

全国硕士研究生统一招生考试用书

考研数学

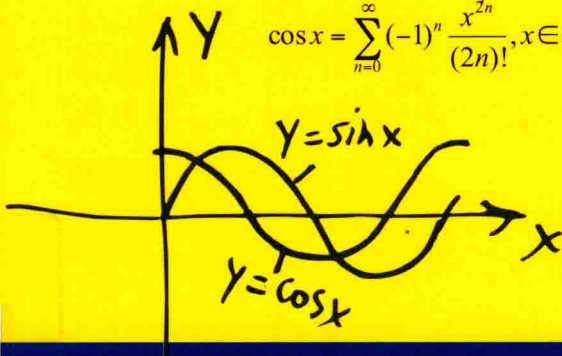
强化阶段复习全书

数学三

铁军 朱庆宇 / 编著

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, x \in (-\infty, +\infty).$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in (-\infty, +\infty).$$



考研数学强化阶段复习首选

知识梳理提纲挈领 题型讲解精准到位
自我评测与集训巩固提高

全国硕士研究生统一招生考试用书

考研数学

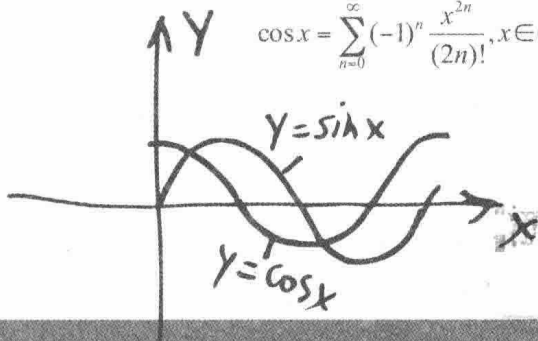
强化阶段复习全书

数学三


铁军 朱庆宇 / 编著

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in (-\infty, +\infty).$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in (-\infty, +\infty)$$



常州大学图书馆
藏书章

 中国政法大学出版社

2018 · 北京

- 声 明
1. 版权所有，侵权必究。
 2. 如有缺页、倒装问题，由出版社负责退换。

图书在版编目（CIP）数据

考研数学强化阶段复习全书. 数学三/铁军, 朱庆宇编著. —北京: 中国政法大学出版社, 2018. 4
ISBN 978-7-5620-8215-6

I. ①考… II. ①铁… ②朱… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 075912 号

出版者 中国政法大学出版社
地 址 北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址 北京 100088 信箱 8034 分箱 邮编 100088
网 址 <http://www.cuplpress.com> (网络实名: 中国政法大学出版社)
电 话 010-58908285(总编室) 58908433(编辑部) 58908334(邮购部)
承 印 三河市人民印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 25
字 数 550 千字
版 次 2018 年 4 月第 1 版
印 次 2018 年 4 月第 1 次印刷
定 价 76.00 元

本书编委会成员

(排名不分先后,按姓氏笔画排列)

王博

全国知名考研辅导专家,考研数学大纲解析人,从事考研辅导十多年,深谙命题规律,注重举一反三的讲课方式,帮助学生快速提高,讲课足迹遍布大江南北。

朱庆宇

考研数学辅导老师,考研数学讲师培训师,主讲考研数学高等数学、线性代数、概率论与数理统计。作为考研数学的教学者和考研数学讲师培训师,讲解高屋建瓴、通俗易懂,使零基础学生学有所获,对数学高手另有启发。

汪国军

浙江大学数学科学学院副教授,博士,发表论文近50篇,主持或参与科研和教改项目16项。著名学硕考研数学辅导专家,考研数学阅卷组成员,深谙命题动向,讲课思路清晰,注重数学基础知识及解题思维和技巧的训练,上课幽默并富有激情,深受广大学员喜爱!

肖遥

数学课程与教学论硕士研究生毕业,长期从事考研数学辅导工作,主要从事数学解题教学与数学测试学研究,在考研数学的解题教学及数学标准化考试命题研究方面有着丰富的经验。在数学概念教学中,提出了“WHAT”的概念教学模式。讲课激情幽默,擅长将数学与实践相结合,从生活出发创造情境,让枯燥的数学变得生动简单!

