普通高等教育农业部“十二五”规划教材

全国高等农林院校“十二五”规划教材

高等数学学习指导与习题解析

下册

第二版

贺志民 王家军 徐光辉◎主编

中国农业出版社

普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

高等数学学习指导与习题解析

下册

第二版

贺志民　王家军　徐光辉　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导与习题解析．下册/贺志民，王家军，徐光辉主编．—2版．—北京：中国农业出版社，2013.8

普通高等教育农业部“十二五”规划教材　全国高等农林院校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-109-17993-6

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①贺…　②王…　③徐…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第146029号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路2号）

（邮政编码 100125）

策划编辑　朱　雷　魏明龙

文字编辑　魏明龙

北京中新　店北京发行所发行

月第2版

次印刷

印张：17.75

内 容 简 介

本教材是普通高等教育农业部“十二五”规划教材《高等数学下册》(第二版)(叶彩儿、王家军主编)的学习辅导书，针对原教材的各个章节依序编写而成．内容包括各章节的学习要求、内容提要及解难释疑、解题方法与典型例题解析等指导性材料，并给出了各章节练习题、测试题的参考解答等辅助性材料．为学生学习本课程提供方便．

本教材分为上、下两册．下册内容包括空间解析几何与向量代数初步、多元函数微分学、重积分、曲线与曲面积分、无穷级数等内容．

第二版编写人员名单

主　编　贺志民　王家军　徐光辉
副主编　张居丽　顾庆凤　王胜奎　张立溥
参　编　方惠兰　夏慧珠　胡海龙

第一版编写人员名单

主　编　王家军　徐光辉

副主编　方惠兰　王胜奎　张立溥

编　委　顾庆风　贺志民

第二版前言

本教材由王家军、徐光辉主编的全国高等农林院校“十一五”规划教材《高等数学学习指导与习题解析》修订而成．在使用4年并广泛征求意见的基础上，主要做了如下改动：

1．为配合教材修订更贴近中学数学课改实际的需要，增加了有关内容的学习指导．

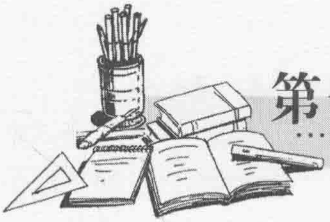
2．对相应章节的习题修改，进行相应的解题指导与解析．

3．对原版中的错漏进行了订正，重写了某些叙述文字．

书中错误或不足之处在所难免，敬请读者或同行批评指正．

编　者

2013年5月于杭州



第一版前言

本教材是全国高等农林院校“十一五”规划教材《高等数学》下册(王家军主编)的配套参考书．针对原教材中各个章节的内容，编写了学习要求、学习指导(解难释疑)、解题方法与典型例题解析等指导性材料，旨在为初学者深刻理解数学知识、全面掌握数学方法提供适时帮助．

考虑到高等数学课程可能出现的学习困难，特别是初入校的大学生学习负担较重的现象，本教材对原教材中的全部练习题给出了参考解答．同时，照顾到不同学习基础、不同学习追求者的学习需要，每章末安排了测试题并附有参考解答(其中某些题目，以及每章总练习的一些题目已接近考研水准)，供学有余力的同学作为探究性学习的练习题材．当然必须指出，所有习题的参考解答，只能作为读者自行练习后自我检测的参考依据，以免影响学习效果．

