各版本适用

立足高考大纲 探究知识内涵
解读奥赛真题 揭示思维规律
点击高考难题 登上名校殿堂

第7版

高考·奥赛对接辅导

高中数学 1

主编 蔡 晔

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高考·奥赛对接辅导

高中数学 1

第 7 版

主　编　蔡　晔
编　者　刘　林　杨传彬　赵振红　王青仁
薛志虎　李学镇　卢建涛　刘跃先
解玉红　牛本富　李成国　李国丽
宋　曼　汪　莉　闫树茂　封　华
马金峰　王　娜　陈晓钟

机械工业出版社

本系列书将整个高中阶段的内容按知识模块进行编排。全书共有14章，每一章节中，既有对高中阶段所应掌握的重点知识的讲解归纳，又有对与内容相关的近几年各地具有代表性的高考真题、竞赛题的归类整理和解析；同时还针对以后高考的趋势和方向，设计用于学生自练自评的练习题。书后附有详细的参考答案。

本书既可用于学生同步巩固复习与训练，也适用于高考的第一轮复习。

图书在版编目(CIP)数据

高考·奥赛对接辅导．高中数学．1/蔡晔主编．—7版．
—北京：机械工业出版社，2013．4（2014．11重印）
ISBN 978-7-111-41884-9

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①蔡…　Ⅲ．①中学数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第054214号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码100037)
策划编辑：马文涛　胡　明　责任编辑：马文涛　李　乐
责任印制：邓　博
北京宝昌彩色印刷有限公司印刷
2014年11月第7版·第6次印刷
148mm×210mm·11．125印张·360千字
标准书号：ISBN 978-7-111-41884-9
定价：19．50元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：(010)88361066
销售一部：(010)68326294
销售二部：(010)88379649
读者购书热线：(010)88379203

网络服务
教材网：http://www.cmpedu.com
机工官网：http://www.cmpbook.com
机工官博：http://weibo.com/cmp1952
封面无防伪标均为盗版

前　言

编写定位

编者精心编写的“高考·奥赛对接辅导”系列书立足教材、着眼高考、面向竞赛，融高考和竞赛于一体，期望为学生们提供最全面、最实用、最完备的高考常考知识点和竞赛解题方法。

本系列书内容的难度定位在中等偏上，以新课标、高考大纲中的重、难点及竞赛中的常考知识拓展点为基础，结合近年来经典的高考难题和典型的竞赛题，介绍解决较难题的方法，培养学生们解决问题的能力，并通过练习题及时巩固，引导创新。

编写特点

1. 导向性　本书全面反映了近几年高考和竞赛的题型，详细介绍了所有的知识点以及解题技巧，体现出学科内不同知识板块间的综合联系，侧重考查学生的能力、素质，从而将未来高考和竞赛的趋势全面展现出来。

2. 新颖性　本书所选的例题是精心筛选的近几年的高考题和国际、国内竞赛题，内容新、题型新。大多数例题具有一定难度，虽难不偏，具有代表性，且解题方法灵活。

本系列书自面世以来，得到了读者朋友的一致认可。本着与时俱进的原则和精益求精的态度，同时也为了答谢读者的厚爱，我们组织了一批有经验的专家和勇于创新的一线优秀青年教师，分析研究近年来全国各地、各类竞赛题和高考题的新变化，对原书内容进行了必要的修订和优化，期望能为学生们迎接升学考试和竞赛复习助一臂之力。

由于编者水平有限，书中可能存在一些差错，敬请广大读者批评指正。

编　者

目　　录

第1章 集 合

考点对接

1. 常用数集

N 表示非负整数集(或自然数集);$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ 表示正整数集;**Z** 表示整数集;**Q** 表示有理数集;**R** 表示实数集.

常用数集关系如下:$\mathbf{N}^* \subsetneqq \mathbf{N} \subsetneqq \mathbf{Z} \subsetneqq \mathbf{Q} \subsetneqq \mathbf{R}$.

2. 空集

空集是不包含任何元素的集合.空集是一切集合的子集.空集是任何非空集合的真子集.

3. 集合间的关系

(1)子集:如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做集合 B 的子集,记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$),读作 A 包含于 B(或 B 包含 A).若 $A\subseteq B$,则有两种情形:$A\subsetneqq B$ 或 $A=B$.

