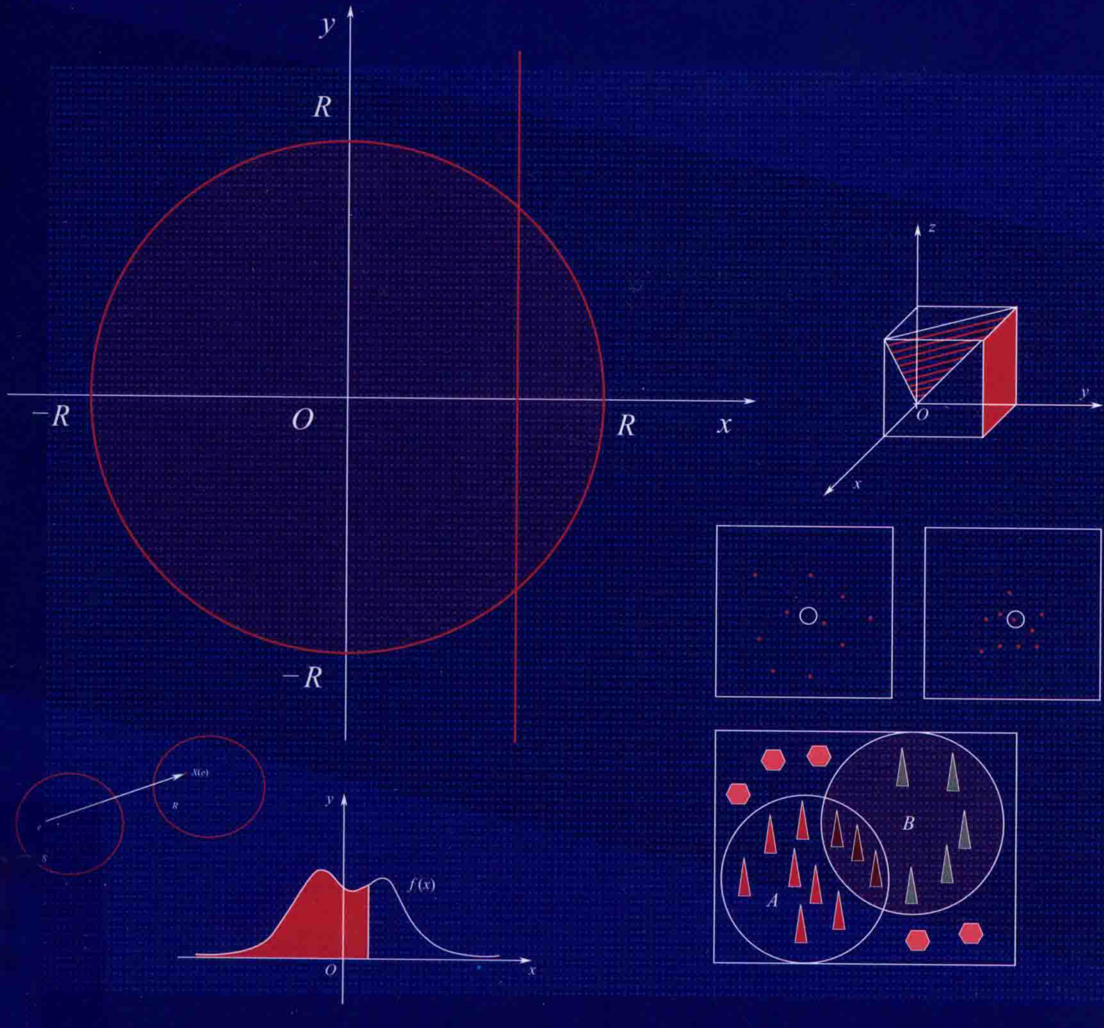
高等学校规划教材

概率论与数理统计

潘斌　张明昕　赵晓颖　主编



化学工业出版社

高等学校规划教材

概率论与数理统计

潘斌　张明昕　赵晓颖　主编

化学工业出版社

·北京·

本书共分十章，前五章介绍了随机事件与概率、随机变量及其分布、多元随机变量及其分布、随机变量的数字特征以及大数定律与中心极限定理的内容；第六章至第九章介绍了数理统计学的相关内容，主要包括数理统计的基本概念与抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析等内容；最后一章介绍了SPSS软件的应用。为便于学习，书后附有习题参考答案以及常用分布表。

