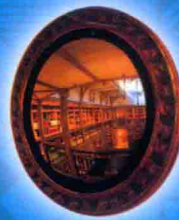
Solution of Hungary Mathematics Olympiad (Volume 2)



匈牙利奥林匹克数学竞赛题解

第2卷

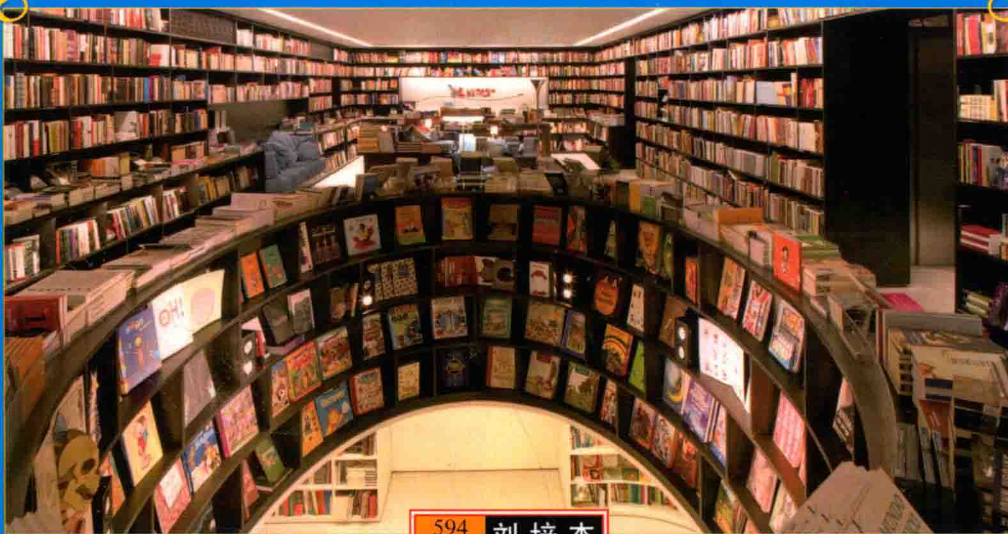
●《匈牙利奥林匹克数学竞赛题解》编写组 编译

$\sum_{1}^{5} k^{5} x_{k} = a^{3}$

$\sum_{1}^{5} k^{3} x_{k} = a^{2}$

$\sum_{1}^{5} k x_{k} = a$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



刘培杰数学工作室

中学生数学竞赛试题系列

- 历届美国数学奥林匹克试题集：多解推广加强
- 历届美国数学邀请赛试题集
- 保加利亚数学奥林匹克
- 历届加拿大数学奥林匹克试题集
- 历届巴尔干数学奥林匹克试题集
- 历届波兰数学奥林匹克试题集
- 历届美国中学生数学竞赛试题及解答
- 全国高中数学联赛试题及解答
- 圣彼得堡数学竞赛试题集
- 数学奥林匹克问题集
- 360 个数学竞赛问题
- 历届 IMO 试题集
- 历届 CMO 试题集
- 匈牙利奥林匹克数学竞赛题解

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 张永文
封面设计 孙茵艾

哈尔滨工业大学出版社 刘培杰数学工作室
联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街10号
邮　　编：150006
联系电话：0451-86281378　13904613167
E-mail：lpj1378@163.com
微　　信：impjpp