编　者

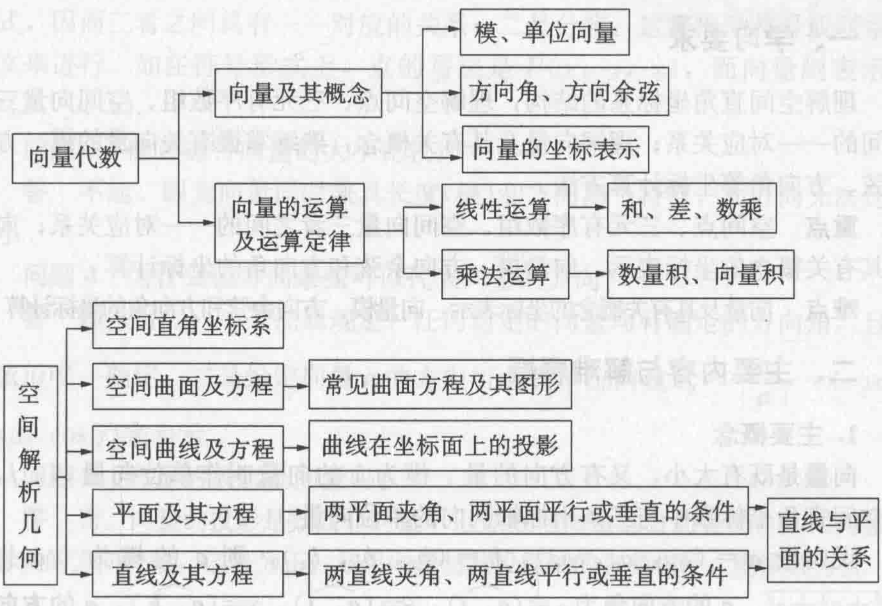
2009 年 11 月

目 录

第八章　空间解析几何与向量代数初步

在中学已经知道，平面解析几何是通过建立平面直角坐标系，用代数方法来研究平面几何问题的数学学科．而空间解析几何则要建立空间坐标系，用代数方法研究立体几何问题．这不仅是对中学数学知识的提高，也是学习多元函数微积分的必要基础(正如前面我们学习一元函数微积分时所体会到的那样)．

一、知识框图



二、学习要求

了解空间直角坐标系的有关内容；理解向量及其有关概念，能熟练进行向量运算；理解曲面与方程的概念，了解常用二次曲面的方程及其图形；会求以坐标轴为旋转轴的各种旋转曲面，以及母线平行于坐标轴的柱面方程；熟练掌握平面的点法式方程、一般式方程等常用形式及其求法；能够判别空间点、直

线、平面及其相互位置关系；熟练掌握常用直线方程的求取方法．

三、学习指导

有关向量运算的概念与方法，可以结合其几何意义予以理解；两向量垂直和平行的充要条件，不仅是理解直线、平面及其相互关系的关键，也往往是求直线方程、平面方程所需要的基本条件．

对照平面解析几何的有关知识来理解本章内容，是非常重要和有效的学习方法．虽然某些空间图形难以描绘，但结合该立体在每个坐标面上的投影，即可综合想象其大致形状．特别地，自觉培养空间图形的想象能力，不仅是学习多元函数积分学的需要，也是数学训练十分重要的目的之一！

第 1 节　空间直角坐标系和向量代数

一、学习要求

理解空间直角坐标系的结构，理解空间点、三元有序数组、空间向量三者之间的一一对应关系；理解向量及其有关概念，熟练掌握有关向量的模、方向余弦、方向角等坐标计算方法．

重点　空间点、三元有序数组、空间向量三者之间的一一对应关系；向量及其有关概念的坐标表示，向量模、方向余弦和方向角的坐标计算．

难点　向量及其有关概念的坐标表示，向量模、方向余弦和方向角的坐标计算．

二、主要内容与解难释疑

1. 主要概念

向量是既有大小，又有方向的量．模为 1 的向量叫作**单位向量**．$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是空间直角坐标系中与三条坐标轴同向的单位向量．

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$，则 $\boldsymbol{a}$ 的**模**为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$，$\boldsymbol{a}$ 的**方向角**为 $\alpha=(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{i}})$，$\beta=(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{j}})$，$\gamma=(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{k}})$，$\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\ \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{(a_x,\ a_y,\ a_z)}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma).$$

向量的加、减及数乘运算，分别定义为

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,\ a_y\pm b_y,\ a_z\pm b_z),$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z),\ \lambda\text{ 为非零常数}.$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的**投影**，记为 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$，其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角．