赵达夫

中国科学院、北京交通大学资深教授、数学部主任,国务院特殊津贴专家,中国考研数学辅导专家,连续多年担任全国硕士研究生入学统一考试数学阅卷组组长。授课富有激情,风趣幽默,思维活跃,重点突出,深入浅出,易懂易记。所著的考研辅导书深受广大考生的好评。

赵俊光

北京理工大学应用数学博士,北京高校教师。具有丰富的考研数学教学经验,非常重视考研课程安排的科学性与合理性。如何引导基础差的学生顺利步入复习的正轨,是赵老师多年授课中一直思考的问题,其以此为目标不断完善授课讲义。赵老师始终认

为：“好的零基础课程，是学生真正需要的帮助。”

铁军

硕士研究生导师，中国考研数学辅导专家，具有多年丰富的考研辅导经验，连续多年担任全国硕士研究生入学统一考试阅卷组专家成员。在国内外学术期刊发表论文 100 余篇，曾承担两项国家自然科学基金项目。主编“十二五”规划教材《高等数学》《线性代数》及考研数学权威辅导书 20 余部。主审教育部高等教育出版社数学考试大纲配套指导教材，厚大考研数学特聘顾问、主讲专家。

铁军老师对历年考研数学命题规律与解题方法、技巧有深刻研究及独到见解，善于运用基础知识和基本考点巧妙解决复杂的考研数学难题，提分快捷，考研成功率高。授课严谨精辟，高屋建瓴，风格幽默，深入浅出，重点突出，基础和技巧并重，对学生高度负责，思路清晰灵活，针对性极强，受到全国各地考研学子的一致推崇。

蔡全领

毕业于南开大学，天津地区考研数学阅卷组成员，《高等数学》第 7 版辅导图书主编，致力于考研数学的教学与研究。课堂上激情澎湃，幽默风趣；能够直击考点，让学生熟练掌握技巧，快速解题。从业以来已亲自培养数百名考研数学满分学员。



第一篇 高等数学

第一章 函数、极限、连续	3
(一) 考研大纲最新考试要求	3
(二) 考点知识结构拓扑图	4
(三) 考点精讲	5
(四) 考研例题精讲	19
(五) 考研解题技巧归纳	34
第二章 一元函数微分学	38
(一) 考研大纲最新考试要求	38
(二) 考点知识结构拓扑图	39
(三) 考点精讲	39
(四) 考研例题精讲	52
(五) 考研解题技巧归纳	71
第三章 一元函数积分学	75
(一) 考研大纲最新考试要求	75
(二) 考点知识结构拓扑图	75
(三) 考点精讲	76
(四) 考研例题精讲	95
(五) 考研解题技巧归纳	108
第四章 多元函数微分学	111
(一) 考研大纲最新考试要求	111
(二) 考点知识结构拓扑图	111
(三) 考点精讲	112
(四) 考研例题精讲	124
(五) 考研解题技巧归纳	134



第五章 二重积分	138
(一) 考研大纲最新考试要求	138
(二) 考点知识结构拓扑图	138
(三) 考点精讲	138
(四) 考研例题精讲	144
(五) 考研解题技巧归纳	152
第六章 无穷级数	154
(一) 考研大纲最新考试要求	154
(二) 考点知识结构拓扑图	154
(三) 考点精讲	155
(四) 考研例题精讲	162
(五) 考研解题技巧归纳	171
第七章 常微分方程与差分方程	174
(一) 考研大纲最新考试要求	174
(二) 考点知识结构拓扑图	174
(三) 考点精讲	175
(四) 考研例题精讲	182
(五) 考研解题技巧归纳	193