上架建议：数学竞赛

ISBN 978-7-5603-5941-0

9 7875

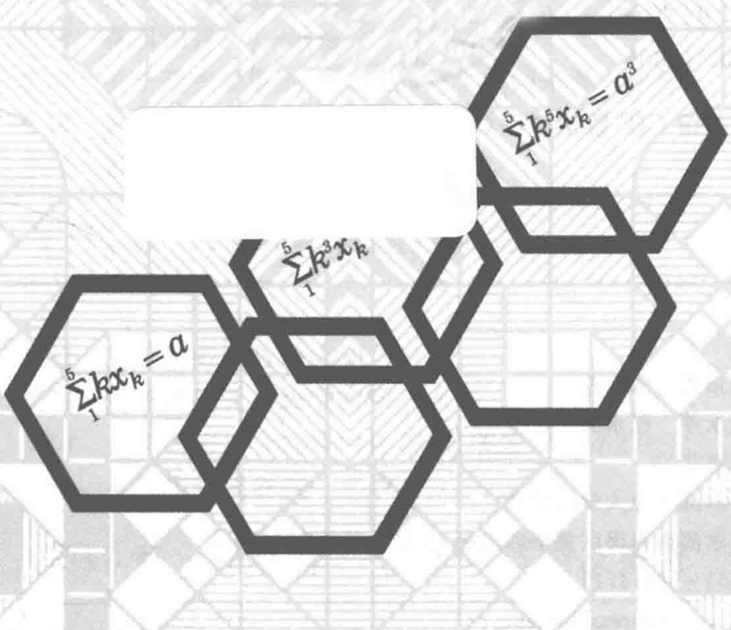
定价

Solution of Hungary Mathematics Olympiad（Volume 2)

匈牙利奥林匹克数学竞赛题解

第2卷

●《匈牙利奥林匹克数学竞赛题解》编写组　编译



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书共分为2卷，第2卷收集了1934年至1974年匈牙利奥林匹克数学竞赛的一百多道试题及解答，一题多解，并有理论说明. 虽然用中学生学过的初等数学知识就可以解答这些试题，但是它又涉及许多高等数学的课题. 参阅此书不仅有助于锻炼逻辑思维能力，对进一步学习高等数学也颇有好处.

本书可供中学生、中学教师及广大数学爱好者学习与参考.

图书在版编目(CIP)数据

匈牙利奥林匹克数学竞赛题解. 第2卷/《匈牙利奥林匹克数学竞赛题解》编写组编译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016.5

ISBN 978-7-5603-5941-0

Ⅰ.①匈… Ⅱ.①匈… Ⅲ.①中学数学课-竞赛题-题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第071742号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 张永文
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张16 字数243千字
版　　次 2016年5月第1版 2016年5月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-5941-0
定　　价 28.00元

目录

第 15 章　1934 年 ～ 1935 年试题及解答

112 假设

$$A=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2n}$$

这里 n 是正整数.证明:在序列

$$A,2A,4A,8A,\cdots,2^kA,\cdots$$

中,从某处开始所遇到的都是整数.

证明　将分数 A 的分子和分母同乘以 $2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n-2)$,我们得到

$$A=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{[2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n-2)]^2\cdot 2n}=$$

$$\frac{1}{2^{2n-1}}\cdot \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!\ ]^2 n}=$$

$$\frac{1}{2^{2n-1}}\cdot \frac{(2n-1)!}{n!\ (n-1)!}=$$

$$\frac{1}{2^{2n-1}}C_{2n-1}^{n-1} \tag{1}$$

式(1)右端的二项式系数 C_{2n-1}^{n-1} 是整数(等于从 $2n-1$ 个元素中取出 $n-1$ 个元素的组合数).因此

$$2^{2n-1}A$$

是整数,这就是所要证明的.

如果利用在阶乘的标准分解式中含有给定素数的最大指数的勒让德定理,也可以证明本题的断言.

113 在给定圆中,怎样的圆内接多边形的边的平方和达到最大值?

解法 1　(1) 如果在圆内接多边形中,有一个角是钝角,那么当去掉这个钝角的顶点时,所得到的圆内接多边形,其边的平方和大于原来的圆内接多边形的边的平方和,因为在钝角三角形中,钝角所对的边的平方大于其他两边的平方和(见第 1 卷第 57 题的证法 2 和 §38).

因为 n 边形的内角和等于

$$(n-2)180^\circ=[n+(n-4)]\cdot 90^\circ$$

所以在任何一个五边形和四边形（除了矩形以外）中，至少有一个钝角. 于是应该在三角形和矩形中来寻求其边的平方和具有最大值的圆内接多边形.

