



全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

高等数学 [理工类]

第三版

主 编 徐 兵

副主编 杨则燊 贺明峰 王 干

高等教育出版社

全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

高等数学 [理工类]

第三版

主 编 徐 兵

副主编 杨则燊 贺明峰 王 千

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是全国教育科学“十一五”规划课题研究成果之一。

本次修订保留前两版的特色,不改变结构和难度。作者对全书的文字进行了仔细的推敲,使本书更加严密、精练;部分章节增补了例题与习题,特别是在习题(B)部分增加了近 80 道题目;为满足部分专业的要求,增加了 8.11 节作为选学内容。

本书主要内容有:函数、极限与连续,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数,常微分方程初步。书中每节配有(A)(B)两套习题,并附有部分习题答案。

本次修订配备了数字课程,与纸质教材一体化设计。数字课程包含每章自测、每章典型选择题及分析、期末考试试卷及参考答案、部分习题答案、选择题的主要类型与常见解法范例及部分选学内容,可以满足不同层次读者的需求。读者可登录数字课程网站查看。

本书可作为独立学院理工类专业的大学数学教材,也可供有关人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:理工类/徐兵主编. --3版. --北京:
高等教育出版社,2018.10

ISBN 978-7-04-050460-6

I. ①高… II. ①徐… III. ①高等数学-高等学校-
教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 203172 号

策划编辑 贾翠萍 责任编辑 贾翠萍 封面设计 张志 版式设计 马敬茹
插图绘制 于博 责任校对 高歌 责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京中科印刷有限公司
开 本 787mm × 1092mm 1/16
印 张 26.5
字 数 640 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 2008 年 6 月第 1 版
2018 年 10 月第 3 版
印 次 2018 年 10 月第 1 次印刷
定 价 56.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 50460-00

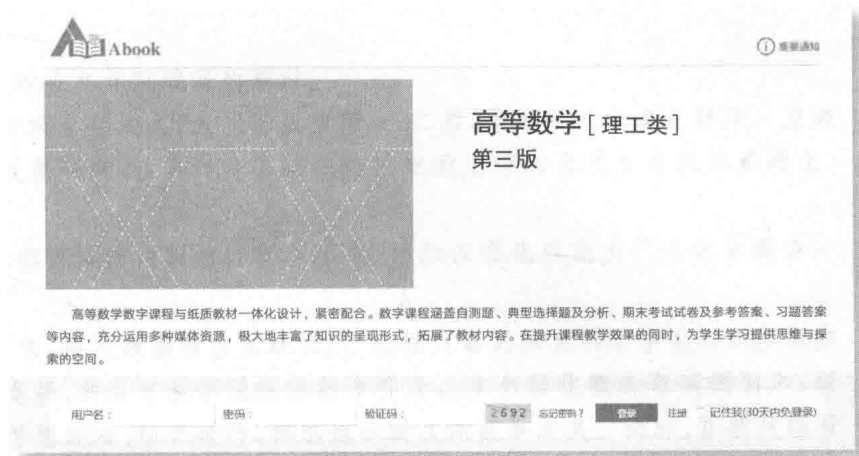
高等数学 [理工类]

第三版

主 编 徐 兵

副主编 杨则燊 贺明峰 王千

- 1 计算机访问<http://abook.hep.com.cn/1240537>, 或手机扫描二维码、下载并安装 Abook 应用。
- 2 注册并登录, 进入“我的课程”。
- 3 输入封底数字课程账号 (20 位密码, 刮开涂层可见), 或通过 Abook 应用扫描封底数字课程账号二维码, 完成课程绑定。
- 4 单击“进入课程”按钮, 开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制, 部分内容无法在手机端显示, 请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题, 请发邮件至 abook@hep.com.cn。



<http://abook.hep.com.cn/1240537>

前 言

本书是为培养应用型人才的独立学院编写的教材。

本书自 2008 年出版以来历经十年之久,先后出版了第一、二版,受到了广大读者好评。为满足新的教学形势的需求,经过反复研究、认真讨论并在充分吸取使用者的意见和建议的基础上,决定编写本书第三版。