本书内容叙述简明扼要，层次清晰，例题和习题覆盖面广，既可作为本科公共数学“概率论和数理统计”课程的教材，也可作为考研复习的指导书，还可以作为相关专业人员和广大教师的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/潘斌，张明昕，赵晓颖主编. —北京：化学工业出版社，2019.9
高等学校规划教材
ISBN 978-7-122-34749-7

Ⅰ.①概… Ⅱ.①潘…②张…③赵… Ⅲ.①-概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第124561号

责任编辑：郝英华 唐旭华　　装帧设计：史利平
责任校对：王素芹

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号 邮政编码100011）
印　　装：大厂聚鑫印刷有限责任公司
710mm×1000mm 1/16 印张12¾ 字数256千字 2019年9月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888　　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：32.00元

前 言

随着科学技术的发展，概率论与数理统计得到越来越广泛的应用，已成为高等学校大部分专业必修的一门基础课程，通过本课程的学习，使学生掌握研究随机现象的基本思想和方法，并且具备一定的分析问题和解决问题的应用和创新能力。

本书是根据教育部高等学校工科数学教学指导委员会制订的《高等学校概率论与数理统计课程教学基本要求》，并考虑到近几年理工科院校教学改革要求和考研需求而编写的，可满足理工科和经管类各专业培养应用型人才的概率论与数理统计课程的教学需要。本书内容以介绍概率论和数理统计的基本知识和方法为主，同时注意其直观背景和实际意义的阐述，力求做到理论与实际相结合，理论与应用相结合。

为了丰富工科数学的教学内容，使学生对近代统计学的发展成果有所了解，提高学生的创新能力和计算机的实际应用能力，本书纳入了方差分析的基本内容，同时增加了 SPSS 软件的应用部分，为读者运用这些统计方法提供一个入门引导，有条件的学校可以选讲。

本书内容分十章，每章配有必要的例题和习题，书末附有习题参考答案。第一章至第五章是概率论的基础知识，第六章至第九章是数理统计的基本内容，第十章是 SPSS 软件应用。

本书由潘斌、张明昕、赵晓颖主编，李阳、祝丹梅、魏晓丽、姜凤利、于晶贤、范传强、牛宏、陈丽、盛浩参与编写。

本书的出版，得到化学工业出版社和同行的帮助与支持，在此深表感谢。限于水平，书中难免存在不足之处，恳请广大读者批评指正。

编者

2019 年 6 月

目 录

第一章 随机事件与概率

16 世纪，意大利数学家卡尔达诺的数学著作《游戏机遇学说》中给了赌徒很多建议，例如：《谁，在什么时候，应该赌博?》《为什么亚里士多德谴责赌博?》《那些教别人赌博的人是否也擅长赌博呢?》，体现了人类对赌博随机性的直觉认识，以及作者这种“赌博中赢家只能是庄家而赌徒只能是输家”悲天悯人的情怀.

物理里面很多事情都是随机的，比如，一些原子由于自身原子核不稳定，会衰变成别的原子，原子衰变在单位时间内有固定的概率的，即所谓的“半衰期”；中微子有 3 种形态，即电中微子、μ 中微子和 τ 中微子，这三种中微子有同样概率转化为另外两种中微子，保证了宇宙中三种中微子数量总是大致相等的.

第一节 随机事件及其运算

一、随机事件

1. 随机现象

概率论与数理统计研究的一类自然现象或社会现象有这样的特点：就个别的试验或者观察而言，时而出现这样的结果，时而出现那样的结果，呈现一种偶然性．例子可以举出很多，例如同一仪器测量同一物体的体积，所得的结果总是略有差异，这是由于测量仪器受重力、大气、温度等周围环境影响等偶然因素造成的．在基本条件不变情况下，一系列试验或观察会得到不同结果．这种现象在概率论与数理统计这门课里面称之为随机现象．

2. 随机试验

定义 1.1 满足以下 3 条的，称为随机试验：

(1) 在相同的条件下，此试验可独立重复进行；

(2) 每次试验只有一个结果（即试验不能没有结果，也不能出现两个或两个以上的结果）；

(3) 该试验的全部结果已知，但下一次试验出现哪个结果不确定.

随机试验是概率论的一个基本概念，随机试验通常用 E 表示.