(2) 假设 α,β,γ 是内接于给定圆的三角形的三个角，r 是圆的半径. 三角形的边的平方和可以表示成下面的形式（见第1卷第6题解法1）

$$4r^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma) \tag{1}$$

利用 §53 和第1卷 §9(1) 中的公式，可以将括号中的表达式变成

$$\begin{aligned}&\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\\&1-\cos^2\alpha+\frac{1}{2}(1-\cos 2\beta)+\frac{1}{2}(1-\cos 2\gamma)=\\&2-\cos^2\alpha-\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)=\\&2-\cos^2\alpha+\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)=\\&2-\left[\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos(\beta-\gamma)\right]^2+\frac{1}{4}\cos^2(\beta-\gamma)\end{aligned} \tag{2}$$

式(2) 最后一个表达式当

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}\cos(\beta-\gamma),\cos(\beta-\gamma)=1$$

时有最大值 $\frac{9}{4}$. 由式(2) 推出（因为我们所研究的是三角形的角）：$\beta=\gamma,\alpha=60^\circ$. 因此，$\beta=\gamma=60^\circ$. 于是由关系式(1)，在半径为 r 的圆中，圆内接正三角形的边的平方和等于 $9r^2$，而其他任何圆内接三角形的边的平方和小于 $9r^2$.

(3) 在半径为 r 的圆中，圆内接矩形的边的平方和等于 $8r^2$，因此，小于正三角形的边的平方和.

于是，在所有内接于给定的圆且自不相交的多边形中，正三角形的边的平方和最大. ★

解法2 (1) 如果 a,b,c 是三角形的边，m 是边 c 上的中线，那么

$$a^2+b^2=\frac{c^2}{2}+2m^2$$

假设 k 是中线 m 在边 c 上的投影，h 是边 c 上的高（图120）. 边 a 和 b 在边 c 上的投影是长为 $\frac{c}{2}+k$ 和 $\left|\frac{c}{2}-k\right|$ 的线段. 我们来研究三个直角三角形，它们具有公共的直角边 h，其余边分别为 a,b,m. 根据勾股定理

$$a^2+b^2=2h^2+\left(\frac{c}{2}+k\right)^2+\left(\frac{c}{2}-k\right)^2=$$

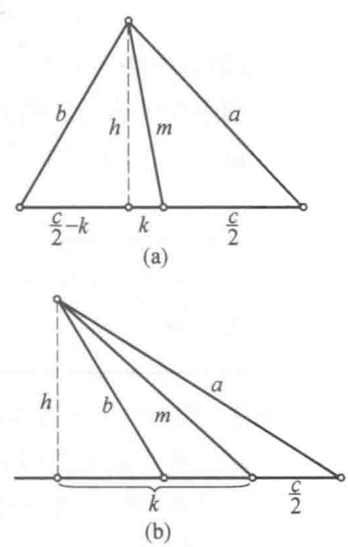


图 120

$$\frac{c^2}{2}+2(h^2+k^2)=\frac{c^2}{2}+2m^2$$

(2) 如果 AB 是一条弦(小于直径)，把圆周分成一条大弧和一条小弧，点 M 是小弧的中点，点 N 是大弧的中点. 那么当点 P 沿着圆周从点 M 往点 N 移动时，平方和 PA^2+PB^2 单调递增(图 121).

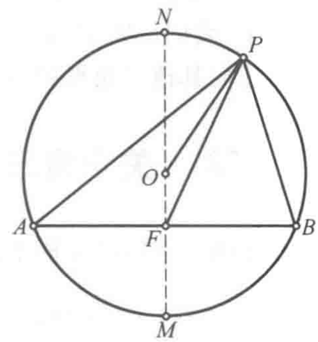


图 121

为了证明这个定理，我们利用上面已经证明过的断言. 于是只要证明当点 P 沿着圆周从点 M 向点 N 移动时，联结点 P 和弦 AB 的中点 F 的线段 PF 的长度单调递增. 这可以证明如下：当点 P 移动时，在 $\triangle POF$ 中，边 OF 和 OP 的长度不变，而 $\angle MOP$ 单调递增，所以它所对的边 PF 也单调递增(见第 1 卷 § 38).

