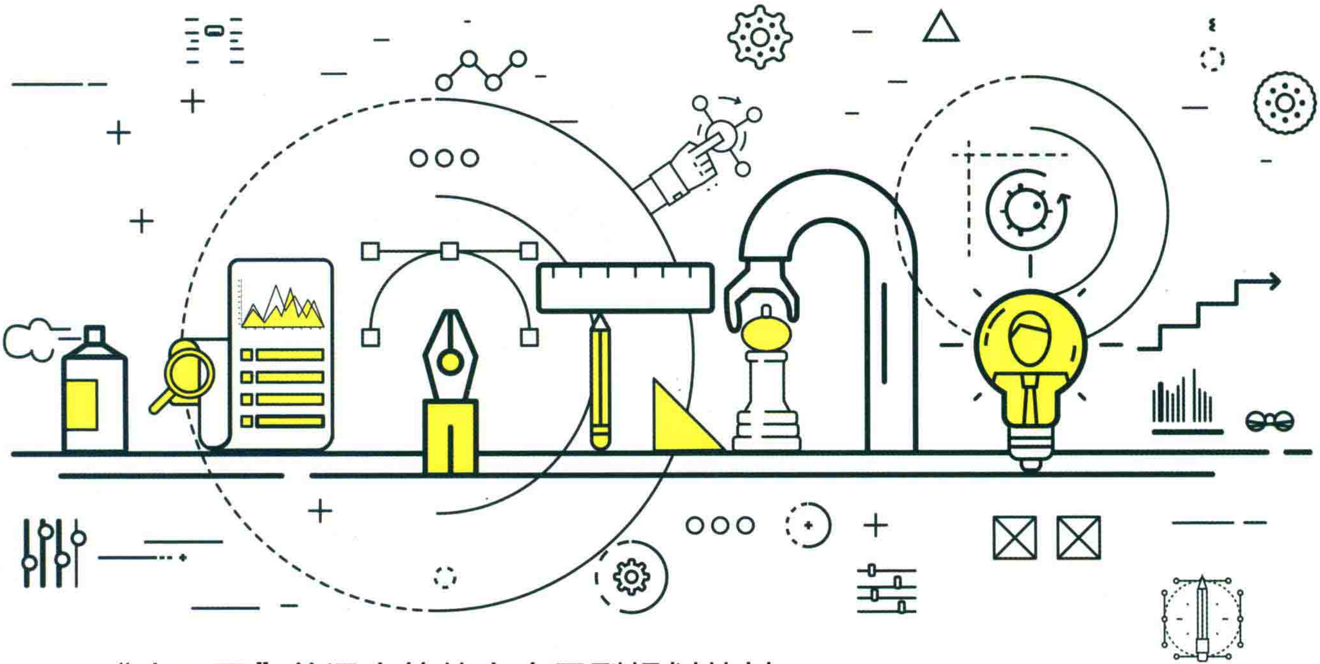


"十三五"普通高等教育应用型规划教材

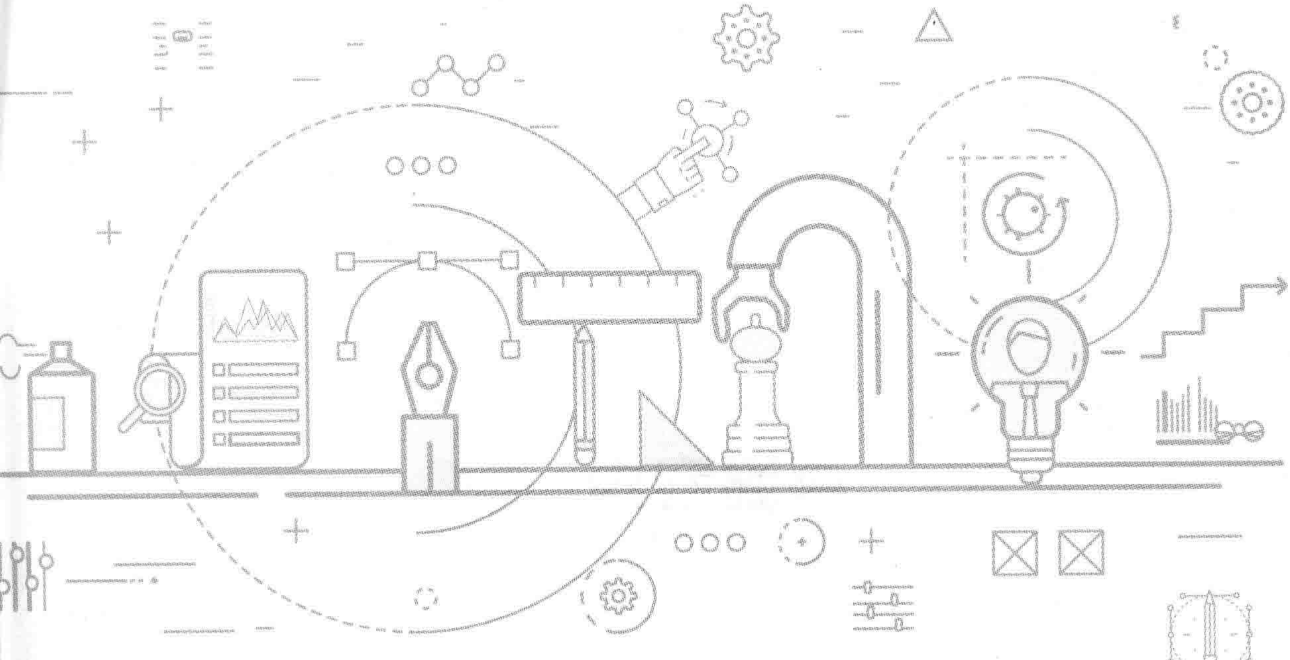
Calculus

微积分（下册）

主 编 刘 强 聂 力

中国人民大学出版社

扫码下资源



“十三五”普通高等教育应用型规划教材

Calculus

微积分（下册）

主　编　刘　强　聂　力

副主编　张　琳　于威威　范林元　聂高琴

梅超群　陶桂平　孙激流

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

微积分．下册/刘强，聂力主编．—北京：中国人民大学出版社，2018.12
“十三五”普通高等教育应用型规划教材
ISBN 978-7-300-26438-7

Ⅰ.①微… Ⅱ.①刘… ②聂… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 264772 号

“十三五”普通高等教育应用型规划教材
微积分（下册）
主　编　刘　强　聂　力
副主编　张　琳　于威威　范林元　聂高琴　梅超群　陶桂平　孙激流
Weijifen

出版发行　中国人民大学出版社
社　　址　北京中关村大街 31 号
电　　话　010－62511242（总编室）
　　　　　010－82501766（邮购部）
　　　　　010－62515195（发行公司）