【例 1.1】 随机试验的例子：

（1）E_1：抛一枚一元硬币，有可能国徽面朝上，也有可能国徽面朝下；

（2）E_2：掷一颗骰子，可能出现的不同点数；

（3）E_3：某地某天某时刻不同的温度.

二、样本空间

一个随机试验所有可能结果的集合称为基本事件空间（或称为样本空间）；而随机试验中每一可能出现的结果为一个基本事件（或称为样本点）. 为建立概率这一数学模型，现在我们就引进“有确切定义”的符号：

ω——表示基本事件（或样本点）；

S——表示基本事件空间（或样本空间）. 显然，每一随机试验都唯一对应一个样本空间 S.

【例 1.2】 写出下列随机现象的样本空间：

（1）抛一枚硬币的样本空间为：$S_1=\{\omega_1, \omega_2\}$，其中 ω_1 表示国徽面朝上，ω_2 表示国徽面朝下；

（2）掷一颗骰子的样本空间为：$S_2=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$，其中 ω_i 表示出现 i 点，$i=1, 2, \cdots, 6$，也可更直接明了地记此样本空间为：$S_2=\{1, 2, \cdots, 6\}$；

（3）一天内进入某商场的顾客数的样本空间为：$S_3=\{0, 1, 2, \cdots, 10, \cdots, 100, \cdots, 10000, \cdots\}$.

注意： 样本点为有限个或者可列个的空间为离散样本空间；样本点为无限个或不可列个的空间为连续样本空间.

三、随机事件

在一个特定的随机试验中，某些基本事件组成的集合称为随机事件（简称事件）. 随机事件是基本事件空间的子集. 随机事件可能发生也可能不发生.

不包含任何基本事件的事件，称为不可能事件，可以用 $\varnothing$ 表示.

包含所有基本事件，在试验中此事件一定发生，称为必然事件. 必然事件实质就是基本事件空间本身，可以用 S 表示.

随机事件是基本事件空间的子集，因此不可能事件、必然事件也是随机事件.

事件可用大写英文字母，如 A，B，C，…表示. 如在掷一颗骰子中，$A=$“出现奇数点”是一个事件，即 $A=\{1, 3, 5\}$.

【例 1.3】 在连续掷两次骰子的随机试验中，试指出下列事件是什么类型的事件.

事件 $A_1=$“掷两次骰子的点数之和小于 20”.

事件 $A_2=$“掷两次骰子的点数之和等于 1”.

事件 $A_3=$“掷两次骰子的点数之和等于 3”.

分析：用 X，Y 分别表示第一次和第二次出现的点数，X 和 Y 可以取值 1，2，3，4，5，6，每一点（X，Y）表示一个基本事件，因而基本事件空间包含 36 个基本事件．基本事件空间含有的子集数量是 2^{36} 个，对应 2^{36} 个不同事件．

事件 A_1＝“掷两次骰子的点数之和小于 20”，掷两次骰子的点数之和总是小于 13 的，因此 A_1 是必然事件．

事件 A_2＝“掷两次骰子的点数之和等于 1”，掷两次骰子的点数之和总是大于 1 的，因此 A_2 是不可能事件．

事件 A_3＝“掷两次骰子的点数之和等于 3”，$A_3=\{\{1,2\}\{2,1\}\}$，因此 A_3 可能发生也可能不发生，A_3 是随机事件．

四、随机事件间的关系与运算

1. 随机事件间的关系

两个随机事件之间可以有各种各样的关系．下面的讨论总是假设在同一个样本空间 S 中进行，事件间的关系与集合间关系一样有以下几种．

（1）包含关系．如果事件 A 的样本点都属于 B，则称 B 包含 A，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，用概率论的语言描述：事件 A 发生必然导致事件 B 发生．

又如设电视机的寿命为 T，则 $A=\{T\mid 0<T<1000\}$ 和 $B=\{T\mid 0<T<2000\}$，它们的关系为 $A\subset B$．

对任一事件 A，必有 $\varnothing\subset A\subset S$．

（2）相等关系．如果事件 A 与事件 B 满足：$A\subset B$ 且 $A\supset B$，则 $A=B$．

从集合论观点看，两个事件相等就意味着这两事件是同一个集合，但有时不同语言描述的事件也可能是同一事件．

例如掷一颗骰子，$A=$“出现偶数点”$=\{2, 4, 6\}$．

（3）互不相容关系（互斥）．如果 A 与 B 没有相同的样本点，则称 A 与 B 互不相容．用概率论的语言描述：A 与 B 互不相容就是事件 A 与事件 B 不可能同时发生．