第三版总的原则与方向仍然秉承前两版的特色和优点,并加以强化以期为广大读者提供一本优质的、适用的教材。

依据培养应用型人才的要求,第三版教材在系统性、严密性方面更加有利于学生知识与能力的增长,有利于学生的可持续发展,并尽可能体现新的教学理念。本书强化概念与实例引入,强化直观解说,强调解决问题的思想方法,弱化技巧、构造性证明及纯数学定义。同时,在教材编写中,注意解决系统性与适用性的关系,逻辑性与简洁性的关系,传统与潮流的关系,数学语言与通俗表述的关系。

第三版相对于第二版结构不变、难度不变。有些内容的表述则更加严密、精练,部分章节增补了若干个例题与习题。习题则保持与前两版相同,仍然分为(A)(B)两部分。这些题大致分为两类:一类属于比较基本的题,难度较小;另一类属于综合性的题,难度较大。本书的例题和习题均有一部分选自历年的全国硕士研究生入学统一考试试题,难度系数基本保持在 0.4 ~ 0.8,既能让学生开阔视野,扩展深入学习的空间,也能为教师选题提供方便,从而使本书能较好地适应多元化教学的要求。

本次修订,为了满足部分专业的需求,增加了 8.11 节作为选学内容。同时,配备了数字资源。除了把 8.11 节与习题答案做成数字资源外,还特别整理了编者所在的几所学校近三年来的期末考试试卷及参考答案,为学生考前复习提供学习资料。特别是,每章除了配备自测题,方便学生及时检测学习效果外,还配备了典型选择题及分析,其中有 200 余题提供了详细讲解,并给出 100 余题供读者自己练习。题目部分选自历年的全国硕士研究生入学统一考试数学试题,助力于有志于考研的学生。同时,配备了常见的选择题的主要类型及常见解法范例的介绍,使学生深入了解选择题答题技巧。读者可以登录数字课程网站查看使用本书配套的数字资源。

第三版系列教材由天津大学仁爱学院、南开大学滨海学院、北京航空航天大学北海学院、吉林建筑大学城建学院、大连理工大学城市学院联合修订。

本书由北京航空大学徐兵担任主编负责统稿,杨凤翔负责第一章,郭强辉负责第二章,徐兵

II 前 言

负责第三、六章,贺明峰负责第四章,王千负责第五章,杨则燊负责第七章,曾绍标负责第八章,邱忠文负责第九章,李茂林负责第十章。同时,本书修订还得到了赵凯芳、杨晓叶、白建侠、宋一杰、郑庆云的帮助和支持,在此深表谢意!

本书难免有欠妥之处,衷心希望读者指正!

编 者

2017年12月于北京

目 录



第一章 函数、极限与连续	1
第一节 函数及其特性	1
习题 1-1	5
第二节 初等函数	5
习题 1-2	9
第三节 数列的极限	10
习题 1-3	12
第四节 函数的极限	13
习题 1-4	17
第五节 极限的运算法则	17
习题 1-5	21
第六节 极限存在准则,两个重要极限	22
习题 1-6	26
第七节 无穷小量的比较	27
习题 1-7	28
第八节 函数的连续性	29
习题 1-8	34
第二章 导数与微分	36
第一节 导数的概念	36
习题 2-1	41
第二节 求导法则和基本公式	43
习题 2-2	49
第三节 隐函数与由参数方程确定的函数的求导法则	50
习题 2-3	53
第四节 高阶导数	54




II 目 录

习题 2-4	56
第五节 微分	57
习题 2-5	62
第三章 微分中值定理与导数的应用	64
第一节 微分中值定理	64
习题 3-1	72
第二节 洛必达法则	73
习题 3-2	81
第三节 函数的单调性	82
习题 3-3	86
第四节 函数的极值与最值问题	87
习题 3-4	93
第五节 曲线的凹凸性	94
习题 3-5	97
第六节 函数的作图	99
习题 3-6	105
第七节 曲率	106
习题 3-7	109
第四章 不定积分	110
第一节 不定积分的概念与性质	110
习题 4-1	116
第二节 换元积分法	117
习题 4-2	124
第三节 分部积分法	125
习题 4-3	129
第五章 定积分及其应用	131
第一节 定积分的概念	131
习题 5-1	136
第二节 定积分的性质、中值定理	136
习题 5-2	139
第三节 微积分基本公式	140
习题 5-3	145