(3) 由(2) 中所证明的定理推出，对于圆内接多边形的顶点 P 来说，如果顶角 APB 是钝角或直角，那么当用弦来代替相邻的边 AP 和 PB 时，我们得到新的内接多边形，而且它的边的平方和大于(如果 $\angle APB$ 是钝角) 或等于(如果 $\angle APB$ 是直角) 原来的多边形的边的平方和.

重复“削去”钝角和直角足够多次，我们总可以把任意一个圆内接多边形化为内接于同一个圆的三角形，而且边的平方和大于或等于原来的边的平方和，仅仅当所得到的三角形的一条边和外接圆的直径重合时，边的平方和才会相等. 这样一来，如果我们证明了在所有的内接于给定圆的三角形中，正三角形的边的平方和最大，那么我们就证明了正三角形是本题的答案.

(4) $\triangle APB$ 内接于给定圆，我们来研究它的边的平方和. 如果三角形不是等边三角形，我们选取这样的记号，使得 $\overset{\frown}{PA}$ 是最大的弧，$\overset{\frown}{PB}$ 是最小的弧. 于是，$\overset{\frown}{AB}$ 小于圆周的一半，因为不然的话，它就是最大的弧了. 由于 $\triangle APB$ 不是等边三角形，所以 $\overset{\frown}{AP}$ 大于圆周的三分之一. 我们将顶点 P 向点 N 移动(图 121). 根据在(2) 中所证明的定理，$\triangle APB$ 的边的平方和将单调递增. 沿着圆弧移动点 P，使点 P 到达这样的位置：或者 $\overset{\frown}{AP}$ 等于圆周的三分之一，或者 $\overset{\frown}{PB}$ 等于圆周的三分之一，或者 $\overset{\frown}{AP}$ 和 $\overset{\frown}{PB}$ 同时等于圆周的三分之一. 后一种情况只有当 $\overset{\frown}{AN}$ 和 $\overset{\frown}{NB}$ 都等于圆周的三分之一时才有可能. 如果 $\overset{\frown}{AN}$ 和 $\overset{\frown}{NB}$ 小于(或大于) 圆周的三分之一，那么应该使点 P 移动到使 $\overset{\frown}{AP}$(或 $\overset{\frown}{PB}$) 等于圆周的三分之一的位置. 因此在给定圆中，对于任何一个不等边的内接三角形，都可以作出一个内接于同一圆的三角形，其边的平方和更大，而且一条边所对的劣弧等于圆周的三分之一.

对于所得到的三角形,我们又可以应用上面的论证,不过这时用$\overset{\frown}{AB}$表示等于圆周的三分之一的那一段弧.

于是,我们证明了:正三角形的边的平方和大于内接于同一圆的任何其他三角形的边的平方和.

§53 关于将三角函数的和化为乘积

在上面所进行的变换中,我们利用了关系式

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

此外,注意到下面的关系式也是有益的

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

它们可以从两角和的正弦和余弦的公式推出,如果在每一个关系式的左边代之以

$$x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2},y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$$

114 假设在平面上给定了无穷多个矩形,它们的顶点的直角坐标是

$$(0,0),(0,m),(n,0),(n,m)$$

其中m和n是正整数.证明:在这些矩形之中,总可以挑选出两个矩形,使得一个矩形在另一个矩形里面.

证法1 我们把本题条件中所说的n叫作矩形的宽,m叫作矩形的高.