(2)真子集:如果集合 A 是集合 B 的子集,且 B 中至少有一个元素不属于 A,那么集合 A 叫做集合 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$),读作 A 真包含于 B(或 B 真包含 A).

(3)集合相等:对于两个集合 A 与 B,若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,我们就说这两个集合相等,记作 $A=B$.

(4)性质:①$A\subseteq A$;②$\varnothing\subseteq A$;$\varnothing\subsetneqq A(A\neq\varnothing)$;③若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$;若 $A\subsetneqq B$ 且 $B\subsetneqq C$,则 $A\subsetneqq C$;④若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则 $A=B$;⑤若 $A\subseteq B$,则 $A\cap B=A$,$A\cup B=B$.

(5)任意两个集合间的关系:$\begin{cases} A\not\subseteq B. \\ A\subseteq B=\begin{cases} A\subsetneqq B, \\ A=B. \end{cases} \end{cases}$

4. 集合间的运算

(1)补集:设全集是 U,A 是 U 的一个子集,由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合叫做 U 中子集 A 的补集(或余集),记作 $\complement_U A$,即

$$\complement_U A=\{x\mid x\in U 且 x\notin A\}.$$

性质：$A\cup\complement_U A=U$；$A\cap\complement_U A=\varnothing$；$\complement_U(\complement_U A)=A$.

(2)交集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A 且 x\in B\}$.

(3)并集：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A 或 x\in B\}$.

(4)交集、并集常用性质：

①$A\cap A=A, A\cap\varnothing=\varnothing, A\cap B=B\cap A$；

②$A\cup A=A, A\cup\varnothing=A, A\cup B=B\cup A$；

③$A\cap\complement_U A=\varnothing, A\cup\complement_U A=U, A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$；

④$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B), (\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$；

⑤$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B$.

特别提示：集合的运算有交、并、差、补，由这些运算派生出的 11 条运算律(即运算的性质)，即交换律、结合律、分配律、同一律、排中律、矛盾律、双重否定律、幂等律、零一律、吸收律、摩根律，更应该很好地掌握.

集合的运算有三个方面的问题：一是进行集合的运算，二是集合运算式的化简，三是集合恒等式的推理证明.

5. 有限集子集的数目

集合 $\{a\}$ 的子集有 2 个：$\varnothing,\{a\}$；

集合 $\{a_1,a_2\}$ 的子集有 2^2 个：$\varnothing,\{a_1\},\{a_2\},\{a_1,a_2\}$；

集合 $\{a_1,a_2,a_3\}$ 的子集有 2^3 个：$\varnothing,\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\},\{a_1,a_2\},\{a_2,a_3\},\{a_1,a_3\},\{a_1,a_2,a_3\}$.

推广至一般情形，若一个集合有 n 个元素，其子集有 2^n 个，真子集有 (2^n-1) 个，非空子集有 (2^n-1) 个，非空真子集有 (2^n-2) 个.

6. 有限集元素的数目

若集合 A 是有限集，通常用“$|A|$”表示集合 A 中的元素个数.

7. 容斥原理

定理 1　设 A,B 都是有限集，则

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|.$$

定理 2　设 A,B,C 都是有限集，则

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

推广至一般情形：

定理3　设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是有限集，则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i<j<t \leqslant k} |A_i \cap A_j \cap A_t| + \cdots + (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k|.$$

定理4　设 A, B 都是 S 的子集，则

$$|\complement_S A \cap \complement_S B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

定理5　设 A, B, C 都是 S 的子集，则

$$|\complement_S A \cap \complement_S B \cap \complement_S C| = |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

推广至一般情形：

定理6　设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是集合 S 的 k 个子集，则

$$|\complement_S A_1 \cap \complement_S A_2 \cap \cdots \cap \complement_S A_k| = |S| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant k} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leqslant i<j<t \leqslant k} |A_i \cap A_j \cap A_t| + \cdots + (-1)^k |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k|.$$

思维对接

考点1　集合的概念

例1　已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{(x,y) \mid x \in A, y \in A, x-y \in A\}$；则 B 中所含元素的个数为　（ D ）

A. 3　　B. 6　　C. 8　　D. 10

【分析】 要使 $x-y \in A$，当 $x=5$ 时，y 可以是 1，2，3，4；当 $x=4$ 时，y 可以是 1，2，3；当 $x=3$ 时，y 可以是 1，2；当 $x=2$ 时，y 只能是 1，综上共有 10 个，故选 D.