网　　址　http://www.crup.com.cn
　　　　　http://www.ttrnet.com（人大
　　　　　)080
　　　　　)（质管部）
　　　　　3（门市部）
　　　　　5（盗版举报）
经　　销　新华书店
印　　刷　中煤（北京）印务有限公司
规　　格　185 mm×260 mm　16 开本
印　　张　15.5
字　　数　361 000
版　　次　2018 年 12 月第 1 版
印　　次　2018 年 12 月第 1 次印刷
定　　价　36.00 元

内容摘要

本书是根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会的总体要求，结合地方财经类专业需求特点进行编写的. 按照“专业适用，内容够用，学生适用”的设计思路，量身定制课程内容，突出经济数学的“经济”特色. 在内容编排上，尽量做到结构合理、概念清楚、条理分明、深入浅出、强化应用.

全书共有 10 章，分为上、下两册. 其中上册涵盖了函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分等内容，下册涵盖了定积分、多元函数微积分、无穷级数、微分方程以及差分方程等内容. 本书为下册. 为了便于读者学习，每节后均附有习题，每章后附有总复习题，书末附有答案.

本书既可以作为普通高等学校经管类本科生学习微积分课程的教材，也可以作为教师的教学参考用书和全国硕士研究生统一入学考试的复习用书.