第二篇 线性代数

第一章 行列式	197
(一) 考研大纲最新考试要求	197
(二) 考点知识结构拓扑图	197
(三) 考点精讲	198
(四) 考研例题精讲	204
(五) 考研解题技巧归纳	207
第二章 矩阵	213
(一) 考研大纲最新考试要求	213
(二) 考点知识结构拓扑图	213
(三) 考点精讲	214
(四) 考研例题精讲	228
(五) 考研解题技巧归纳	235
第三章 向量	239
(一) 考研大纲最新考试要求	239



(二) 考点知识结构拓扑图	239
(三) 考点精讲	240
(四) 考研例题精讲	250
(五) 考研解题技巧归纳	253
第四章 线性方程组	258
(一) 考研大纲最新考试要求	258
(二) 考点知识结构拓扑图	258
(三) 考点精讲	259
(四) 考研例题精讲	264
(五) 考研解题技巧归纳	271
第五章 矩阵的特征值和特征向量	274
(一) 考研大纲最新考试要求	274
(二) 考点知识结构拓扑图	274
(三) 考点精讲	275
(四) 考研例题精讲	279
(五) 考研解题技巧归纳	286
第六章 二次型	290
(一) 考研大纲最新考试要求	290
(二) 考点知识结构拓扑图	290
(三) 考点精讲	291
(四) 考研例题精讲	295
(五) 考研解题技巧归纳	304

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率	309
(一) 考研大纲最新考试要求	309
(二) 考点知识结构拓扑图	309
(三) 考点精讲	310
(四) 考研例题精讲	316
(五) 考研解题技巧归纳	318
第二章 随机变量及其分布	321
(一) 考研大纲最新考试要求	321
(二) 考点知识结构拓扑图	321
(三) 考点精讲	322



(四) 考研例题精讲	328
(五) 考研解题技巧归纳	332
第三章 多维随机变量及其分布	334
(一) 考研大纲最新考试要求	334
(二) 考点知识结构拓扑图	334
(三) 考点精讲	335
(四) 考研例题精讲	341
(五) 考研解题技巧	348
第四章 随机变量的数字特征	351
(一) 考研大纲最新考试要求	351
(二) 考点知识结构拓扑图	351
(三) 考点精讲	352
(四) 考研例题精讲	356
(五) 考研解题技巧归纳	362
第五章 大数定律和中心极限定理	364
(一) 考研大纲最新考试要求	364
(二) 考点知识结构拓扑图	364
(三) 考点精讲	364
(四) 考研例题精讲	367
(五) 考研解题技巧归纳	370
第六章 数理统计的基本概念	371
(一) 考研大纲最新考试要求	371
(二) 考点知识结构拓扑图	371
(三) 核心概念、定理及公式	372
(四) 考研例题精讲	376
(五) 考研解题技巧归纳	379
第七章 参数估计	381
(一) 考研大纲最新考试要求	381
(二) 考点知识结构拓扑图	381
(三) 考点精讲	381
(四) 考研例题精讲	383
(五) 考研解题技巧归纳	388