（4）事件 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$．其含义为“由事件 A 与 B 中所有的样本点（相同的只计入一次）组成的新事件”，或用概率论的语言描述：“事件 A 发生或事件 B 或它们二者都发生”，也即表示“事件 A 与 B 中至少有一个发生”．

如在掷一颗骰子的试验中，记事件 $A=$“出现奇数点”$=\{1, 3, 5\}$，记事件 $B=$“出现的点数不超过 3”$=\{1, 2, 3\}$，则 A 与 B 的并为 $A\cup B=\{1, 2, 3, 5\}$．

（5）事件 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$，或简记为 AB．其含义为“由事件 A 与 B 中所有相同的样本点组成的事件”，或用概率论的语言描述：“事件 A 发生且事件

B 发生”或“事件 A 与 B 同时发生”.

事件的并与交运算可以推广到有限个或可列个事件，譬如有事件 A_1，A_2，…，A_n，…，则称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为有限并，$\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ 为可列并，$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为有限交，$\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ 为可列交.

(6) 事件 A 对 B 的差，记为 $A-B$. 其含义为“由事件 A 中且不属于 B 中的样本点组成的新事件”，即 $A-B=A\overline{B}=A-AB$. 或用概率论的语言描述：“事件 A 发生而 B 不发生”.

如在掷一颗骰子的试验中，记事件 $A=$ “出现奇数点” $=\{1, 3, 5\}$，记事件 $B=$ “出现的点数不超过 3” $=\{1, 2, 3\}$，则 A 对 B 的差为 $A-B=\{5\}$.

(7) 对立事件. A 与 B 互为对立事件满足两个条件：①A 与 B 互不相容，即 $A\cap B=\varnothing$，②A 与 B 的并为整个样本空间，即 $A\cup B=S$. 显然，对立事件一定是互不相容事件，但反之未必成立.

事件 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$，即“由 S 中而不属于 A 中的样本点组成的新事件”，或用概率论的语言说：“A 不发生”，即 $\overline{A}=S-A$，注意，对立事件是相互的，即 A 的对立事件是 $\overline{A}$，而 $\overline{A}$ 的对立事件是 A. 即 $\overline{A}\cup A=S$，为必然事件 S，而 $\overline{A}\cap A$ 为不可能事件 $\varnothing$.

故 A 与 B 互为对立事件的充要条件为 $A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B=S$.

【例 1.4】 设 A、B、C 是某个随机现象的三个事件，则

(1) 事件“A 与 B 发生，C 不发生”可表示为：$AB\overline{C}$.

(2) 事件“A、B、C 中至少有一个发生”可表示为：$A\cup B\cup C$.

(3) 事件“A、B、C 中至少有两个发生”可表示为：$AB\cup BC\cup AC$.

(4) 事件“A、B、C 中恰好有两个发生”可表示为：$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup \overline{A}BC$.

(5) 事件“A、B、C 同时发生”可表示为：ABC.

(6) 事件“A、B、C 都不发生”可表示为：$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$.

(7) 事件“A、B、C 不全发生”可表示为：$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

2. 随机事件间的运算性质

(1) 交换律： $A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$ (1.1)

(2) 结合律： $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (1.2)

$(AB)C=A(BC)$ (1.3)

(3) 分配律： $(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$ (1.4)

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ (1.5)

(4) 对偶律（德莫根公式）

事件并的对立等于对立的交：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ (1.6)

事件交的对立等于对立的并：$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ (1.7)

第二节 概率的定义及其性质

1933 年俄国数学家 Kolmogorov 提出了概率的公理化定义，Kolmogorov 给出的这个定义既概括了历史上几种概率定义中的共同特性，又避免了各自的局限性和含混之处．从那以后，只有满足概率定义中的 3 条公理的数学量，才说它是概率，是概率论发展史上的一项奠基成就．有了这个公理化定义后，概率论中各种分支理论迅速发展起来了．

一、频率

假设我们通过在同样条件下，重复进行 n 次同样的随机试验，n_A 表示事件 A 发生的频数．

则事件 A 发生的频率为 $$f_n(A)=\frac{n_A}{n} \tag{1.8}$$

可以证明，随机事件发生的频率具有稳定性，即随着试验重复次数 n 的大量增加，频率 $f_n(A)$ 就会逐渐稳定于某一常数——即事件 A（发生）的概率．

由频率的定义很容易证明下列基本性质．

(1) $$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1 \tag{1.9}$$

(2) $$f_n(\varnothing)=0 \quad f_n(S)=1 \tag{1.10}$$

(3) 若 A 与 B 互不相容，则 $$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B) \tag{1.11}$$