【答案】 D

考点2　集合与集合的关系

例2　设 $P=\{x \mid x<4\}$，$Q=\{x \mid x^2<4\}$，则　（ B ）

A. $P \subseteq Q$　　B. $Q \subseteq P$　　C. $P \subseteq \complement_{\mathbf{R}} Q$　　D. $Q \subseteq \complement_{\mathbf{R}} P$

【分析】 $Q=\{x \mid -2<x<2\}$，可知 B 正确，本题主要考查了集合间的关系及集合的基本运算.

【答案】 B

考点 3 集合的运算

例3 若集合 $A=\{x\mid |(2x-1)|<3\}$，集合 $B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{2x+1}{3-x}<0\right\}$，则 $A\cap B$ 是 ( )

A. $\left\{x\,\middle|\,-1<x<-\dfrac{1}{2}\text{或}2<x<3\right\}$ B. $\{x|2<x<3\}$

C. $\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{1}{2}<x<2\right\}$ D. $\left\{x\,\middle|\,-1<x<-\dfrac{1}{2}\right\}$

【分析】 因为集合 $A=\{x\mid -1<x<2\}$，集合 $B=\left\{x\,\middle|\,x<-\dfrac{1}{2}\text{或}x>3\right\}$，

所以 $A\cap B=\left\{x\,\middle|\,-1<x<-\dfrac{1}{2}\right\}$，故选 D.

【答案】 D

例4 设集合 $A=\{x|1<x<4\}$，集合 $B=\{x|x^2-2x-3\leqslant 0\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$ ( )

A. $(1,4)$ B. $(3,4)$ C. $(1,3)$ D. $(1,2)\cup(3,4)$

【分析】 $B=\{x|x^2-2x-3\leqslant 0\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|1<x<4\}\cap\{x|x<-1\text{或}x>3\}=\{x|3<x<4\}$，故选 B.

【答案】 B

例5 已知 A,B 均为集合 $U=\{1,3,5,7,9\}$ 的子集，且 $A\cap B=\{3\}$，$(\complement_U B)\cap A=\{9\}$，则 $A=$ ( )

A. $\{1,3\}$ B. $\{3,7,9\}$ C. $\{3,5,9\}$ D. $\{3,9\}$

【分析】 本题可根据交集和补集的定义求解，也可以通过 Venn 图数形结合求解.

因为 $A\cap B=\{3\}$，所以 $3\in A$，又因为 $(\complement_U B)\cap A=\{9\}$，所以 $9\in A$，故选 D.

【答案】 D

考点 4 根据集合间的关系和集合的运算求参数

例6 集合 $A=\{0,2,a\}$，$B=\{1,a^2\}$. 若 $A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$，则 a 的值为 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

【分析】 $A=\{0,2,a\}$，$B=\{1,a^2\}$，因为 $A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$，所以 $\begin{cases}a=4,\\a^2=16,\end{cases}$ 所以 $a=4$，故选 D.

【答案】 D

例7 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x+2|<3\}$ 集合 $B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,(x-m)(x-2)<0\}$，且 $A\cap B=(-1,n)$，则 $m=$______，$n=$______.

【分析】 由 $|x+2|<3$，得 $-3<x+2<3$，即 $-5<x<1$，所以集合 $A=\{x|-5<x<1\}$，因为 $A\cap B=(-1,n)$，所以 -1 是方程 $(x-m)(x-2)=0$ 的根，所以代入得 $3(1+m)=0$，所以 $m=-1$，此时不等式 $(x+1)(x-2)<0$ 的解为 $-1<x<2$，所以 $A\cap B=(-1,1)$，即 $n=1$.

【答案】 -1 1

例8 设 $a,b\in\mathbf{R}$，集合 $\{1,a+b,a\}=\left\{0,\dfrac{b}{a},b\right\}$，则 $b-a=$ ( )

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

【分析】 抓住特殊元素 0 和 1，问题将迎刃而解.

由 $\{1,a+b,a\}=\left\{0,\dfrac{b}{a},b\right\}$ 可知 $a\neq0$，所以有 $a+b=0$.