第一篇

高等数学



第一章 函数、极限、连续

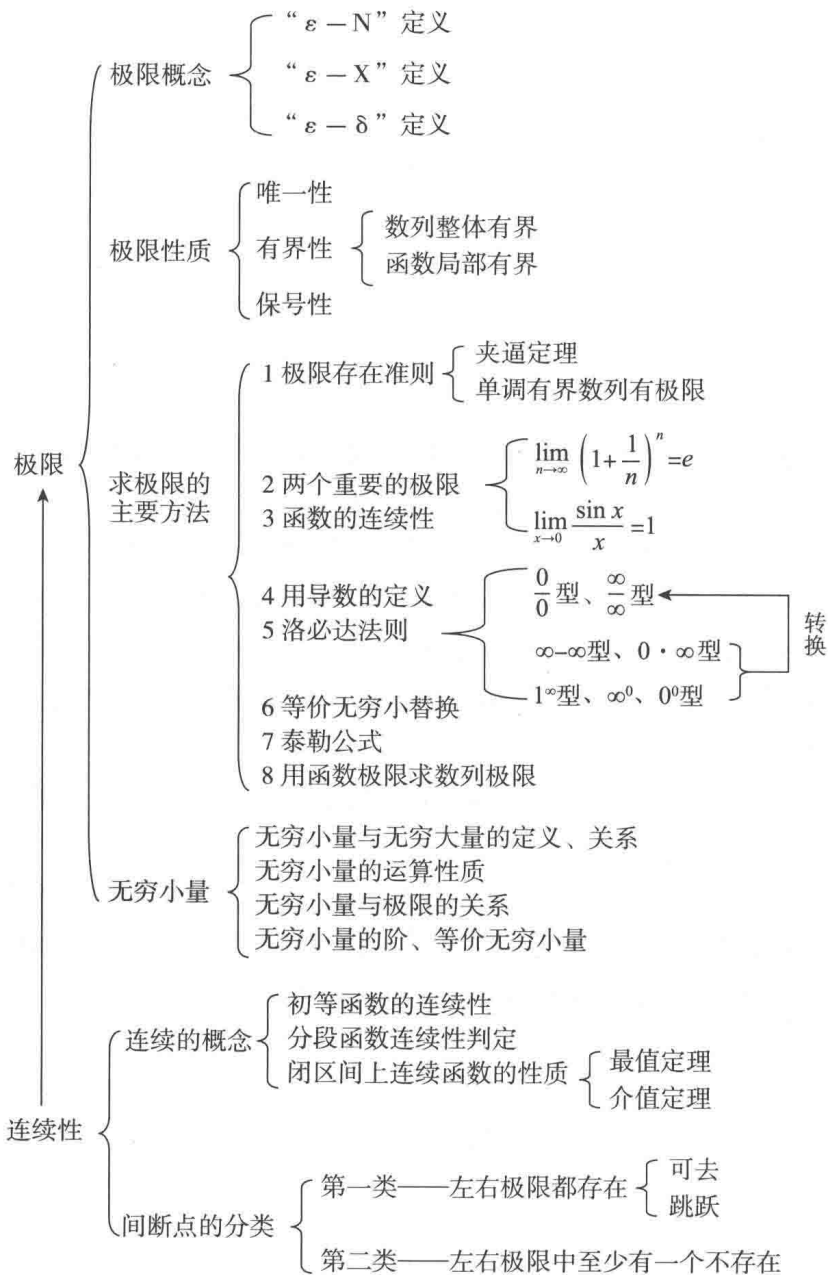
(一) 考研大纲最新考试要求

【数学三】

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.
6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限的性质及四则运算法则,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
7. 理解无穷小量的概念和基本性质,掌握无穷小量的比较方法.了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.



(二) 考点知识结构拓扑图





(三) 考点精讲

一、函数

1.1 函数的概念

定义 设 x 与 y 是两个变量, D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则 f 总有确定的数值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫作这个函数的定义域, x 叫作自变量, y 叫作因变量. 当 x 遍取 D 的各个数值时, 对应的函数值全体组成的数集

$$W = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

1.2 分段函数

在自变量的不同变化范围中, 对应法则用不同式子来表示的函数称为分段函数. 常见的几个分段函数有:

【注】 分段函数的定义域是各个“分段”函数定义域的并集.

(1) 绝对值函数(其图形如图 1-1 所示)

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

(2) 符号函数(其图形如图 1-2 所示)

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

【注】 对于任何实数 x , 下列关系成立:

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

(3) 取整函数(其图形如图 1-3 所示)

设 x 为任一实数, 则函数 $y = [x]$ 称为取整函数, 它表示不超过 x 的最大整数.

【注】 对于任何实数 x , 下列关系成立:

$$x - 1 < [x] \leq x, \text{ 且存在 } \alpha, \text{ 使得 } x = [x] + \alpha, \text{ 其中 } 0 \leq \alpha < 1.$$

(4) 最大值函数

$$\max\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} f(x), & \text{当 } f(x) \geq g(x) \text{ 时} \\ g(x), & \text{当 } f(x) < g(x) \text{ 时} \end{cases}$$

(5) 最小值函数

$$\min\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} g(x), & \text{当 } f(x) \geq g(x) \text{ 时} \\ f(x), & \text{当 } f(x) < g(x) \text{ 时} \end{cases}$$



(6) 狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

【注】狄利克雷函数是一个特殊的周期函数,任何正有理数都是它的周期,其周期不唯一,且没有最小正周期.

