

高教版 2019

“考研考试解析及配套题”系列  
严格按照考研数学最新大纲编写

# 考研数学

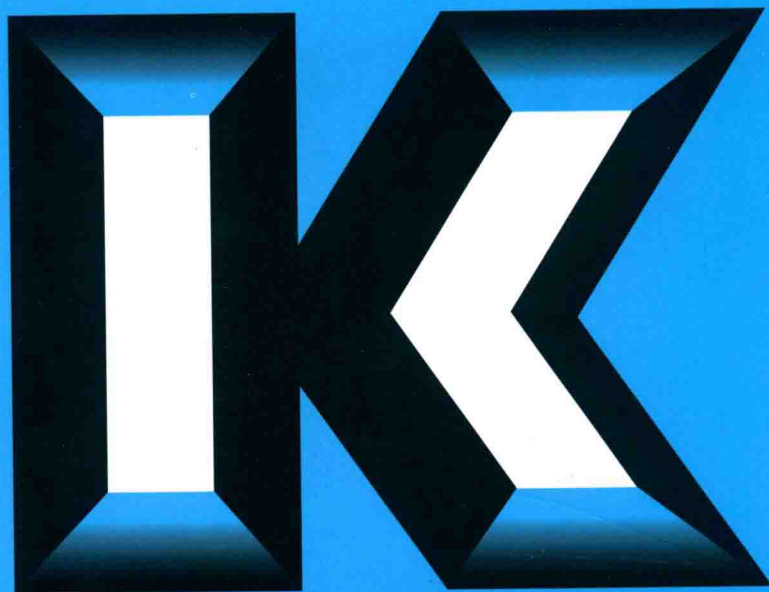
## 考试解析配套 600 题

(数学三适用)

全国考研数学配套教材编委会

高等教育出版社

- 最佳搭配：考试解析 + 考试解析配套 600 题 + 冲刺预测 5 套卷



高教版 2019

“考研考试解析及配套题”系列  
严格按照考研数学最新大纲编写

# 考研数学

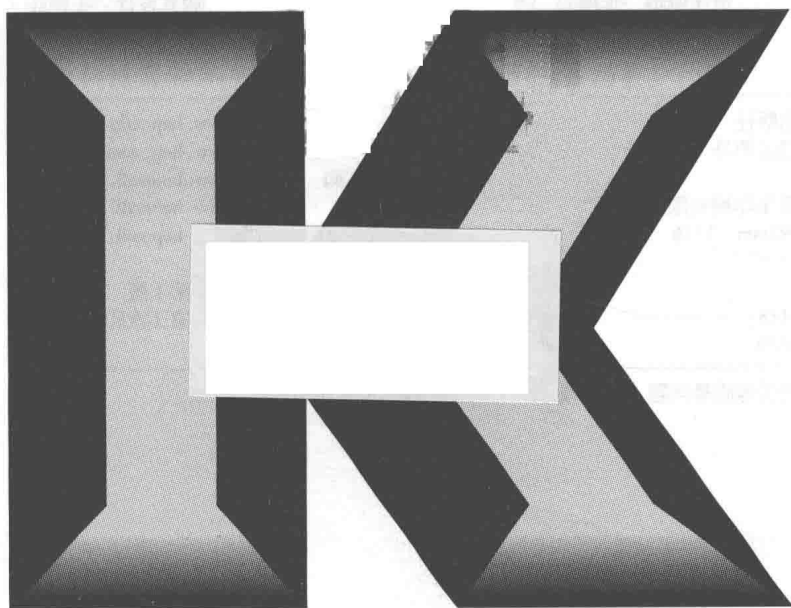
# 考试解析配套 600 题

(数学三适用)

全国考研数学配套教材编委会

高等教育出版社·北京

- 最佳搭配：考试解析 + 考试解析配套 600 题 + 冲刺预测 5 套卷



## 内容简介

《2019考研数学考试解析配套600题(数学三适用)》具有如下特色:

1. 在对试题内容的分类和命题规律研究的基础上,按照考试内容对题型和考点进行了分类,每部分内容和练习题后面对这类题型的解题方法和技巧、需要着重掌握的内容、考生答题中丢分的主要因素进行了简明扼要的小结,使读者在练习几道题后对这部分内容的解题要点、常见错误有更深的体会,进而能够获得良好的学习效果;

2. 达到或略高于考题的深度和难度,注重数学思考方法的培养、解题方法的掌握和解题技巧的训练,使得考生不但能够熟悉试题的类型,而且能够掌握解决问题的方法;

3. 题目知识点覆盖全面,融进了编者多年从事考研辅导授课经验和积累的丰富资料,某些题目是编者根据命题趋势和阅卷经验有针对性地自行命题,有较高的参考价值;

4. 体例简洁,符合学习规律。

编辑推荐:

《2019考研数学考试解析配套600题》是《2019全国硕士研究生招生考试数学考试解析》的姊妹篇,与《考研数学复习教程》《考研数学基础过关500题》《2019考研数学冲刺模拟5套卷》共同构成考研《数学考试大纲》配套权威辅导用书系列。

《2019考研数学考试解析配套600题》旨在帮助考生在强化复习阶段强化解题思维训练,培养和快速提高解题能力,为拿下数学高分打下坚实基础。

## 图书在版编目(CIP)数据

2019 考研数学考试解析配套 600 题:数学三适用 /  
全国考研数学配套教材编委会编. -- 北京:高等教育出版社,2018.8

ISBN 978-7-04-050470-5

I. ①2… II. ①全… III. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 IV. ①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 180767 号

2019 考研数学考试解析配套 600 题(数学三适用)

2019 KAOYAN SHUXUE KAOSHI JIEXI PEITAO 600 TI(SHUXUE SAN SHIYONG)

策划编辑 朱丽娜

责任编辑 张耀明

封面设计 李小璐

版式设计 王艳红

责任校对 刘丽娟

责任印制 田甜

出版发行 高等教育出版社  
社址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100120  
印刷 北京宏伟双华印刷有限公司  
开本 787mm×1092mm 1/16  
印张 16.25  
字数 550千字  
购书热线 010-58581118  
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>  
<http://www.hepmall.com>  
<http://www.hepmall.cn>  
版 次 2018年8月第1版  
印 次 2018年8月第1次印刷  
定 价 45.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 50470-00

# 修订说明

《2019 考研数学考试解析配套 600 题(数学三适用)》是《2019 全国硕士研究生招生考试数学考试解析(数学三适用)》的姊妹篇,与《考研数学复习教程(数学三适用)》《考研数学基础过关 500 题》《2019 考研数学冲刺模拟 5 套卷(数学三适用)》共同构成考研《数学考试大纲》配套权威辅导用书系列。

《2019 考研数学考试解析配套 600 题(数学三适用)》旨在帮助考生在强化复习阶段强化解题思维训练,培养和快速提高解题能力,为拿下数学高分打下坚实基础。为了使读者获得良好的复习效果,在编写过程中《2019 考研数学考试解析配套 600 题(数学三适用)》贯彻如下指导思想:

1. 严格按照《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》的内容和要求编写;
2. 内容上力求能够把握命题规律,追踪命题走向,立足考题特点;
3. 风格简约清新,适应学习规律,帮助考生达到高质、高效的学习效果。

按照上述指导思想,本书具有如下特色:

1. 在对试题内容的分类和命题规律研究的基础上,按照考试内容对题型和考点进行了分类,每部分内容和练习题后面对这类题型的解题方法和技巧,需要着重掌握的内容,考生答题中丢分的主要因素进行了简明扼要的小结,使读者在练习几道题后对这部分内容的解题要点、常见错误有更深的体会,进而能够获得良好的学习效果;
2. 达到或略高于考题的深度和难度,注重数学思维方法的培养,解题方法的掌握和解题技巧的训练,使考生不但能够熟悉试题的类型,而且能够掌握解决问题的方法;
3. 题目知识点覆盖全面,融进了编者多年从事考研辅导授课经验和积累的丰富资料,某些题目是编者根据命题趋势和阅卷经验有针对性地自行命制,有较高的参考价值;
4. 体例简洁,适应学习规律。