第四节 定积分的换元积分法	149
习题 5-4	152
第五节 定积分的分部积分法	154
习题 5-5	155
第六节 定积分的应用	157
习题 5-6	165
第七节 反常积分	167
习题 5-7	170
第六章 空间解析几何	172
第一节 空间直角坐标系	172
习题 6-1	176
第二节 向量的概念与向量的代数表示	177
习题 6-2	182
第三节 向量的数量积与向量积	182
习题 6-3	187
第四节 平面方程	188
习题 6-4	192
第五节 空间直线方程	193
习题 6-5	199
第六节 两类特殊曲面方程及特殊曲线方程	200
习题 6-6	204
第七节 常见的二次曲面	204
习题 6-7	209
第七章 多元函数微分学	210
第一节 多元函数、极限与连续性	210
习题 7-1	216
第二节 偏导数	217
习题 7-2	221
第三节 全微分	223
习题 7-3	226
第四节 多元复合函数的微分法	227
习题 7-4	232
第五节 隐函数的微分法	234
习题 7-5	236

IV 目 录

第六节 方向导数与梯度	237
习题 7-6	240
第七节 多元函数微分学的几何应用	241
习题 7-7	246
第八节 多元函数的极值与最值	246
习题 7-8	254
第八章 多元函数积分学	256
第一节 二重积分的概念与性质	256
习题 8-1	259
第二节 二重积分的计算	260
习题 8-2	268
第三节 三重积分的概念及计算	271
习题 8-3	280
第四节 重积分的应用	281
习题 8-4	285
第五节 第一类曲线积分	286
习题 8-5	290
第六节 第一类曲面积分	291
习题 8-6	293
第七节 第二类曲线积分	294
习题 8-7	300
第八节 格林公式及其应用	301
习题 8-8	307
第九节 第二类曲面积分	309
习题 8-9	315
第十节 高斯公式及其应用	315
习题 8-10	318
*第十一节 梯度、散度与旋度 	320
习题 8-11 	320
第九章 无穷级数	321
第一节 数项级数的基本概念与性质	321
习题 9-1	326
第二节 正项级数敛散性的判别法	327
习题 9-2	333

第三节 交错级数	334
习题 9-3	338
第四节 幂级数的收敛域	339
习题 9-4	347
第五节 函数展开为幂级数	348
习题 9-5	355
第六节 周期函数的傅里叶级数	356
习题 9-6	364
第七节 有限区间上函数的傅里叶级数	364
习题 9-7	369
第十章 常微分方程初步	371
第一节 微分方程概述	371
习题 10-1	376
第二节 几种常见的一阶微分方程	377
习题 10-2	383
第三节 可降阶的高阶微分方程	385
习题 10-3	389
第四节 常系数线性微分方程	389
习题 10-4	396
第五节 微分方程应用举例	398
习题 10-5	401
附录 1 简单不定积分表	403
附录 2 二阶、三阶行列式简介	407
附录 3 部分习题答案 	410
附录 4 选择题的主要类型与常见解法范例 	410
附录 5 期末考试试卷及参考答案 	410

第一章 函数、极限与连续

函数关系就是变量之间的关系,也是高等数学中重要的概念与研究对象.极限方法是研究变量的有效工具,连续是函数的主要性质之一.本章将在复习中学教材中有关函数内容的基础上,进一步研究函数、极限与连续等概念及一些性质.

第一节 函数及其特性

一、点集与邻域

本书总是在实数集 \mathbf{R} 上讨论问题,实数与数轴上的点可以形成一一对应关系,因此数集又称为点集.

区间是实数集 \mathbf{R} 中的常用的一类子集.包括:

闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$;

开区间 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$;

半开区间 $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$, $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$;

无穷区间 $(a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\}$, $[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x < +\infty\}$, $(-\infty, a) = \{x \mid -\infty < x < a\}$, $(-\infty, a] = \{x \mid -\infty < x \leq a\}$, $(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ (实数集 \mathbf{R}).