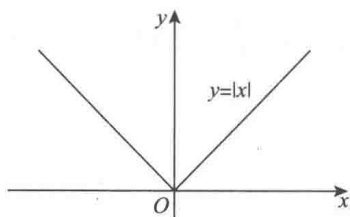


图 1-1

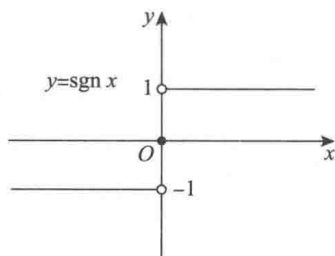


图 1-2

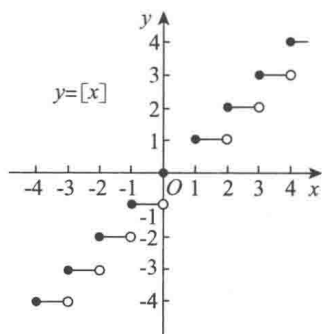


图 1-3

1.3 基本初等函数

下列函数称为基本初等函数:

(1) 常值函数: $y=C$, 其中 C 为常数, 自变量 $x \in R$.

(2) 幂函数: $y=x^\mu$ (μ 是常数).

(3) 指数函数: $y=a^x$ (a 是常数且 $a>0, a \neq 1$), 特别地, 当 $a=e$ 时, 记为 $y=e^x$.

(4) 对数函数: $y=\log_a x$ (a 是常数且 $a>0, a \neq 1$), 特别地, 当 $a=e$ 时, 称为自然对数且记为 $y=\ln x$.

(5) 三角函数: $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

(6) 反三角函数: $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\text{arccot} x$.

1.4 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可由一个式子表示的函数, 称为初等函数. 例如 $y=\sqrt{1-x^2}, y=\sin^2 x, y=\sqrt{\cot \frac{x}{2}}$ 等都是初等函数.

1.5 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f , 函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ , 且其值域 $D_\varphi \subset D_f$, 则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为由函数 $u=\varphi(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数, 其中 x 为自变量, u 称为中间变量.

【注】(1) 不是任何两个函数都能复合成函数, 这里必须满足条件 $D_\varphi \subset D_f$.

(2) 会把已给的两个函数复合成复合函数.

(3) 会把复合函数拆成简单函数. 其方法是: 由内向外或由外向内, 层层分解.



1.6 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$, 值域为 $Z(f)$, 如果对每一个 $y \in Z(f)$, 都有唯一确定的 $x \in D(f)$ 与之对应且满足 $y=f(x)$, 则 x 是定义在 $Z(f)$ 上以 y 为自变量的函数, 记此函数为 $x=f^{-1}(y), y \in Z(f)$, 并称其为函数 $y=f(x)$ 的反函数, 而 $y=f(x)$ 是 $x=f^{-1}(y)$ 的直接函数.

在 $x=f^{-1}(y)$ 中 y 为自变量, x 为因变量. 习惯上, 常用 x 做自变量, y 做因变量. 因此, $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 通常记为 $y=f^{-1}(x), x \in Z(f)$.

【注】(1) $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像重合; 而在同一直角坐标系中, $y=f(x)$ 的图像与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(2) $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数, 且 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y=f(x)$ 的值域和定义域.

$$(3) y=f(f^{-1}(y)), x=f^{-1}(f(x)).$$

1.7 隐函数

如果在方程 $F(x, y)=0$ 中, 当 x 取某数集 D 内的任一值时, 相应地总有满足该方程 $F(x, y)=0$ 的唯一的 y 值存在, 则称方程 $F(x, y)=0$ 在该数集 D 内确定了一个隐函数, 记为 $y=y(x)$, 且满足 $F(x, y(x))=0$.