本书适用于考研数学的数学三卷种。

在编写过程中,作者参考了许多相关教材,引用了其中的一些例子,恕不一一列出,在此向有关作者表示诚挚的感谢,并致以深深的敬意。

本书仓促付梓,书中的疏漏和不足,敬请同行专家和读者不吝赐教。

编者

2018 年 8 月

# 目 录

## 第一部分 微 积 分 学

---

第一章 函数、极限、连续 .....	1	第四章 多元函数微积分学 .....	54
第二章 一元函数微分学 .....	12	第五章 无穷级数 .....	72
第三章 一元函数积分学 .....	34	第六章 常微分方程与差分方程 .....	91

## 第二部分 线 性 代 数

---

第一章 行列式 .....	101	第五章 矩阵的特征值和特征向量及 方阵的相似对角化 .....	152
第二章 矩阵 .....	108	第六章 二次型 .....	174
第三章 向量 .....	119		
第四章 线性方程组 .....	132		

## 第三部分 概 率 论 与 数 理 统 计

---

第一章 随机事件和概率 .....	190	第四章 随机变量的数字特征 .....	226
第二章 随机变量及其分布 .....	197	第五章 大数定律与中心极限定理 .....	241
第三章 多维随机变量及其分布 .....	209	第六章 数理统计 .....	243

## 第一章 函数、极限、连续

1. 如果数列  $x_n > 0, n=1, 2, \dots$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a > 1$ , 则数列  $x_n$  ( )

- (A) 有界. (B) 趋向于正无穷大. (C) 收敛于  $a$ . (D) 收敛于 0.

【解】 因为  $a > 1$ , 取常数  $r$ , 使得  $a > r > 1$ , 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a > r > 1.$$

由极限的保号性, 存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 恒有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > r > 1, n = N+1, N+2, \dots,$$

于是得到

$$x_{N+k} > r^k x_N, k = 1, 2, \dots.$$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^k = +\infty$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , 故选(B).

2. 设  $f(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+x}{n-2} \right)^n$ , 则  $f(x) =$  ( )

- (A)  $e^{x-1}$ . (B)  $e^{x+2}$ . (C)  $e^{x+1}$ . (D)  $e^{-x}$ .

【解】 应选(C).

$$f(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{2+x}{n-2} \right)^{\frac{n-2}{2+x}} \right]^{\frac{n(2+x)}{n-2}} = e^{2+x} = e^{1+(x+1)},$$

所以  $f(x) = e^{1+x}$ , 因此选(C).

3. 设常数  $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ ,  $x_1 = a, x_n = a^{x_{n-1}} (n=2, 3, \dots)$ , 证明当  $n \rightarrow \infty$  时, 数列  $\{x_n\}$  极限存在.

【证】 因为  $x_1 = a > 1$ , 所以  $x_2 = a^{x_1} > a = x_1$ .

假设  $x_n = a^{x_{n-1}} > x_{n-1}$ , 则

$$x_{n+1} = a^{x_n} > a^{x_{n-1}} = x_n.$$

由归纳法,  $\{x_n\}$  为单调增加数列.

又  $x_1 = a < e$ , 假设  $x_n < e$ , 则

$$x_{n+1} = a^{x_n} < a^e < (e^{\frac{1}{e}})^e = e,$$

由归纳法知  $\{x_n\}$  有上界.

由单调有界准则, 数列  $\{x_n\}$  极限存在.

4. 设  $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{x_n + 1}, n=1, 2, \dots$ , 证明当  $n \rightarrow \infty$  时, 数列  $\{x_n\}$  极限存在, 并求其值.

【证】 首先证明数列  $\{x_n\}$  是单调递增的.

$x_1 < x_2$  显然成立.