上述区间中的 a, b 分别称为区间的左端点与右端点.

邻域也是高等数学中常用的概念.以 a 为中心的任何开区间都称为点 a 的邻域.设 δ 为任一正数,则开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a, \delta)$.点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径,因此

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}.$$

而实数集 $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 为在点 a 的 δ 邻域内去掉中心点 a 的实数集,它由两个区间 $(a -$

$\delta, a)$ 与 $(a, a + \delta)$ 组成, 常称之为点 a 的去心邻域, 记为 $\dot{U}(a, \delta)$.

如果不需要指明邻域的半径, 上述邻域可分别写为 $U(a)$ 与 $\dot{U}(a)$.

二、函数的概念

在自然现象和科学技术中常常会遇到各种各样的量, 有的量在某过程中保持一定的数值, 称其为常量, 通常用 a, b, c, \dots 表示; 有的量在某过程中发生变化, 称其为变量, 通常用字母 x, y, z, \dots 表示.

例如从北京出发到天津的城际列车, 在旅客登车的过程中, 列车与天津站的距离为常量, 列车上乘客的数量为变量. 而在列车行驶的过程中, 列车与天津站的距离为变量, 列车上乘客的数量为常量. 这表明变量与常量是相对于某一过程而言.

下面先给出几个关于两个变量之间关系的例子:

例 1 某城市作了多次人口普查, 统计如下:

年度	1998	2000	2002	2004	2008
人口/万	120	122	125	148	150

由统计表可以看出该城市所在普查年度与人口的关系.

例 2 根据某城市一气象站的温度自动记录仪记录下的数据, 画出了某天该地区 24 小时的气温变化图, 如图 1.1 所示.

图 1.1 显示出该城市当天的时间与气温的关系.

例 3 边长为 x 的正方形的面积 S 为

$$S = x^2.$$

上述三个例子表明在不同情形下两个变量间的对应关系, 常称之为函数关系, 抽去上述各例的实际意义, 给出下述定义.

定义 设 x 和 y 是两个变量, 非空数集 $D \subset \mathbf{R}$. 如果对于任何 $x \in D$, 按照一定的对应规则 f , 变量 y 有唯一确定的值与之对应, 则称 y 是 x 的函数. 记作 $y = f(x)$. 称数集 D 为这个函数的定义域, 常记为 $D_f = D$; 称 x 为自变量; 又称 y 为因变量; $f(x)$ 为 x 的函数.

若 $x_0 \in D_f$, 相对应的 y 的数值记为 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$, 并称为 x_0 处的函数值. 当 x 取遍 D 内所有值, 相应函数值的全体, 称为函数的值域, 记为 $V_f = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$.

对应规则与定义域是函数定义的两个要素. 对应规则与定义域相同的任意两个函数都是同一个函数.

由函数的定义可知, 例 1 表示了某城市人口是年度的函数; 例 2 表示了城市某天的气温是时间的函数; 例 3 表示了正方形面积是正方形边长的函数. 三个例子的对应规则不同, 这三个函数的表示法依次称为表格法、图示法、解析法.

如果在自变量的不同范围中, 对应规则用不同的解析式表示, 则这类函数称为分段函数.

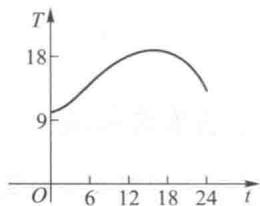


图 1.1

例 4 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

称为符号函数.

例 5 函数 $y = [x]$, 符号 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 称之为取整函数. 其图形如图 1.2 所示. 也可以表示为

$$[x] = k, \quad k \leq x < k+1,$$

其中 k 为任意整数.

在实际问题中, 函数的定义域由实际意义确定. 在不考虑实际意义的情形下, 函数的定义域是使函数表达式有意义的自变量的全体实数组成的点集.

例 6 设 $f(x) = \frac{\sqrt{2+x-x^2}}{x}$, 求函数 $f(x)$ 的定义域.

解 为使 $f(x)$ 有意义, 其分母 $x \neq 0$, 开偶次方根的 $2+x-x^2 \geq 0$, 可解得 $-1 \leq x < 0, 0 < x \leq 2$. 即 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 2]$.