前言

数学是一门工具，更是一种思维方式. 学习数学有助于我们培养发现问题、分析问题、解决问题的能力. 财经类专业与数学联系密切，大学数学在财经类专业人才培养中的作用日益凸显，在应用复合型人才的综合素养培养方面发挥着重要作用. 当前，在地方财经类院校，大学数学已经成为本科教育的必修课程. 财经类院校大学数学主要包括三大类课程，即微积分、线性代数以及概率论与数理统计，当然还有一些其他衍生课程，例如数学史与数学文化、数学软件与应用、数学实验，等等.

2009年以来，在北京市和学校相关部门的大力支持下，首都经济贸易大学数学公共基础课的教学改革一直在如火如荼地进行着，数学公共基础课教学团队从全国地方财经类专业的数学需求出发，结合教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会的总体要求，对课程管理与队伍建设、数学理念、教学大纲与课程内容、考核方式、教学模式与教学手段、教学研究、学科竞赛等方面进行了全方位改革，涉及面广，内容深刻，力度很大，效果很好. 在此基础上，我们对原有讲义进行了系统的整理、修订，编写了“十三五”普通高等教育应用型规划教材，该系列教材主要包括《微积分》(上、下册)、《线性代数》和《概率论与数理统计》，以及相应的同步练习、深化训练、考研辅导和大学生数学竞赛用书等，由首都经济贸易大学的刘强教授担任丛书的总主编.

编写组曾经在北京、山东、江苏等省市的部分高校进行实际调研，很多学生在学习的过程中，对于一些重要的数学思想、数学方法难以把握，许多高校数学公共课期末考试不及格的现象普遍存在，这一方面说明了当前大学数学教学改革的紧迫性，另一方面说明教材编写的合理定位的重要性. 从规划教材的定位来看，本系列教材主要适用于地方财经类一本、二本院校的教学. 在教材的编写过程中，在保持数学体系严谨的前提下，尽量简明通俗，尽量形象化，强调数学思想的学习与培养，淡化理论与方法的证明，注重经济学案例的使用，强调经济问题的应用，体现出经济数学的“经济”特色.

本书为《微积分》(下册)，内容体系在根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委

员会的总体要求的基础上，结合地方财经类专业特点进行系统设计，尽可能做到结构合理、概念清楚、条理分明、深入浅出、强化应用. 本书涵盖了定积分、多元函数微积分、无穷级数、微分方程以及差分方程等内容.

为了便于学生学习和教师布置课后作业，配套习题将按节设计，每章附有总复习题，书末附有习题答案。同时为了便于读者学习，选学内容和有一定难度的内容将用“*”标出.

在系列教材编写的过程中，得到了北京航空航天大学的韩立岩教授、清华大学的邓邦明教授、北京工商大学的曹显兵教授、北京工业大学的薛留根教授、广东财经大学的胡桂武教授、北方工业大学的刘喜波教授、中央财经大学的贾尚晖教授、重庆工商大学的陈义安教授、北京信息科技大学的侯吉成教授、北京联合大学的邢春峰教授、昆明理工大学的吴刘仓教授、江苏师范大学的赵鹏教授、北京化工大学的李志强副教授以及首都经济贸易大学的马立平教授、张宝学教授、任韬副教授等同事的大力支持，中国人民大学出版社的责任编辑李丽娜女士为丛书的出版付出了很多努力，在此一并表示诚挚的感谢.

编写组的教师均长期工作在大学数学教学的第一线，积累了丰富的教学经验，深谙当前本科教学的教育规律，熟悉学生的学习习惯、认知水平和认知能力，在教学改革中取得了一些成绩，出版过包括同步训练、深化训练、考研辅导以及大学生数学竞赛等多个层次的教材和辅导用书. 然而此次规划教材的编写又是一次新的尝试，书中难免存在不妥甚至错误之处，恳请读者和同行不吝指正，欢迎来函，邮件 cuebliuqiang@163. com.