因为矩形的宽n是正整数,所以在它们之中有一个最小的矩形(见第1卷 §2 和 §3).我们选取任意一个有最小宽n_1的矩形,假设m_1是它的高.另外再任意取m_1个矩形.如果在这m_1个矩形中,有一个矩形的高大于m_1,那么这个矩形将把具有最小宽n_1,高为m_1的那个矩形包含在内.如果在所取的m_1+1个矩形中,没有任何一个矩形的高大于m_1,那么这m_1+1个矩形的高的值只能是$1,2,\cdots,m_1$,因此它们的高不可能完全不同(见第1卷 §30).这样一来,在所取的m_1+1个矩形中,至少有两个矩形的高相等,而一个包含在另一个的里面.

证法 2　(1) 如果一个矩形的高或宽等于另一个矩形的高或宽，那么在这两个矩形中，一定有某一个包含另一个.

(2) 如果任意两个矩形的高和宽都不同，那么我们任取一个矩形，假设它的宽为 n，高为 m. 由于任何两个矩形的宽和高都不同，所以比我们所取的矩形要窄的矩形的个数是有限的(不多于 $n-1$ 个)，而且比这个矩形要矮的矩形的个数也是有限的(不多于 $m-1$ 个). 除了这些有限个矩形之外，其他所有的矩形都包含我们所选取的那个矩形.

证法 3　我们来证明，在本题的条件下，存在一个无穷的矩形序列，在这个序列中，前一个矩形包含在后一个矩形之中.

(1) 如果任何一个矩形都包含在另外某一个矩形之中，那么所要证明的断言显然成立.

(2) 如果在矩形中有这样一个矩形，它不包含在任何其他的矩形内，那么所有其他的矩形，要么比这个矩形窄，要么比这个矩形矮. 但是给定的矩形有无穷多个，因此比较窄或比较矮的矩形也有无穷多个. 不失一般性，我们可以假设有无穷多个比较窄的矩形(在相反的情况下，只要在说到矩形的宽时，用它的高来代替就行了). 这样的矩形的宽只可能取有限个不同的值. 因此在它们之中，一定有无穷多个矩形的宽是相同的. 显然，它们可以排成我们所要的序列.

§54　有向无穷图

(1) 在第 114 题的证法 3 的(2) 中，我们得到了无穷的矩形序列，它们之中的每一个包含前一个矩形. 显然在(1) 中也可以得到具有同样性质的无穷的矩形序列. 我们来证明这个比原题更强的断言对于任意的无穷矩形序列也是正确的，只要在它的每一个无穷的子序列中，至少有一个矩形包含这个子序列的另一个矩形.(对于顶点在点$(0,0)$，$(0,m)$，$(n,0)$，(n,m) 的矩形，这个断言一定成立，因为对于这种矩形的任一无穷子集合，原题的断言是正确的.) 我们先把上面所说的较强的断言变成图论的语言再来证明它.

关于什么是图以及图论研究什么，前面已经说过了(见第 1 卷 §52). 虽然在那里说到的仅仅是有限个顶点的图，但是图的定义的本身绝没有把图含有无穷多个顶点的情况排除在外. 此外，在解决图论的某些问题时，指出边的方向，即在两个用给定的边联结起来的顶点中，指明哪一个顶点算作起点，哪一个顶点算作终点，将是方便的. 具有给定方向的边叫作有向边. 如果图的所有的边都是有向的，那么这个图叫作有向的. 如果不

是图的所有的边是有向的，而只是某些边是有向的，那么这样的图叫作部分有向的.（应该指出，如果每一条无向边用两条反向的边来代替，那么任何一个图都可以认为是有向的.）如果在一个有向图中，对于任何三个顶点，如果有从第一个顶点到第二个顶点的边和从第二个顶点到第三个顶点的边，则一定有从第一个顶点到第三个顶点的边，那么这样的有向图称为可传递的有向图.