即有以下对应关系：① $\begin{cases}a+b=0\\\dfrac{b}{a}=a\\b=1\end{cases}$ 或② $\begin{cases}a+b=0\\b=a\\\dfrac{b}{a}=1\end{cases}$，

解①得 $\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$，符合题意；②无解. 所以 $b-a=2$，故选 C.

【答案】 C

例9 已知 $A=\{x|10+3x-x^2\geqslant0\}$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant2m-1\}$.

(1)求当 $A\cap B=\varnothing$ 时，m 的范围；

(2)求当 $B\subseteq A$ 时，m 的范围.

【解】 由已知得 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant5\}$.

(1)当 $B=\varnothing$ 时，$m+1>2m-1$，得 $m<2$；

当 $B\neq\varnothing$ 时，$\begin{cases}m+1\leqslant2m-1\\m+1>5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m+1\leqslant2m-1\\2m-1<-2\end{cases}$，得 $m>4$ 或 $m\in\varnothing$.

综上，m 的范围为 $(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$.

(2)当 $B=\varnothing$ 时，得 $m<2$；

当 $B\neq\varnothing$ 时，$\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1\\ m+1\geqslant -2\\ 2m-1\leqslant 5\end{cases}$，得 $2\leqslant m\leqslant 3$.

综上，$m\in(-\infty,3]$.

考点5 有限集元素的数目及有限集的子集

例10 设 P,Q 为两个非空数集，定义集合 $P+Q=\{a+b\mid a\in P,b\in Q\}$. 若 $P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是 ( )

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

【分析】 从 $P+Q$ 的元素形式入手，可以找到解题的突破口.

由题意知 a 的取值有 3 个，b 的取值有 3 个，所以 $a+b$ 有 9 种组合，其值分别为 1,2,6,3,4,8,6,7,11，根据集合中元素的互异性可得集合 $P+Q$ 中元素有 8 个，故选 B.

【答案】 B

方法总结

在元素数目不很多的情况下，列举法不失为一种好的选择.

例11 设集合 $S=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$，在 S 上定义运算 $\oplus$ 为：$A_i\oplus A_j=A_k$，其中 k 为 $i+j$ 被 4 除的余数，$i,j=0,1,2,3$. 则满足关系式 $(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$ 的 $x(x\in S)$ 的个数为 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【分析】 因为 $(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$，设 $x\oplus x=A_k$，所以 $A_k\oplus A_2=A_0$，$k=2$. 即 $x\oplus x=A_2$，故 $x=A_1$ 或 A_3，故选 B.

【答案】 B

奥赛对接

例1 已知集合 $A=\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R}\}$ 至多只有一个真子集，求 a 的取值范围.

【分析】 至多只有一个真子集的集合有两种情况：一是无真子集，二是有一个真子集，因此要注意分类讨论.

【解】 因为集合至多只有一个真子集，则集合 A 可能无真子集，可能有一个真子集，故分两种情况.

(1)当 A 无真子集时，$A=\varnothing$，故关于 x 的方程 $ax^2+2x+1=0$ 无实根.

所以 $a\neq0$，且 $\Delta=4-4a<0$，所以 $a>1$.

(2)当 A 只有一个真子集时，A 为单元素集，这时有两种情况：

①$a\neq0$ 时，$\Delta=4-4a=0$，所以 $a=1$；

②$a=0$ 时，原方程化为一次方程 $2x+1=0$，所以 $x=-\dfrac{1}{2}$.

所以当 $a=0$ 或 $a=1$ 时，A 为单元素集.

综合(1)(2)可得，当 A 至多只有一个真子集时，a 的取值范围是

$a\geqslant1$ 或 $a=0$.

方法总结

正确理解真子集概念，考虑 $\Delta\leqslant0$ 后，还必须考虑二次项系数为 0 的情况. 参数的求值问题根据不同的题目可能需要分类讨论，分类时需特别注意考虑问题要全面，尽量避免疏漏.

例2 已知集合 $S_n=\{X|X=(x_1,x_2,\cdots,x_i),x_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,n\}(n\geqslant2)$. 对于 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in S_n$，定义 A 与 B 的差为 $A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)$，$A$ 与 B 之间的距离为 $d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$.