作者

2018 年 12 月

目 录

第 6 章　定积分

定积分是微积分学的重要组成部分之一. 本章主要介绍定积分的概念与基本性质、微积分基本定理、定积分的计算方法、广义积分初步以及定积分的应用等内容.

§6.1　定积分的概念

本节首先给出两个引例，在此基础上给出定积分的相关概念.

6.1.1　引例

一、曲边梯形的面积问题

在初等几何中，我们会计算由直线和圆弧所围成的平面图形的面积. 但在现实应用中，常常需要计算由任意形状的闭曲线所围成的平面图形的面积，解决这一问题需要使用极限的方法.

如图 6-1 所示，对于一条封闭曲线围成的平面区域，往往可用相互垂直的两组平行线

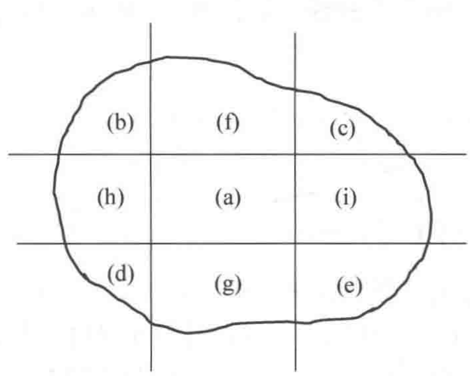


图 6-1

将其分成若干部分：矩形（如图 6－1 中（a）部分），曲边三角形（如图 6－1 中（b），（c），（d），（e）部分），曲边梯形（如图 6－1 中（f），（g），（h），（i）部分）. 矩形面积的计算方法已知，曲边三角形可看作曲边梯形的特殊情况，所以只要会计算曲边梯形的面积，就可给出任意形状的闭曲线所围成的平面图形的面积.

设曲边梯形由非负连续曲线 $y=f(x)$（$a\leqslant x\leqslant b$）、x 轴以及直线 $x=a$、$x=b$ 所围成，如图 6－2 所示.

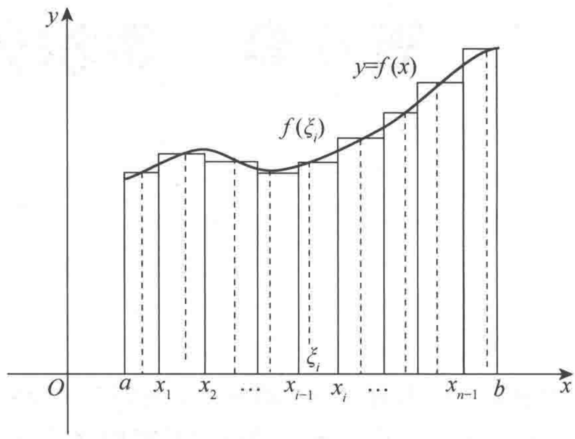


图 6－2

众所周知，矩形的高是不变的，

矩形的面积＝底边长×高.

而曲边梯形在底边上各点处的高 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是变动的，故它的面积不能直接按矩形面积公式计算. 然而，由于曲边梯形的高 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是连续变化的，在很小的区间上它的变化也很小. 因此，可以采用**“以直代曲”**的方法，通过计算矩形的面积间接计算曲边梯形的面积. 具体作法如下：

第一步　分割　在区间 $[a, b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点：x_1，x_2，…，x_{n-1}. 为书写方便，记 $a=x_0$，$b=x_n$，使得

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

称上述做法为区间 $[a, b]$ 的一个**分法**，如图 6－2 所示，该分法将区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间：

$$[x_0, x_1],\quad [x_1, x_2],\quad \cdots,\quad [x_{n-1}, x_n],$$

各小区间长度可表示为

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

第二步　近似替代　过每个分点作平行于 y 轴的直线，将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形. 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i，计算出 $f(\xi_i)$ 值. 用以 $f(\xi_i)$ 为长、以 Δx_i 为宽的小矩形近似代替第 i（$i=1, 2, \cdots, n$）个小曲边梯形，则小曲边梯形面积