还必须引入和任意的（不一定是有向的）图有关的两个概念. 如果图的任何两个顶点之间都有边相连，这样的图叫作完全图. 由图 G 的部分顶点和联结它们的边所构成的图叫作给定图 G 的子图. 我们说子图是在给定图 G 的顶点的子集合上张成的，如果它包含所有以这个子集合的任意一对顶点为端点的边.

(2) 现在我们回到第 114 题并且把它的条件表示成无穷的有向图的形式. 每一个矩形对应于图的一个顶点. 如果某一个矩形包含另一个矩形，那么图的对应顶点用有向边联结起来，有向边的起点“对应”的矩形被包含在另一个矩形之中. 当然这样的图没有说到矩形的边长用整数表示，也没有说到矩形的顶点是怎样分布的. 这些条件以及其他的条件只是在证明图中有边存在时需要用到. 在(1) 中已经说过，所构成的图的任何一个无穷的子图含有边. 此外所构成的图是可传递的有向图. 因为如果一个矩形包含另一个矩形，而这个矩形也包含一个矩形，那么第一个矩形包含第三个矩形.

正像在(1) 中所提到过的那样，从本题条件推出，从矩形中可以挑选出一个矩形包含在另一个矩形之中的无穷序列. 这意味着本题的图包含无穷的、可传递的、有向的完全子图. 产生一个问题：仅仅由我们刚才所说的子图的性质是否能推出这种子图存在？我们来证明这个结论是正确的，甚至于不必假设原来的图是可传递的有向图，即我们证明下面的定理：

如果无穷有向图的顶点的任一无穷子集合包含彼此有边相连的两个顶点，那么这样的图包含无穷的、可传递的、有向的完全子图.

首先证明我们的图包含这样的顶点，从它发出无穷条边或者有无穷多条边进入这个顶点. 我们取图的任意一个顶点，然后选取任意一个和它没有边相连的顶点（如果这样的顶点存在的话），再后又取一个和前面的任何一个顶点都没有边相连的顶点，如果这样的顶点存在的话. 经过有限步之后，这个过程就中断了，因为我们的图的顶点的任一无穷子集合包含两个彼此有边相连的顶点. 因此图的其余的每一个顶点至少和所选取的

顶点中的某一个顶点有边相连. 这样一来，在所选取的顶点中，至少有一个顶点（我们用点 A_1 来表示它）和无穷多个顶点有边相连. 在联结顶点 A_1 和图的其他的顶点的边中，或者有无穷多条边是由点 A_1 发出的（在这种情况下，我们将把点 A_1 叫作第 1 类的顶点），或者有无穷多条边进入它（第 2 类顶点）.

假设 G_1 是这样的无穷子图，如果是第 1 类的顶点，那么 G_1 是由从点 A_1 发出的边的终点组成的，如果点 A_1 是第 2 类的顶点，那么 G_1 是由进入点 A_1 的边的起点组成的. 这个子图满足定理的条件，因此，在它的顶点中可以找到这样的顶点 A_2，由它发出或进入无穷多条边. 继续讨论下去，我们作出了一个无穷的顶点序列 $A_1,A_2,\cdots$，而且在这个序列中，或者由点 A_i 发出联结它和所有后面的顶点的边（A_i 是第 1 类的），或者以点 A_i 之后的每一个顶点为起点的边都进入 A_i（A_i 是第 2 类的）. 研究我们的序列中由同一类顶点构成的两个子集合，至少有一个子集合是无穷的. 当取属于这个子集合的顶点时，我们得到无穷的、可传递的、有向的完全子图.

115 假设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的某一个排列. 证明

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant n$$

证法 1　我们利用数

$$\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\cdots,\frac{a_n}{b_n}$$

的算术平均值和几何平均值之间的不等式（见第 1 卷 § 42）. 因为数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不是别的，而是数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 在另一种次序下的排列，所以

$$\frac{\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}}{n}\geqslant\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\cdots a_n}{b_1b_2\cdots b_n}}=1$$

于是证明了所要证明的不等式. 等号对应于下面的情况

$$\frac{a_i}{b_i}=1\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

也就是说，只是把数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中相同的数重新排列.