(1)证明：$\forall A,B,C\in S_n$，有 $A-B\in S_n$，且 $d(A-C,B-C)=d(A,B)$；

(2)证明：$\forall A,B,C\in S_n$，$d(A,B)$，$d(A,C)$，$d(B,C)$ 三个数中至少有一个是偶数；

(3)设 $P\subseteq S_n$，P 中有 $m(m\geqslant2)$ 个元素，记 P 中所有两元素间距离的平均值为 $\overline{d}(P)$.

证明：$\overline{d}(P)\leqslant\dfrac{mn}{2(m-1)}$.

【证明】 (1)设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in S_n$.

因为 $a_i,b_i\in\{0,1\}$，所以 $|a_i-b_i|\in\{0,1\}(i=1,2,\cdots,n)$.

从而 $A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)\in S_n$.

又因为 $d(A-C,B-C)=\sum\limits_{i=1}^{n}||a_i-c_i|-|b_i-c_i||$.

由题意知 $a_i,b_i,c_i\in\{0,1\}(i=1,2,\cdots,n)$.

当 $c_i=0$ 时，$||a_i-c_i|-|b_i-c_i||=|a_i-b_i|$；

当 $c_i=1$ 时，$||a_i-c_i|-|b_i-c_i||=|(1-a_i)-(1-b_i)|=|a_i-b_i|$.

所以 $d(A-C,B-C)=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|=d(A,B)$.

(2)设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in S_n$，

$d(A,B)=k$，$d(A,C)=l$，$d(B,C)=h$.

记 $O=(0,0,\cdots,0)\in S_n$，由(1)可知

$d(A,B)=d(A-A,B-A)=d(O,B-A)=k$，

$d(A,C)=d(A-A,C-A)=d(O,C-A)=l$，

$d(B,C)=d(B-A,C-A)=h$.

所以 $|b_i-a_i|(i=1,2,\cdots,n)$ 中 1 的个数为 k，$|c_i-a_i|(i=1,2,\cdots,n)$ 中 1 的个数为 l.

设 t 是使 $|b_i-a_i|=|c_i-a_i|$ 成立的 i 的个数，则 $h=l+k-2i$.

由此可知，k,l,h 三个数不可能都是奇数，

即 $d(A,B)$，$d(A,C)$，$d(B,C)$ 三个数中至少有一个是偶数.

(3)$d(P)=\frac{1}{C_m^2}\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)$，其中 $\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)$ 表示 P 中所有两个元素间距离的总和.

设 P 中所有元素的第 i 个位置的数字中共有 t_i 个 1，$m-t_i$ 个 0，

则 $\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i(m-t_i)$.

由于 $t_i(m-t_i)\leqslant\frac{m^2}{4}(i=1,2,\cdots,n)$，

所以 $\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)\leqslant\frac{nm^2}{4}$.

从而 $\overline{d}(P)=\frac{1}{C_m^2}\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)\leqslant\frac{nm^2}{4C_m^2}=\frac{mn}{2(m-1)}$.

例 3 方程 $16\sin\pi x\cos\pi x=16x+\frac{1}{x}$ 的解的集合为________.

【分析】 这是一个超越方程，中学阶段无法正常解，可从等式两端的最值上取得突破.

当 $x>0$ 时，$16x+\frac{1}{x}\geqslant 8\left(x=\frac{1}{4}\text{取到等号}\right)$. 而 $16\sin\pi x\cos\pi x=8\sin 2\pi x\leqslant 8\left(x=\frac{1}{4}+k,k\in\mathbf{Z}\text{取到等号}\right)$. 于是有当 $x>0$ 时，方程只有一个解 $x=\frac{1}{4}$. 由

奇函数的性质，可知 $x=-\frac{1}{4}$ 是方程的另一解.

故方程的解的集合为 $\left\{\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right\}$.

【答案】 $\left\{\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right\}$

例4 称子集 $A\subseteq M=\{1,2,3,\cdots,11\}$ 是好的如果它有下述性质：如果 $2k\in A$，则 $2k\pm1\in A$，并且空集和 M 都是好的. 问 M 有多少个好子集？

【解】 设 $n(A)$ 为属于 A 的偶数的个数.

情形一：$n=0$. 我们只需确定 A 中的奇数. 在 M 中有 6 个奇数，对每个奇数有两种可能性，因此，有 2^6 个好子集 A 满足 $n(A)=0$.