2. 解难释疑

问题 1　空间直角坐标系只有“右手系”一种形式吗？

答　否，右手系只是习惯采取的一种空间直角坐标形式．在实际问题的讨论中，根据物体的位置或形状，往往需要灵活选用适当的坐标系(如左手系)，这对简化问题和寻求其他解决方法是十分必要的．

问题 2　如何理解空间点、三元有序数组、空间向量三者之间的一一对应关系？实际中又如何分辨？

答　一是理解：在空间直角坐标系中，点或向量均可写成三元有序数组的形式，因而三者之间具有一一对应的关系；二是分辨：这需借助符号或联系上下文来进行．如在符号形式上，点的写法是 $P(x,\ y,\ z)$，而向量则表示为 $\boldsymbol{r}=(x,\ y,\ z)$.

问题 3　能否进行向量的大小比较？

答　不能．因为向量同时兼具长度(模)和方向两个特征，而方向无法比较大小．

问题 4　为什么说方向余弦可以代表向量的方向？

答　理由有二：一是按照规定，任何给定的向量均有确定的方向角，且其余弦值唯一确定；二是给定向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向可由其单位向量 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$来表示．

问题 5　向量的投影是向量吗？

答　否，向量的投影是数而非向量．但该数与向量的方向有关：如果向量与投影轴的方向一致，该数为正；如果向量与其投影轴的方向相反，则该数为负.

三、解题方法与例题解析

运用坐标进行向量的有关运算，必须遵守相关的运算律和规则，其主要题型有：求向量的模、方向角、方向余弦，以及加减、数乘运算等．

例 1　已知点 $A(3,\ -1,\ 2)$，$B(1,\ 2,\ -4)$，$C(-1,\ 1,\ 2)$，试求点 D，使得以 A，B，C，D 为顶点的四边形是平行四边形．

解　若所求顶点与 A 相对，依题意：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. 令 $D=(x,\ y,\ z)$，即

$(x-3,\ y+1,\ z-2)=(-2,\ 3,\ -6)+(-4,\ 2,\ 0)=(-6,\ 5,\ -6)$，
于是 $x-3=-6$，$y+1=5$，$z-2=-6$，得

$$x=-3,\ y=4,\ z=-4,$$

即所求顶点的坐标为$(-3,\ 4,\ -4)$.

附注　对给定三点，可以作出不同位置的三种平行四边形．在其余两种形式下，同上可得 D 的坐标分别为$(1,\ -2,\ 8)$和$(5,\ 0,\ -4)$.

例 2　某向量的终点为 $B(2,\ -1,\ 7)$，且在 x，y，z 轴上的投影依次为 4，-4，7，求此向量的始点坐标、方向余弦和方向角．

解　设始点 A 的坐标为$(x,\ y,\ z)$，则由题意

$$2-x=4,\ -1-y=-4,\ 7-z=7,$$

可得
$$(x,\ y,\ z)=(-2,\ 3,\ 0),$$

所以$\overrightarrow{AB}=(4,\ -4,\ 7)$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4^2+(-4)^2+7^2}=9$，$e_{\overrightarrow{AB}}=\frac{1}{9}(4,\ -4,\ 7)$，从而所求方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{4}{9},\ \cos\beta=-\frac{4}{9},\ \cos\gamma=\frac{7}{9};$$

所求方向角为

$$\alpha=\arccos\frac{4}{9},\ \beta=\arccos\left(-\frac{4}{9}\right),\ \gamma=\arccos\frac{7}{9}.$$

例 3　设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 xOy，yOz，zOx 三坐标面所成的角分别为 α_1，α_2，α_3，$\left(0\leqslant\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，求$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3$.