二、概率的定义

假设我们想通过在同样条件下，重复进行 n 次同样的随机试验，考察随机事件 A 发生的概率 $P(A)$，随着 n 增大，我们得到关于随机试验次数 n 的一个频率数列 $\{f_n(A)\}$，对这个数列取极限，则我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(A)=P(A)$．由于取极限的保号性，前面关于频率 $f_n(A)$ 的特征得到的结论也可以推广到概率 $P(A)$上，对应得：

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\varnothing)=0$，$P(\Omega)=1$；

(3) 当可列个随机事件 A_1，A_2，…，A_m，…互不相容时，有 $P(\bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k)=\sum\limits_{k=1}^{m} P(A_k)$及至 $P(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(A_k)$． (1.12)

由此，我们引出概率的公理化定义如下．

定义 1.2 设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，对于 E 的每一个事件 A，定义一

个实值函数 $P(A)$，它满足：

(1) 非负性公理： $P(A)\geqslant 0$ (1.13)

(2) 正则性公理： $P(S)=1$ (1.14)

(3) 可列可加性公理：当可列个随机事件 A_1，A_2，…，A_m，…互不相容时，有 $P(\bigcup_{k=1}^{m}A_k)=\sum_{k=1}^{m}P(A_k)$ 及至 $P(\bigcup_{k=1}^{+\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(A_k)$，则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率． (1.15)

在这一节中，我们给出了概率的公理化定义及其确定方法，这是概率论中最基本的一个问题，简单而直观的说法就是：概率是随机事件发生的可能性大小．

三、概率的性质

由概率的定义可以推得概率的一些重要性质，此处省略部分简单的理论证明，有兴趣的读者可参考其他材料．

性质 1： $0\leqslant P(A)\leqslant 1,\quad P(\varnothing)=0$ (1.16)

性质 2：对于同一试验条件下产生的任意事件 A，B，有

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)$$

特别地，当 $A\subset B$ 时，$P(B-A)=P(B)-P(A)$，且

$$P(A)\leqslant P(B) \tag{1.17}$$

性质 3： $P(\overline{A})=1-P(A)$ (1.18)

性质 4：对于同一试验条件下产生的任意事件 A，B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.19}$$

证明　易知 $A\cup B=A\cup(B-AB)$ 且 $A(B-AB)=\varnothing$，$AB\subset B$．可得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

特别地，当 A 与 B 互不相容时，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

由性质 4 可推广得到以下推论．

推论 1：对于同一试验条件下产生的事件 A，B，C 有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \tag{1.20}$$

推论 2：同一试验条件下产生的事件 A_1，A_2，…，A_n，且 A_1，A_2，…，A_n 互不相容（任意 i，j，$1\leqslant i<j\leqslant n$，$A_iA_j=\varnothing$），有 $P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$，其中 n 为正整数 (1.21)

推论 3：$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$ （布尔不等式） (1.22)

推论 4：$P(A\cap B)\geqslant P(A)+P(B)-1$ （Bonferroni 不等式） (1.23)

【例 1.5】 已经知 12 件产品中有 2 件次品，从中任意抽取 4 件产品，求至少取得 1 件次品（记为 A）的概率．

解： 设 B 表示"未抽到次品"，则 $B=\overline{A}$，可得

$$P(B)=\frac{C_{10}^4}{C_{12}^4}=\frac{14}{33}, \quad 则\ P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(B)=\frac{19}{33}$$

【例 1.6】 设 A，B 为同一试验条件下产生的两个随机事件，$P(A)=0.5$，$P(A\cup B)=0.8$，$P(AB)=0.3$，求 $P(B)$.

解： 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，得

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(AB)=0.8-0.5+0.3=0.6$$

【例 1.7】 设 A，B 为同一试验条件下产生的两个随机事件，$P(A)=0.8$，$P(AB)=0.5$，求 $P(A\overline{B})$.