情形二：$n=1$. 偶数的选取有 5 种可能. 对每一个选取，必须有 2 个奇数在 A 中，余下的奇数可以按 2^4 种方式来确定. 因此我们有 $5\times2^4=80$ 个好子集 A 满足 $n(A)=1$.

情形三：$n=2$.

(1)在好子集中的偶数是相邻的. 对两个相邻的偶数有 4 种选取，每种选取决定了 3 个奇数，允许 2^3 个选择，因此有 4×2^3 个好子集 A.

(2)A 中的两个偶数不相邻. 偶数有 $C_5^2-4=6$ 种选取方法，由于对每一选取方法，确定了 4 个奇数，有 2^2 个选择，因此这时的总数是 6×2^2 个.

综合(1)，(2)，满足 $n(A)=2$ 的好子集 A 的个数是 56.

情形四：$n=3$.

(1)A 中的偶数是相邻的. 这给出 3 种可能性，每个确定了 4 个奇数而允许有 2^2 种选择. 因此有 3×2^2 个这样的好子集.

(2)A 中的任意两个偶数都不相邻. 这只对偶数 2，6，10 给出 1 种选择. 因此，$A=\{1,2,3,5,6,7,9,10,11\}$ 是唯一的选择.

(3)A 的 3 个偶数中恰好有两个是相邻的. 偶数有 $C_5^2-4=6$ 种选择方法，对每一个选择方法，有 5 个奇数是固定的，这允许 2 种选择，因此有 $6\times2=12$ 个好子集.

于是有 $3\times2^2+1+12=25$ 个好子集 A 能满足 $n(A)=3$.

情形五：$n=4$.

(1)$2\notin A$ 或 $10\notin A$. 偶数给出了 2 种可能性，而且每个只对 1 个奇数允许一种选择，一共有 4 个好集合.

(2)$2\in A$ 且 $10\in A$. 对不是 A 中的偶数有 3 种选择，对每一选择，奇数都

在 A 中,这给出了 3 个好集合.

因此,有 $4+3=7$ 个好子集 A 能满足 $n(A)=4$.

情形六:$n=5,A=M$,只有 1 种可能性.

综合六种情形可得,好子集的总数是 $2^6+5\times2^4+56+25+7+1=233$.

小试牛刀

一、选择题

1. 全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $M=\{1,2,3,4\}$,集合 $N=\left\{x\left|\,x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right.\right\}$,则 $M\cap(\complement_U N)$ 等于 ( )

A. $\{4\}$　　B. $\{3,4\}$

C. $\{2,3,4\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

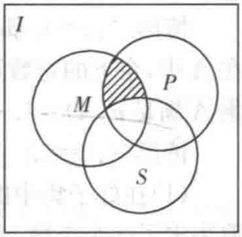

图 1-1

2. 如图 1-1 所示,I 是全集,M,P,S 是 I 的 3 个子集,则阴影部分所表示的集合是 ( )

A. $(M\cap P)\cap S$

B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap\complement_I S$

D. $(M\cap P)\cup\complement_I S$

3. 若 $M=\{(x,y)\mid|\tan\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$,$N=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant2\}$,则 $M\cap N$ 的元素的个数是 ( )

A. 4　　B. 5　　C. 8　　D. 9

4. 集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l$,其中 $m,n,l\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{u\mid u=20p+16q+12r$,其中 $p,q,r\in\mathbf{Z}\}$的关系为 ( )

A. $M=N$　　B. $M\not\subseteq N,N\not\subseteq M$

C. $M\subsetneq N$　　D. $M\supsetneq N$

5. 设 $S=\{(x,y)\mid x^2-y^2=$ 奇数$,x,y\in\mathbf{R}\}$,$T=\{(x,y)\mid\sin(2\pi x^2)-\sin(2\pi y^2)=\cos(2\pi x^2)-\cos(2\pi y^2),x,y\in\mathbf{R}\}$. 则 ( )

A. $S\subsetneq T$　　B. $T\subsetneq S$

C. $S=T$　　D. $S\cap T=\varnothing$

二、填空题

6. 当一个非空数集 F 满足条件"如果 $a,b\in F$,并且当 $b\neq0$ 时,$\frac{a}{b}\in F$"