解　设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$，则有 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

记向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x，y，z 轴所成的角分别为 α，β，γ，由题意：α_1 与 γ，α_2 与 α，α_3 与 β 均互为余角．从而

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3&=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\\&=3-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=2.\end{aligned}$$

注意　此题求解主要利用了向量方向余弦的性质、向量的方向角及其与坐标垂直的关系．

习题 8-1 参考解答

思考题

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点所在的卦限：

解　$A(1,-2,3)$在第Ⅳ卦限；$B(3,1,-5)$在第Ⅴ卦限；$C(2,-3,-4)$在第Ⅷ卦限；$D(-1,4,5)$在第Ⅱ卦限．

2. **解**　(1) 点$M(4,-3,2)$关于xOy面的对称点为$(4,-3,-2)$，关于yOz面的对称点为$(-4,-3,2)$，关于zOx面的对称点为$(4,3,2)$；

(2) 点$M(4,-3,2)$关于x轴的对称点为$(4,3,-2)$，关于y轴的对称点为$(-4,-3,-2)$，关于z轴的对称点为$(-4,3,2)$；

(3) 点$M(4,-3,2)$关于坐标原点的对称点为$M(-4,3,-2)$.

3. 当点M的坐标(x,y,z)分别满足下列条件时，点M的位置如何？

解　(1) $x=0$，$y=0$表示点M在z轴上；

(2) $x=a$表示点M在过点$(a,0,0)$且垂直于x轴的平面上；

(3) $x=a$，$y=b$表示点M在过点$(a,b,0)$，且平行于z轴的直线上；

(4) $x^2+y^2+z^2=1$表示点M在以原点为球心的单位球面上．

4. **解**　由$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，验证可知：只有(1)可以作为一个向量的方向余弦．

5. 设向量的方向余弦分别满足：(1) $\cos\alpha=0$，(2) $\cos\beta=1$，(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$，问这些向量与坐标面或坐标轴的关系如何？

解　(1) $\cos\alpha=0$表示向量垂直于x轴，即平行于yOz平面；

(2) $\cos\beta=1$表示向量方向与y轴的正向一致，即垂直于zOx平面；

(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$表示向量平行于z轴，即垂直于xOy平面．

练习题

1. 某向量的坐标依次为4、-4、7，终点为$B(2,-1,7)$，求它的始点A的坐标．

解　由于$\overrightarrow{AB}=(4,-4,7)=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，所以

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AB}=(2,-1,7)-(4,-4,7)=(-2,3,0).$$

2. 设$\boldsymbol{a}=(3,-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,-1)$，求：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；　(2) $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$；　(3) $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}|$.

解　(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,-1,2)+(1,2,-1)=(4,1,1)$；

(2) $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=3(3,-1,2)-2(1,2,-1)=(7,-7,8)$；

(3) 由于$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{14}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$，所以

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}|&=\sqrt{14}(1,2,-1)-\sqrt{6}(3,-1,2)\\&=(\sqrt{14}-3\sqrt{6},2\sqrt{14}+\sqrt{6},-\sqrt{14}-2\sqrt{6}).\end{aligned}$$

3. 设$A(1,-1,2)$，$B(1,1,0)$，$C(-1,4,2)$，求$\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{CA}$.

解 $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{CA}=(0,\ 2,\ -2)+3(-2,\ 3,\ 2)-4(2,\ -5,\ 0)$

$=(-14,\ 31,\ 4).$

4. 求与向量 $\boldsymbol{a}=(3,\ -1,\ 2)$ 同方向的单位向量.

解 因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{14}$，所以

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,\ -1,\ 2)=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\ -\frac{1}{\sqrt{14}},\ \frac{2}{\sqrt{14}}\right).$$

5. 已知两点 $A(4,\ \sqrt{2},\ 1)$ 和 $B(3,\ 0,\ 2)$，计算向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 由于 $\overrightarrow{AB}=(3,\ 0,\ 2)-(4,\ \sqrt{2},\ 1)=(-1,\ -\sqrt{2},\ 1)$，所以

$$|\overrightarrow{AB}|=2,\ \boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}}=\frac{(-1,\ -\sqrt{2},\ 1)}{2}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}\right),$$

从而 $$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\ \cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\gamma=\frac{1}{2},$$

所以 $$\alpha=\frac{2\pi}{3},\ \beta=\frac{3\pi}{4},\ \gamma=\frac{\pi}{3}.$$

6. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦 $\cos\beta=\frac{2}{3}$，$\cos\gamma=\frac{2}{3}$，$|\boldsymbol{a}|=3$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

解 因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，$\cos\beta=\frac{2}{3}$，$\cos\gamma=\frac{2}{3}$，

所以 $\cos\alpha=\pm\frac{1}{3}$，从而

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{e}_a=3\left(\pm\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)=(\pm1,\ 2,\ 2).$$

7. 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度为 6，方向余弦为 $-\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，点 A 的坐标为 $(3,\ 0,\ 4)$，求点 B 的坐标.