$$\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i.$$

第三步 求和 将 n 个小曲边梯形的面积相加，即得到曲边梯形面积（以 S 表示）的近似值为

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

第四步 取极限 当分割越来越细，即使得每一个小区间的长度越来越小时，和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 越来越趋近于曲边梯形的面积 S. 为保证所有小区间的长度均趋于零，只需让所有小区间长度的最大值趋于零即可，记

$$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\},$$

则当 $\lambda \to 0$ 时，和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限即为曲边梯形面积的精确值，即

$$S = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

二、变速直线运动的路程问题

设某物体作变速直线运动，已知速度 $v=v(t)$ 是时间 t 的连续函数，且 $v(t)\geqslant 0$，求此物体在时间区间 $[T_1, T_2]$ 内所经过的路程 s.

当物体作匀速直线运动时，其运动路程等于速度乘以时间. 但对于变速直线运动的物体，速度不再是常量，而是随时间变化而变化的变量，因此，所求路程 s 不能直接按匀速直线运动的路程公式来计算. 由于作变速直线运动的物体的速度 $v=v(t)$ 是连续的，因此在很短的时间段内，速度变化很小，可近似看作匀速运动. 因此，仍然可以采用“以直代曲”的方法，通过匀速直线运动的路程计算公式间接计算变速直线运动的路程. 具体计算步骤如下：

第一步 分割 在时间区间 $[T_1, T_2]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点：$t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$，使得

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2,$$

将区间 $[T_1, T_2]$ 分成 n 个小时间段：$[t_0, t_1]$，$[t_1, t_2]$，…，$[t_{n-1}, t_n]$，各小区间长度可表示为

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \qquad (i=1, 2, \cdots, n).$$

第二步 近似替代 在每个小区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一点 ξ_i，以 ξ_i 时刻的速度 $v(\xi_i)$ 来近似代替 $[t_{i-1}, t_i]$ 上的平均速度（$i=1, 2, \cdots, n$），则得到小时间段 $[t_{i-1}, t_i]$ 上物体的运动路程为

$$\Delta s_i \approx v(\xi_i)\Delta t_i \qquad (i=1, 2, \cdots, n).$$

第三步 求和 将 n 个小时间段上物体所经过的路程相加，即得变速直线运动的物体

所经过的路程的近似值为

$$s=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i\approx\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i.$$

第四步　取极限　应用极限方法求作变速直线运动的物体所经过的路程. 记

$$\lambda=\max\{\Delta t_1,\ \Delta t_2,\ \cdots,\ \Delta t_n\}$$

为各时间段长度的最大值，则当 $\lambda\to 0$ 时，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i$ 的极限即为物体在时间区间 $[T_1,\ T_2]$ 内所经过的路程 s，即

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i.$$

6.1.2　定积分的定义

上述两个引例，一个是几何学中的面积问题，一个是物理学中的路程问题. 尽管它们的实际意义完全不同，但是从抽象的数量关系来看，其解决问题的思路和步骤是完全相同的. 这样的问题在经济管理、科学技术等众多领域中广泛存在，因此可以将这一方法抽象成一个数学概念，即定积分.

定义 6.1.1　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上有界，在 $(a,\ b)$ 内任意插入 $n-1$ 个分点 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}$，使得

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

该分法将区间 $[a,\ b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0,\ x_1],[x_1,\ x_2],\cdots,[x_{n-1},\ x_n],$$

各小区间长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,\ \cdots,\ n)$. 在每个小区间 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上任取一点 ξ_i，作乘积的和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \cdots,\ \Delta x_n\}$，若无论对区间 $[a,\ b]$ 如何划分以及点 ξ_i 如何选取，当 $\lambda\to 0$ 时，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限总存在且相等，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上**可积**，并称该极限值为 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上的**定积分**，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中 $f(x)$ 称为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**，x 称为**积分变量**，$[a,\ b]$ 称为**积分区间**，a 称为**积分下限**，b 称为**积分上限**，$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为**积分和**.

若当$\lambda\to 0$时，和式$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$的极限不存在，则称函数$f(x)$在区间$[a, b]$上**不可积**.