证法 2　（1）我们用完全数学归纳法来证明不等式（见第 1 卷 § 3）. 当 $n=1$ 时，不等式蜕化成等式，它一定成立.

（2）假设不等式对任意 $n=k$ 个正数是成立的. 我们来证明它对任意 $k+1$ 个正数也成立. 如果对某个 i，数 a_i 和 b_i 重合，那

么其余的数 b 是下标不为 i 的数 a 的一个排列. 这样的数有 k 个，而且根据归纳假设，形如$\frac{a_i}{b_j}(j\neq i)$ 的 k 个分数的和大于或等于 k. 在不等式的两边加上 1，便得到所要的不等式. 在它的左边有 $k+1$ 个被加项，而右边是数 $k+1$.

(3) 如果所有的分数$\frac{a_i}{b_i}$ 都不等于 1，那么我们用 a_i 表示 a 中最大的（如果这样的数不止一个，我们任取其中的一个）. 假设 $b_j=a_i$. 将 b_i 和 b_j 对换以后，我们得到新的和数 S'，将 S' 和原来的和数 S 来进行比较. 根据假设，$b_i<a_i$，$a_j<b_j=a_i$，因此

$$S-S'=\frac{a_i}{b_i}+\frac{a_j}{b_j}-\frac{a_i}{b_j}-\frac{a_j}{b_i}=(a_i-a_j)\left(\frac{1}{b_i}-\frac{1}{b_j}\right)=$$
$$(b_j-a_i)\left(\frac{1}{b_i}-\frac{1}{a_i}\right)>0$$

因为在新的和数 S' 中，第 i 个被加项的分子和分母相同，所以根据(2) 中所证明的有 $S'\geqslant k+1$. 因此

$$S>S'\geqslant k+1$$

这就完成了归纳证明. ★

§55　关于某些著名的不等式的一个共同来源

(1) 如果利用下面的问题的解，就可以无困难地证明第 1 卷第 115 题的断言和某些其他著名的不等式.

设

$$a_1,a_2,\cdots,a_n$$

和

$$b_1,b_2,\cdots,b_n$$

是正实数，而

$$c_1,c_2,\cdots,c_n$$

是数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的任一排列在和

$$S=a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n$$

中，怎样的和最大，怎样的和最小？

在某些具体的情况下，也许每一次都能正确回答这些问题. 例如，我们假设在一个箱子中放的是面值为 1 角的人民币，在第二个箱子中放的是面值为 2 角的人民币，在第三个箱子中放的是面值为 5 角的人民币，在第四个箱子中放的是面值为 1 元的人民币，允许我们从这些箱子中分别取出 3，4，5，6 张人民币，但不指定从每一个箱子中取出的张数. 也许最有利的取法是从放最大面值（每张都是 1 元的）的箱子中取出最多张数（6 张），然后从放 5 角的箱子中取张数第二多（5 张）的人民币等.

也许大家都会同意最不利的取法是从放 1 角的人民币的箱子中取 6 张，从放 2 角的人民币的箱子中取 5 张等. 这样一来，如果 c_1, c_2, c_3, c_4 表示数 3,4,5,6 的任一排列，那么[①]

$$10 \times 6 + 20 \times 5 + 50 \times 4 + 100 \times 3 \leqslant$$
$$10c_1 + 20c_2 + 50c_3 + 100c_4 \leqslant$$
$$10 \times 3 + 20 \times 4 + 50 \times 5 + 100 \times 6$$

在一般的情况下，可以有下面的断言. 在和数 S 中，最大的和数所对应的情况是：数 b 按数 a 的大小次序调整好（即数 b 中最大的数对应于数 a 中最大的数，数 b 中第二大的数对应于数 a 中第二大的数等）[②]，而最小的和数所对应的情况是：两个序列的大小次序正好相反（数 a 中最大的数对应于数 b 中最小的数）.