时，我们就称 F 为一个数域．以下四个关于数域的命题：①0 是任何数域的元素；②若数域 F 中有非零元素，则 $2011\in F$；③集合 $P=\{x\mid x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$ 是一个数域；④有理数集是一个数域．其中正确命题的序号为________．

7. 设集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$ 共有 k 个子集，记子集 A_i 的元素之和为 $S_i(i=1,2,\cdots,k)$，则 $S_1+S_2+\cdots+S_k=$________．

三、解答题

8. 已知全集 $U=\{2,0,3-a^2\}$，子集 $P=\{2,a^2-a-2\}$，且 $\complement_U P=\{-1\}$，求实数 a 的值．

9. 已知集合 $A=\{2,4,a^2-2a+3\}$，集合 $B=\{a+1,a^2-4a+2,a^2-3a+4,a^2-5a+3\}$，若 $A\cap B=\{2,3\}$，求 $A\cup B$．

10. 已知元素 $(1,2)\in A\cap B$，这里集合 $A=\{(x,y)\mid ax-y^2+b=0\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2-ay-b=0\}$．求 a,b 的值．

11. 在全国数学竞赛中只有三道题．已知：① 某校 25 个学生参加竞赛，每个学生至少解出一道题；② 在所有没有解出第一题的学生中，解出第二题的人数是解出第三题人数的 2 倍；③ 只解出第一题的学生比余下的学生中解出第一题的人数多 1；④ 只解出一道题的学生中，有一半没有解出第一题．问共有多少学生只解出第二题？

12. 数集 A 满足条件：若 $a\in A$，则有 $\dfrac{1+a}{1-a}\in A(a\neq 1)$．

(1)已知 $2\in A$，求证：在 A 中必定还有另外三个数，并求出这三个数；

(2)若 $a\in\mathbf{R}$，求证：A 不可能是单元素集合．

13. 设 $A=\{(x,y)\mid y^2-x-1=0\}$，$B=\{(x,y)\mid 4x^2+2x-2y+5=0\}$，$C=\{(x,y)\mid y=kx+b\}$，是否存在 $k,b\in\mathbf{N}$，使得 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$？并证明你的结论．

14. 设集合 $P_n=\{1,2,\cdots,n\}$，$n\in\mathbf{N}^*$．记 $f(n)$ 为同时满足下列条件的集合 A 的个数：

①$A\subseteq P_n$；②若 $x\in A$，则 $2x\notin A$；③若 $x\in\complement_{P_n}A$，则 $2x\notin\complement_{P_n}A$．

(1)求 $f(4)$；

(2)求 $f(n)$ 的解析式（用 n 表示）．

第 2 章　函数初步

第 1 节　函数及其表示

考点对接

1. 映射的概念

设 A,B 是两个集合,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中的任何一个元素,在集合 B 中都有唯一的元素和它对应,那么这样的对应(包括集合 A,B 以及 A 到 B 对应法则 f)叫做集合 A 到集合 B 的映射,记作 $f:A\rightarrow B$.

给定一个集合 A 到集合 B 的映射,且 $a\in A,b\in B$,如果元素 a 与元素 b 对应,那么我们把元素 b 叫做元素 a 的象,元素 a 叫做元素 b 的原象.

2. 映射的特点

(1)映射 $f:A\rightarrow B$ 是非空集合 A 到非空集合 B 的特殊对应,集合 A,B 及对应法则 f 称作映射的三要素.

(2)映射中的两个集合 A,B 可以是数集、点集或其他集合.

(3)映射是有方向性的,$f:A\rightarrow B$ 与 $f:B\rightarrow A$ 一般是不相同的.

(4)映射 $f:A\rightarrow B$ 中,集合 A 中的任一元素在集合 B 中一定有唯一的象,而集合 B 中元素在 A 中可以没有原象,可以有一个原象,也可以有多个原象.即映射 $f:A\rightarrow B$ 中的对应法则可以是“多对一”“一对一”,而不能是“一对多”.若记集合 A 中的所有元素的象组成集合 C,则有 $C\subseteq B$.

3. 一一映射

一般地,设 A,B 是两个集合,$f:A\rightarrow B$ 是集合 A 到集合 B 的映射,如果在这个映射下,满足:① 对于集合 A 中的不同元素,在集合 B 中有不同的象;② B 中每一个元素都有原象.那么这个映射叫做 A 到 B 上的一一映射.

一一映射是一种特殊的映射.