根据定积分的定义6.1.1，不难看出，上述两个引例都是定积分在实际问题中的应用. 曲边梯形的面积S是非负函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的定积分，即

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

物体作变速直线运动所经过的路程s是速度$v=v(t)$在时间区间$[T_1, T_2]$上的定积分，即

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i=\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t.$$

注 关于定积分的定义，作如下三点说明：

(1) 如果函数$f(x)$在区间$[a, b]$上可积，则定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$为一常量，其取值仅与被积函数$f(x)$和积分区间$[a, b]$有关，与积分变量的符号无关，即有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 在定积分的定义中，假定$a<b$，但如果$b<a$，规定

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

即定积分的上下限互换时，定积分变号.

当$a=b$时，规定$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$.

(3) $f(x)$在$[a, b]$上有界是$f(x)$在$[a, b]$上可积的必要条件.

函数$f(x)$在区间$[a, b]$上满足什么条件一定可积？对这个问题不作深入讨论和证明，只给出如下两个充分条件.

定理6.1.1 若函数$f(x)$在区间$[a, b]$上连续，则$f(x)$在区间$[a, b]$上可积.

定理6.1.2 若函数$f(x)$在区间$[a, b]$上有界，且仅存在有限个间断点，则$f(x)$在区间$[a, b]$上可积.

下面利用定积分的定义来计算定积分的值.

例6.1.1 利用定义计算定积分$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

解 由于被积函数$f(x)=x^2$在$[0, 1]$上连续，故由定理6.1.1可知，$f(x)$在$[0, 1]$上可积. 由于定积分的值与区间$[0, 1]$的分法及点ξ_i的取法无关，为了便于计算，不妨将区间$[0, 1]$进行n等分，分点为$x_i=\dfrac{i}{n}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，如图6-3所示. 这样，每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$的长度$\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$. 取ξ_i为第i个小区

间的右端点. 于是，和式

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot(1^2+2^2+\cdots+n^2)\\ &= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

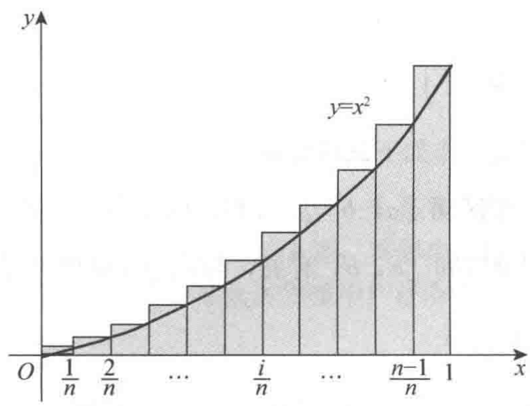


图 6－3

当 $\lambda\to 0$ 即 $n\to\infty$ 时，对上式两端取极限，由定积分的定义，即得所要计算的定积分为

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

有时，也可按定义将和式的极限表示为定积分.

如果函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，根据定积分的定义，有

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

由于在 $f(x)$ 可积的条件下，不论区间 $[0,1]$ 如何划分，点 ξ_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 如何选取，极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 均存在且相等，因此在 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在的前提下，可以选取一种简单的区间划分方式和一种简单的 ξ_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 的选取方式. 特别地，将 $[0,1]$ 进行 n 等分，此时每个小区间的长度都等于 $\frac{1}{n}$，即 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，选取 ξ_i 为第 i 个小区间的右端点值，即 $\xi_i=\frac{i}{n}$. 此时 $\lambda\to 0$ 与 $n\to\infty$ 等价，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

一般地，若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left[a+(b-a)\frac{i}{n}\right]=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例 6.1.2　试将极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{1}{n}+\cos\frac{2}{n}+\cdots+\cos 1\right)$ 表示成定积分.

解　由于 $f(x)=\cos x$ 在 $[0, 1]$ 上可积，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{1}{n}+\cos\frac{2}{n}+\cdots+\cos 1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i}{n}=\int_0^1\cos x\mathrm{d}x.$$

6.1.3　定积分的几何意义

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足 $f(x)\geqslant 0$，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$、$x=b$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积.