假设  $x_{k-1} < x_k$  成立, 则有

$$x_{k+1} - x_k = \frac{x_k}{1+x_k} - \frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}} = \frac{x_k - x_{k-1}}{(x_k+1)(x_{k-1}+1)} > 0,$$

即  $x_k < x_{k+1}$  成立.

由数学归纳法知, 对任何正整数  $n$ , 均有  $x_n < x_{n+1}$  成立, 从而数列  $\{x_n\}$  单调递增.

又因为  $x_n < 2$  成立, 即数列  $\{x_n\}$  有上界.

根据单调有界原理便知数列  $\{x_n\}$  收敛.

令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , 将  $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{x_n+1}$  两边取极限得

$$l^2 = l + 1.$$

考虑到  $l > 0$ , 解得  $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

5. 设函数  $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ .

(1) 求  $f(x)$  的最小值;

(2) 设数列  $\{x_n\}$  满足  $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求此极限.

**【解】** (1) 由题意

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

令  $f'(x) = 0$ , 得唯一驻点  $x = 1$ .

又

$$f''(1) = \frac{2-x}{x^3} \Big|_{x=1} = 1 > 0,$$

故  $f(1) = 1$  是极小值, 也是最小值.

(2) 由(1)知  $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$ , 从而  $\ln x_n + \frac{1}{x_n} \geq 1$ , 于是

$$\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < \ln x_n + \frac{1}{x_n},$$

即  $x_{n+1} > x_n$ , 故  $\{x_n\}$  为单调增加数列.

又  $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ , 知  $\ln x_n < 1$ , 故  $x_n < e$ , 即  $\{x_n\}$  有上界, 由单调有界准则,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在.

在不等式  $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$  两边取极限, 且设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 有

$$\ln a + \frac{1}{a} < 1.$$

又  $\ln a + \frac{1}{a} \geq 1$ , 故  $\ln a + \frac{1}{a} = 1$ , 得  $a = 1$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

6. 设  $f(x)$  是区间  $[0, +\infty)$  上单调减少且非负连续函数,

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

证明数列  $\{a_n\}$  的极限存在.

**【解】** 只须证明  $a_n$  是单调有界数列. 由题设

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k), \quad k = 1, 2, \dots.$$

(1) 有界性.

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left[ f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right] + f(n) \geq 0.$$

(2) 单调性.

由

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq 0$$

知  $\{a_n\}$  单调减少, 故  $\{a_n\}$  的极限存在.

7. 设  $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

【分析】 题中所给数列的一般项是“和”的形式, 又不能写成“积分和”, 可以对一般项进行放缩, 利用夹逼准则求出极限值.

【解】 对一切  $n$ , 有

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq x_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1,$$

所以由夹逼准则, 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

8. 设  $x_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

【解】 因为

$$1 \leq \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{n},$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ , 所以由夹逼准则, 得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

9. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left( 2 \sin \frac{1}{n} - \sin \frac{2}{n} \right)$ .

【分析】 本题是数列未定式的极限问题, 先利用海涅定理化为函数极限, 在利用洛必达法则求出极限.

【解】 
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left( 2 \sin \frac{1}{n} - \sin \frac{2}{n} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{\frac{1}{n^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 \cos 2x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x + 4 \sin 2x}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x}{6x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 2x}{6x} \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} \\ &= 1. \end{aligned}$$

10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【分析】 这是一个数列未定式, 可以利用海涅定理化数列极限为函数极限, 再利用洛必达法则.

【解】 设  $\sqrt{n} = x$ , 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_1^{x^2} \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} \\ &= 2. \end{aligned}$$

11. 设函数  $f(x)$  在  $x=a$  可导, 且  $f(a) \neq 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【解】

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} \right]^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a)}{f(a)} \right]^n \\ &= \exp \left\{ \frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{f(a)} \right\} \\ &= e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}. \end{aligned}$$

12. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right)$  ( $a \neq 0$ ).