解：
$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.8-0.5=0.3$$

【例 1.8】 设 A 与 B 为同一试验条件下产生的两个事件，且互不相容，$P(A)=0.5$，$P(B)=0.3$，求 $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

解：

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\cap\overline{B})&=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)]\\&=1-(0.5+0.3)=0.2\end{aligned}$$

第三节 等可能概型

古典概型是概率论中概率论历史上最先开始研究的模型，最直观和最简单，不需要做大量重复试验，而是在经验事实的基础上，对被考察事件发生的可能性进行逻辑分析后得出该事件的概率．古典概型也叫传统概率、等可能概型.

判断一个概率模型是否是古典概型，只需要判断两点：

- 试验中所有可能出现的基本事件只有有限个；
- 试验中每个基本事件出现的可能性相等.

具有以上两个特点的概率模型是大量存在的.

古典方法的基本思想如下：

(1) 所涉及的随机现象只有有限个样本点，譬如为几个；

(2) 每个样本点发生的可能性相等（称为等可能性），例如掷一枚均匀的骰子出现点 1 到点 6 的可能性相等；从一副扑克牌中任取一张，每张牌被取到的可能性相等；

(3) 若事件 A 含有 k 个样本点，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 含有样本点个数}}{S \text{ 含有样本点个数}}=\frac{k}{n} \tag{1.24}$$

容易验证，由上式确定的概率满足公理化定义，它的非负性与正则性是显然的；而满足可加性的理由与频率方法类似：当 A 与 B 互不相容时，计算 $A\cup B$ 的

样本点个数可以分别计算 A 的样本点个数和 B 的样本点个数，然后再相加，从而有可加性

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B) \tag{1.25}$$

在古典方法中，求事件 A 的概率主要是计算 A 中含有的样本点的个数和 S 中含有的样本点的个数，所以在计算中经常用到排列组合工具.

思考： 向一个圆面内随机地投一个点，如果该点落在圆内任意一点都是等可能的，你认为这是古典概型吗？为什么？

解： 这不是古典概型．古典概型除了要求所有样本点等可能外，还要求样本空间含有的样本数有限．一个圆里面的点，有实数在任一开区间上的稠密性易知，点（样本数）是无穷多的.

【例 1.9】（不放回抽样问题） 某空调公司生产一批空调产品共有 N 个，其中 M 个是不合格品，$N-M$ 个是合格品，从中随机取出 n 个，试求事件 A_m ="取出的 n 个产品中有 m 个不合格品" 的概率.

解： 先计算样本空间 S 中样本点的个数：从 N 个产品中任取 n 个，因为不讲次序，所以样本点的总数为 C_N^n，又因为是随机抽取的，所以这 C_N^n 个样本点是等可能的.

根据乘法原理，事件 A_m 含有 $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ 个样本点，由此得事件 A_m 的概率为

$$P(A_m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \quad m=0,1,2,\cdots,r,r=\min(n,M)$$

【例 1.10】 把 10 本书随机放在书架的一排上，求指定的 3 本书放在一起的概率.

解： 样本空间 S=（把 10 本书随机放在书架的一排上）含有 P_{10}^{10} 个不同排法（样本点）．每种排法等可能，此题归为古典概型．指定的 3 本书放在一起情况下随机摆放 10 本书可以采取下列排法：

第一步，把 3 本书随机排列排法数是 P_3^3；

第二步，把排好的 3 本书当作 1 本书与其他 7 本书一起进行随机排列，排法数是 P_8^8，则 $P(\text{指定的 3 本书放在一起})=\dfrac{P_3^3P_8^8}{P_{10}^{10}}$.

第四节　条件概率与事件的相互独立性

一、条件概率

1. 条件概率

条件概率（conditional probability），又称先验概率，是概率论中的一个既重

要又实用的概念．哲学告诉我们世界是普遍联系着的，人类的活动中有许多事情是相互联系的，人们对未知事件或现象发生结果的估计有时还要参考已经发生的事件或现象，也就是说先验经验会改变人类对事件或现象的认知．在概率论中，对于事件 A；除了要计算它发生的概率 $P(A)$ 外，常常还要考虑在事件 B 发生条件下事件 A 发生的概率 $P(A \mid B)$，一般而言，这两个概率是不等的．我们先看下列条件概率的定义．