【注】把一个隐函数化成显函数, 叫作隐函数的显化, 隐函数的显化有时是有困难的, 甚至是不可能的.

1.8 参数方程表示的函数

设 y 与 x 的函数关系是由参数方程
$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$
 确定的, 则称此函数关系所表达的函数为由参数方程所确定的函数.

1.9 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 在实数集 D 上有定义, 且 D 关于原点对称. 若任取 $x \in D$, 恒有 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数; 若取 $x \in D$, 恒有 $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

【注】(1) 在平面直角坐标系中, 偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于坐标原点 $O(0, 0)$ 对称.

(2) 判断奇偶性的方法

① 若 $f(x)$ 的定义域不对称于原点, 则 $f(x)$ 必非奇非偶.

② 若 $f(x)$ 的定义域对称于原点时, 计算 $f(-x)$, 并将 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 及 $-f(x)$ 进行比较, 再依据定义.

③ 利用下述结果: 设 $f(x), g(x)$ 都定义在 $(-a, a)$ 内, 那么, 若 $f(x), g(x)$ 都是偶函数, 则 $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x)$ 也是偶函数; 若 $f(x), g(x)$ 都是奇函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 为奇函数, 而 $f(x) \cdot g(x)$ 为偶函数; 若 $f(x)$ 为奇(偶)函数, $g(x)$ 为偶(奇)函数, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 为奇函数.



1.10 函数的周期性

对函数 $y=f(x)$, 若存在常数 $T>0$, 使得对定义域内的每一个 $x, x\pm T$ 仍在定义域内, 且有 $f(x+T)=f(x)$, 则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期.

1.11 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若对于 I 上任意两点 x_1 与 x_2 且 $x_1<x_2$ 时, 均有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上严格单调增加 (或严格单调减少). 在上述定义中把“ $<$ ”换成“ \leq ”称为单调增加或单调不减, “ $>$ ”换成“ \geq ”称为单调减少或单调不减.

【注】 判断函数单调的方法 通常是利用导数判断, 也可以按下法进行: 任取 $x_1, x_2 \in I$, 设 $x_1<x_2$, 将 $f(x_2)-f(x_1)$ 与零比较; 若函数恒正 (负), 可将 $\frac{f(x_2)}{f(x_1)}$ 与此同常数 1 比较.

1.12 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在一个数集 X 上有定义,

(1) 若存在正数 M , 使得对于每个 $x \in X$, 都有 $|f(x)|<M$ 成立, 称 $f(x)$ 在 X 上有界.

(2) 若存在正数 M , 使得对于每个 $x \in X$, 都有 $f(x)<M$ 成立, 称 $f(x)$ 在 X 上有上界.

(3) 若存在正数 M , 使得对于每个 $x \in X$, 都有 $f(x)>-M$ 成立, 称 $f(x)$ 在 X 上有下界.

(4) 若对于任意正数 M (无论它多么大), 总存在 $x_0 \in X$, 使得 $|f(x_0)| \geq M$ 成立, 则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

(5) $f(x)$ 在 X 上有界的充要条件是 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界.

【注】 (1) 有界函数必有上界和下界; 反之, 既有上界又有下界的函数必有界.

(2) 一个函数是否有界, 不仅与函数表达式有关, 而且与给定集合 D 有关. 例如, 函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界, 但在 $(1, +\infty)$ 内却有界.

二、极限

2.1 数列的极限

定义 如果数列 $\{x_n\}$ 与常数 a 有下列关系: 对于任意给定的正数 ϵ (不论它多么小), 总存在正整数 N , 使得对于 $n > N$ 时的一切 x_n , 不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 都成立, 则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 或 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

2.2 收敛数列极限的唯一性

定理 数列 $\{x_n\}$ 不能收敛于两个不同的极限. 也就是说, 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则其极限唯一.

2.3 数列的有界性

定义 (1) 对于数列 $\{x_n\}$, 如果存在正数 M , 使得对一切 x_n 都满足不等式 $|x_n| \leq M$,