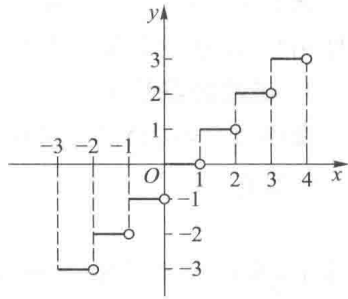


图 1.2

三、函数的几种特性

1. 函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, 对于任意的 $x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 < x_2$, 如果都有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $y = f(x)$ 在区间 I 上是单调增加 (或单调减少) 函数. 单调增加和单调减少函数统称为单调函数.

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上单调增加, 则该函数的图形在区间 I 上沿 Ox 轴正向是上升的, 如图 1.3 所示. 如果函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上单调减少, 则该函数的图形在区间 I 上沿 Ox 轴正向是下降的, 如图 1.4 所示.

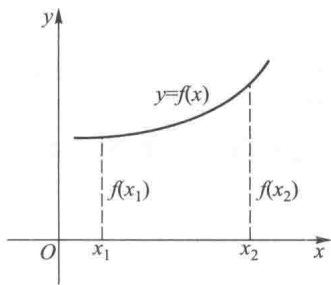


图 1.3

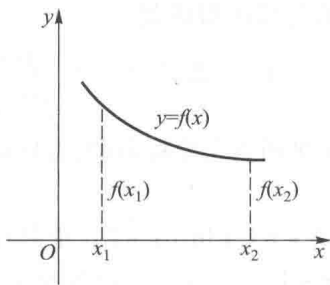


图 1.4

例如函数 $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少, 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

2. 函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 在点集 I 上有定义, 如果存在正常数 M , 对于任意的 $x \in I$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $y = f(x)$ 在 I 上有界.

例如函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界,这是因为总有 $|\sin x| \leq 1$,但是 $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

3. 函数的周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f . 如果存在正常数 T , 对于任意 $x \in D_f$, 都有 $(x + T) \in D_f$, 且 $f(x + T) = f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 为周期函数.

通常所说的周期是指最小正周期.

例如 $y = \sin x$ 是以 2π 为周期的函数, $y = \tan x$ 是以 π 为周期的函数. $y = C$ (C 为常量) 也是周期函数, 但它没有最小周期.

4. 函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称, 即对任意 $x \in D_f$, 都有 $-x \in D_f$. 如果对于任意 $x \in D_f$, 都有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $y = f(x)$ 为偶函数. 如果对于任意 $x \in D_f$, 都有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $y = f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 Oy 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

例如, $y = x^2$ 为偶函数, $y = x^3$ 为奇函数.

$y = C$ (C 为常量) 为偶函数.

$y = 0$ 是唯一既为偶函数也为奇函数的函数.

四、反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f , 值域为 V_f . 如果对任意 $y \in V_f$, 存在唯一的 $x \in D_f$ ($f(x) = y$) 与之对应, 则得到一个以 y 为自变量, x 为因变量的函数 $x = f^{-1}(y)$, 称之为 $y = f(x)$ 的反函数.

常称 $y = f(x)$ 为直接函数.

习惯上将自变量用 x 表示, 将因变量用 y 表示, 因此上述 $y = f(x)$ 的反函数写为 $y = f^{-1}(x)$.

直接函数与反函数满足

$$f[f^{-1}(y)] = y, y \in V_f;$$

$$f^{-1}[f(x)] = x, x \in D_f.$$

在同一个平面直角坐标系中, 直接函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

例 7 设 $y = 1 + \ln(x - 2)$, 求其反函数.

解 由 $y = 1 + \ln(x - 2)$ 可解得 $x = e^{y-1} + 2$. 因此

$$y = e^{x-1} + 2$$

为所求反函数.