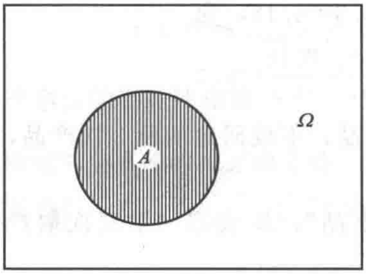
定义 1.3　设 A、B 是样本空间 S 中的两个事件，若 $P(B)>0$，则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.26}$$

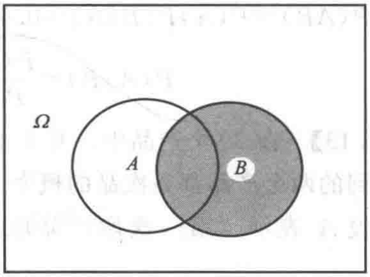
为"在事件 B 发生下事件 A 的条件概率"，简称条件概率．

注意： 这个定义既是一个定义，又是计算条件概率的一个重要公式．

为什么这么定义呢？看图 1.1，从直观上来理解一下若图 1.1(a) 中矩形面积为 1 [即为 $P(S)=1$]，则 $P(A)$ 的大小为阴影部分，即事件 A 的面积；而 $P(A \mid B)$ 表示在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的可能性大小（即其概率），见图 1.1(b)，在事件 B 发生的条件下，我们考虑的样本空间就不是原先的 S 了，而是事件 B，此时 $P(B)=1$，即此时图中阴影部分的样本点才有可能发生，白色区域的样本点根本不可能发生，因此能使事件 A 发生的样本点只在 $A\cap B$ 的部分；事件 A 发生可能性大小为图中 $A\cap B$ 的"面积"与事件 B 的"面积"之比，易知这两个面积分别是 $P(AB)$ 与 $P(B)$，故应有 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$，这个关系具有一般性．



(a)



(b)

图 1.1

【例 1.11】　考察有两个小孩的家庭，其样本空间为 $S=\{$男女，男男，女女，女男$\}$，其中"男女"代表大的是男孩，小的是女孩，其余样本点类似，假设在 S 中 4 个样本点（即基本事件）等可能情况下，求如下两个事件的概率：

（1）事件 $A=$"家中不少于一个女孩"的概率．

（2）在事件 $B=$"家中至少有一个男孩"发生的条件下，事件 A 发生的概率．

解：(1)(考虑不相容事件)：由样本空间 S 有 4 个样本点，有限；各样本点等可能．符合古典概型，至少有一个女孩的样本点有 3 个，因此 $P(A)=0.75$.

(2) 直接用条件概率公式，$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(\text{“有男孩,也有女孩”})}{1-P(\text{“全为女孩”})}=\frac{2}{3}$.

在样本空间 S 中结构简单的情况下，可用类似于穷举法的直观方法来解决，可以绕过条件概率定义中的公式 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$ 来计算. 需要注意的是，并不是每个条件概率都可以直接算，仍需用定义并参考事件的实际背景来求解.

2. 乘法公式

若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$，此式称为概率的乘法公式.

这一公式由条件概率的定义直接得到.

乘法公式还可以推广到 n 个事件上去：

(1) 设 $P(AB)>0$，则

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB) \tag{1.27}$$

读者可考虑在条件 $P(AC)>0$ 或 $P(BC)>0$ 之下的乘法公式.

(2) 一般地，事件 A_1，A_2，…，A_n，$P(A_1A_2\cdots A_n)>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{1.28}$$

注意：在实际运用中，重点是 2 个事件和 3 个事件时的概率计算时的乘法公式.

【例 1.12】 设 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.9$，$P(B|A)=0.3$，求 $P(A|B)$.

解：$P(AB)=P(A)P(B|A)=0.6\times0.3=0.18$，则

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.18}{0.9}=0.2$$

【例 1.13】 在 20 个产品中，有 4 个次品，不放回地抽取 2 次产品，每次取 1 个，求取到的两个产品都是次品的概率.

解：设 A 表示“第一次取产品取到次品”，B 表示“第二次取产品取到次品”，则

$$P(A)=\frac{4}{20}=0.2,P(B|A)=\frac{3}{19}$$

故
$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{5}\times\frac{3}{19}=\frac{3}{95}$$

【例 1.14】 盒中有 5 个白球 2 个黑球，连续不放回地在其中取 3 次球，求第三次才取到黑球的概率.

解：设 $A_i(i=1, 2, 3)$ 表示“第 i 次取到黑球”，于是所求概率为

$$P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\cap\overline{A_2})=\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{21}$$