如果数 a 所有的数都相等，那么对于数 b 的任一排列，和数 S 具有相同的值（当数 b 所有的数都相等时也一样）. 我们假设在数 a 中有不相同的数，例如，设 $a_r > a_s$. 我们来比较两个和数

$$S = a_1c_1 + \cdots + a_rc_r + \cdots + a_sc_s + \cdots + a_nc_n$$

和

$$S' = a_1c_1 + \cdots + a_rc_s + \cdots + a_sc_r + \cdots + a_nc_n$$

它们不同的仅仅是在第二个和数中，c_s 和 c_r 调换了位置. 因为

$$S' - S = a_rc_s + a_sc_r - a_rc_r - a_sc_s = (a_r - a_s)(c_s - c_r)$$

所以若 $c_r < c_s$，那么 $S' > S$；若 $c_r > c_s$，那么 $S' < S$.

由给定的数 a 和 b 只能构成有限个不同的和数 S. 在它们之中总有最大的和最小的. 它们正好对应于上面所说的断言，因为对于数 c 的另一种排列，所得到的和数或者是上升的，或者是下降的.

第 1 卷第 115 题是上面所证明的断言的特殊情况. 事实上，我们将数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 以上升的次序排好，并且取

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, b_2 = \frac{1}{a_2}, \cdots, b_n = \frac{1}{a_n}$$

这时，数 b 是以下降的次序排列的，和数 S 取最小值，它等于

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = n$$

(2) 由所证明的断言可以推出许多著名的不等式. 例如，由它可以引出：任何正数

---

① 在上面的一段中，原文用的是匈牙利货币的名称，为了方便我国读者，改为人民币. 这里的 10 表示 1 角，20 表示 2 角，50 表示 5 角，100 表示 1 元. —— 中译者注

② 在数 a 和 b 中可能有相等的数. 自然，调动相等的数并不改变大小次序.

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

的几何平均值不大于它们的算术平均值(见第1卷 §42).

设

$$c = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

是数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的几何平均值.我们构造两个数列

$$a_1 = \frac{x_1}{c}, a_2 = \frac{x_1 x_2}{c^2}, a_3 = \frac{x_1 x_2 x_3}{c^3}, \cdots, a_n = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{c^n} = 1$$

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, b_2 = \frac{1}{a_2}, b_3 = \frac{1}{a_3}, \cdots, b_n = \frac{1}{a_n} = 1$$

因为在两个数列中的数互为倒数,所以和数

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

小于或等于

$$a_1 b_n + a_2 b_1 + a_3 b_2 + \cdots + a_n b_{n-1}$$

即

$$1 + 1 + \cdots + 1 \leqslant \frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \cdots + \frac{x_n}{c}$$

$$n \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{c}$$

所以

$$c \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

等号仅可能在

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

或

$$\frac{x_1}{c} = \frac{x_1}{c} \cdot \frac{x_2}{c} = \frac{x_1}{c} \cdot \frac{x_2}{c} \cdot \frac{x_3}{c} = \cdots = \frac{x_1}{c} \cdot \frac{x_2}{c} \cdot \frac{x_3}{c} \cdot \cdots \cdot \frac{x_n}{c} = 1$$

时成立,这时

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = c$$

(3) 在(1)中所引出的断言还能够证明切比雪夫不等式,比通常的直接证明要简单得多.设

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$
$$b_1, b_2, \cdots, b_n$$

是两个有相同次序的序列(例如,两个序列或者以上升的次序排列,或者以下降的次序排列).这时根据我们的基本定理

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$
$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \geqslant a_1 b_2 + a_2 b_3 + \cdots + a_n b_1$$
$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \geqslant a_1 b_3 + a_2 b_4 + \cdots + a_n b_2$$
$$\vdots$$
$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \geqslant a_1 b_n + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_{n-1}$$

把所得到的关系式全部加起来,我们得到