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足 $f(x)\leqslant 0$，则由曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$、$x=b$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形位于 x 轴的下方，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示上述曲边梯形面积的负值.

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上既取得正值又取得负值，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示 x 轴上方图形的面积与 x 轴下方图形的面积之差，如图 6－4 所示.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A_1-A_2+A_3.$$

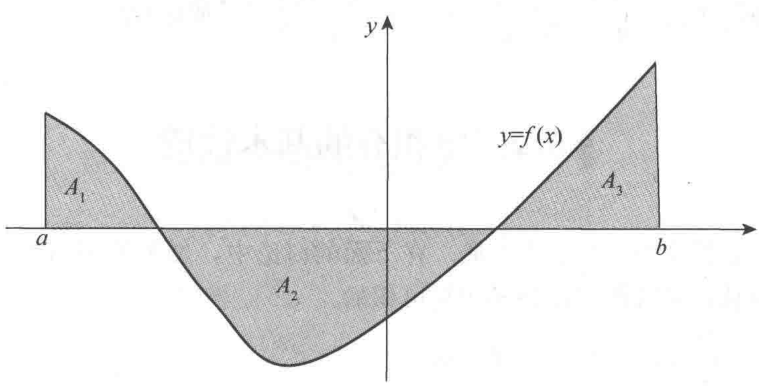


图 6－4

下面看一个利用几何意义简化定积分计算的例子.

例 6.1.3　求定积分 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解　如图 6－5 所示，由定积分的几何意义可知，定积分 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$ 表示由被积函数曲线 $y=\sqrt{a^2-x^2}$、直线 $x=0$、$x=a$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积，即四分之一圆的面积，故

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi a^2.$$

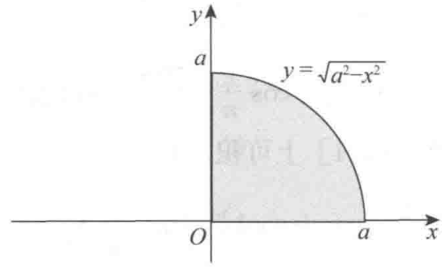


图 6－5

习题 6.1

1. 利用定义计算定积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

2. 利用定积分的几何意义计算下列定积分的值：

(1) $\int_0^1 (2x+1)\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x\,(a<b)$.

3. 试将极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$ 表示成定积分.

4. 试将极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n^3}}+\sqrt{\frac{n+2}{n^3}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+n}{n^3}}\right)$ 表示成定积分.

§6.2　定积分的基本性质

本节将介绍定积分的一些基本性质．在下面的讨论中，如不特别指明，积分上下限的大小均不加以限制，同时假定被积函数是可积的.

性质 6.2.1　$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$.

证　由定积分的定义，有

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n 1\cdot\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n \Delta x_i=b-a.$$

注　定积分 $\int_a^b \mathrm{d}x$ 在几何上表示以 $[a,b]$ 为底、以 1 为高的矩形的面积.

性质 6.2.2　$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

证　由定积分的定义，有

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n [f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注 性质 6.2.2 对于任意有限个函数的情形也成立.

性质 6.2.3 $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (k 为常数).

证 由定积分的定义，有

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0} k\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \\ &= k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

一般地，设 k_1，k_2，…，k_n 为常数，则有

$$\begin{aligned}&\int_a^b [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x)]\mathrm{d}x \\ =\ & k_1\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x + \cdots + k_n\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

性质 6.2.4 (积分对区间的可加性) 对任意的实数 a，b，c，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证 不妨假定 $a<b$.

(1) 若 $a<c<b$，则由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积可知，不论对 $[a, b]$ 怎样分割，积分和的极限总不变. 因此，在分割 $[a, b]$ 时，总可选取 c 为一个分点，使得

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

令 $\lambda\to 0$，上式两端取极限，即得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 若 $a<b<c$，由 (1) 可知

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x,$$

故

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$