解 因为 $\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\,\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}}=6\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)=(-4,\ 2,\ 4)$，

所以 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=(-4,\ 2,\ 4)+(3,\ 0,\ 4)=(-1,\ 2,\ 8).$

8. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模为 4，它与 u 轴的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影.

解 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cos\varphi=4\cdot\cos\frac{\pi}{3}=2.$

9. 已知点 $A(2,\ -1,\ 3)$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点，向量 $\boldsymbol{b}=(-3,\ 4,\ 7)$ 和 $\boldsymbol{c}=$

$(0, 0, 5)$与 $\boldsymbol{a}$ 满足 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点 B 及 $\boldsymbol{a}$ 在各坐标轴上的投影.

解 因为 $\boldsymbol{b}=(-3, 4, 7)$，$\boldsymbol{c}=(0, 0, 5)$，所以

$$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}=3(-3, 4, 7)-2(0, 0, 5)=(-9, 12, 11),$$

于是 $\boldsymbol{a}$ 在 x，y，z 坐标轴上的投影分别为：-9，12，11；

又 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}-\boldsymbol{a}=(2, -1, 3)-(-9, 12, 11)=(11, -13, -8)$，

故 $\boldsymbol{a}$ 的起点 B 的坐标为$(11, -13, -8)$.

10. 求与向量 $\boldsymbol{r}=(16, -15, 12)$平行、方向相反，且长度为 75 的向量.

解 由于 $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{16^2+(-15)^2+12^2}=25$，故所求向量为

$$75\,\frac{(-\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}|}=-3(16, -15, 12)=(-48, 45, -36).$$

11. 点 M 的向径与 x 轴成 45°角，与 y 轴成 60°角，其长度为 6 个单位，若其在 z 轴上的坐标为负值，求点 M 的坐标.

解 因为 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\beta=\dfrac{1}{2}$，所以 $\cos\gamma=\pm\dfrac{1}{2}$.

由题设，该向量在 z 轴上的坐标为负值，故取 $\cos\gamma=-\dfrac{1}{2}$，由此得向径

$$\overrightarrow{OM}=6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)=(3\sqrt{2}, 3, -3),$$

从而点 M 的坐标为$(3\sqrt{2}, 3, -3)$.

12. 在$\triangle ABC$ 中，已知点 $A(1, -2, 3)$，$B(-2, -2, 7)$，$C(6, -4, -11)$，从点 A 出发的中线交 BC 于 D，求与$\overrightarrow{AD}$同方向的单位向量.

解 由于$\overrightarrow{AC}=(6, -4, -11)-(1, -2, 3)=(5, -2, -14)$，$\overrightarrow{AB}=(-2, -2, 7)-(1, -2, 3)=(-3, 0, 4)$，根据中线定义，有

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(2, -2, -10)=(1, -1, -5),\ |\overrightarrow{AD}|=3\sqrt{3},$$

于是与$\overrightarrow{AD}$同方向的单位向量

$$\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AD}}=\left(\frac{\sqrt{3}}{9}, -\frac{\sqrt{3}}{9}, -\frac{5\sqrt{3}}{9}\right).$$

13. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角 α，β，γ 满足 $\alpha=\beta$，$\gamma=2\alpha$，求 $\boldsymbol{e}_a$.

解 因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，所以 $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$，

由此解得

$$\cos\alpha=\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\gamma=0 \text{ 或 } \cos\alpha=\cos\beta=0,\ \cos\gamma=-1,$$

所以
$$\boldsymbol{e}_a=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\text{或}(0, 0, -1).$$