习题 1-1

(A)

一、求下列函数的定义域:

$$1. f(x) = \sqrt{2-x^2} + \sqrt{x^2-1}.$$

$$2. g(x) = \frac{\ln(1-x) + \sqrt{x+2}}{x}.$$

$$3. h(x) = \arcsin \frac{x-1}{2}.$$

$$4. y(x) = \sqrt{16-x^2} \ln \sin x.$$

二、讨论下列函数的有界性、周期性及奇偶性:

$$1. f(x) = \sin 3x.$$

$$2. g(x) = |\sin x|.$$

$$3. h(x) = \tan x.$$

$$4. y(x) = \ln(2 + \cos x).$$

三、求下列函数的反函数:

$$1. y = \frac{1-x}{1+x}.$$

$$2. y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x, & x < -1, \\ -x^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ \ln(1+x), & 0 < x \leq e. \end{cases}$$

(B)

一、设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\} = (\quad)$.

A. 0

B. 1

C. $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 0, & |x| \leq 1, \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$

二、设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 在区间 $[0, 2]$ 上 $f(x) = x(x^2 - 4)$, 若对任意的 x 都满足 $f(x) = kf(x+2)$, 其中 k 为常数, 写出 $f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 上的表达式.

第二节 初等函数

一、基本初等函数

中学里学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为基本初等函数.

1. 幂函数 $y = x^a$ (a 为常数)

常见幂函数及图形如图 1.5 所示.

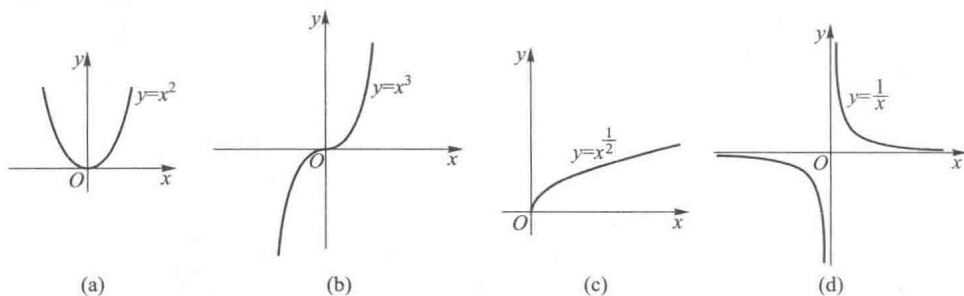


图 1.5

2. 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

其图形如图 1.6 所示.

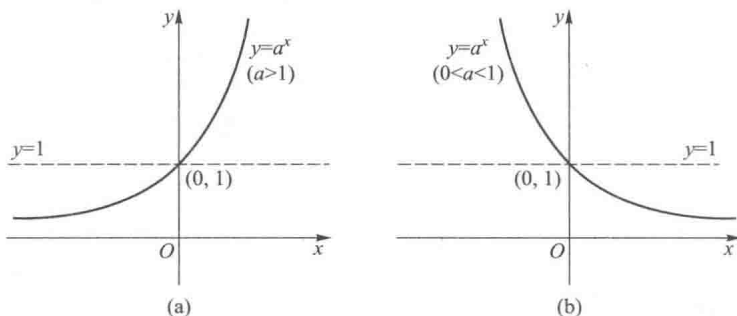


图 1.6

定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 曲线过点 $(0, 1)$, $y > 0$.

当 $0 < a < 1$ 时, $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调减少.

当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

3. 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

其图形如图 1.7 所示.

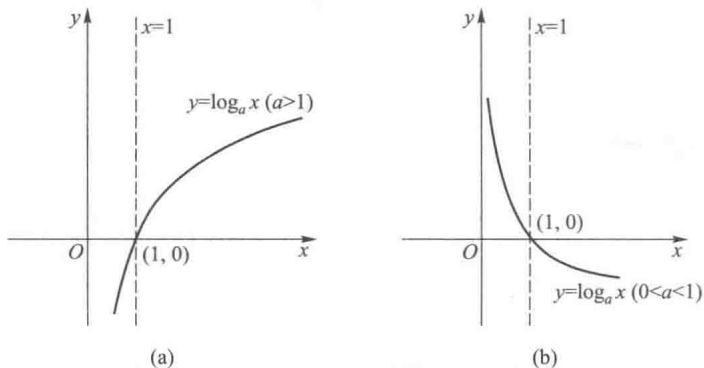


图 1.7