【解】 由拉格朗日中值定理知

$$\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} = \frac{1}{1+\xi_n^2} \left( \frac{a}{n} - \frac{a}{n+1} \right) = \frac{1}{1+\xi_n^2} \frac{a}{n(n+1)}. \quad \left( \frac{a}{n+1} < \xi_n < \frac{a}{n} \right)$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1+\xi_n} \frac{n^2}{n(n+1)} = a.$$

13.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【解】 原式  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

14. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{1}{i}} 2^{\frac{i}{n}}$ .

【解】 显然

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{1}{i}} 2^{\frac{i}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}}.$$

又因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}} = \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2},$$

所以由夹逼准则, 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{1}{i}} 2^{\frac{i}{n}} = \frac{1}{\ln 2}$ .

15.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(k+1)^2}{k!} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

$$\text{【解】 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(k+1)^2}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n \Big|_{x=1} = (x^2 + 3x + 1)e^x \Big|_{x=1} = 5e.$$

16. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left( \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \sin \frac{2}{x} \right); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2 [2x + \ln(1-2x)]}.$$

【分析】 本题考查利用泰勒公式求函数未定式极限. 若直接利用洛必达法则不易求出其极限, 可利用泰勒公式计算. (1) 题应先利用代换  $t = \frac{1}{x}$  转化为  $\frac{0}{0}$  型未定式, 再利用泰勒公式.

【解】 (1) 令  $\frac{1}{x} = t$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left( \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \sin \frac{2}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \frac{1}{3!} t^3 - \frac{1}{2} \left[ 2t - \frac{(2t)^3}{3!} \right] + o(t^3)}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3}{2} + o(t^3)}{t^3} = \frac{1}{2}.$$

(2) 因为

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \left( -\frac{x^2}{2} \right)^2 + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$

$$\ln(1-2x) = -2x - \frac{1}{2} (-2x)^2 + o(x^2) = -2x - 2x^2 + o(x^2),$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2 [2x + \ln(1-2x)]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \left[ 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) \right]}{x^2 [2x - 2x - 2x^2 + o(x^2)]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{-2x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{24}.$$

17. 已知极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x - \ln \frac{1+x}{1-x}}{x^n} = c \neq 0$ , 试确定常数  $n$  和  $c$  的值.

【解法 1】 由洛必达法则, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x - \ln \frac{1+x}{1-x}}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2}}{nx^{n-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{2}{(1+x)(1-x)}}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(-2x^2)}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x^2}{nx^{n-1}(1-x^4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4}{1-x^4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{nx^{n-3}} = -4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{nx^{n-3}} = c, \end{aligned}$$

故有  $n=3$ ,  $c=-\frac{4}{3}$ .

【解法 2】 因为

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

所以

$$2 \arctan x - \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \arctan x - \ln(1+x) + \ln(1-x) = -\frac{4}{3} x^3 + o(x^3),$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x - \ln \frac{1+x}{1-x}}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)}{x^n} = c \neq 0. \text{ 从而有 } n=3, c=-\frac{4}{3}.$$

18. 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)-1}{\tan x} - \frac{e^x \sin x}{\tan^2 x} \right) = 2$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

【解】 由于  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot x}{x^2} = \infty$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{\tan x} = \infty$ .

又由  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)-1}{\tan x} - \frac{e^x \sin x}{\tan^2 x} \right) = 2$ , 知存在  $x \rightarrow 0$  时的无穷小量  $\alpha(x)$ , 使得

$$\frac{f(x)-1}{\tan x} - \frac{e^x \sin x}{\tan^2 x} = 2 + \alpha(x),$$

则

$$f(x) = 2 \tan x + \alpha(x) \tan x + \frac{e^x \sin x}{\tan x} + 1,$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2 \tan x + \alpha(x) \tan x + \frac{e^x \sin x}{\tan x} + 1 \right) = 2.$$

19. 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^4 + ax^2} - (x^2 + bx) e^{-\frac{2}{x}} \right] = 1$ , 试确定  $a, b$  的值.

【解】 令  $x = \frac{1}{t}$ , 则

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^4 + ax^2} - (x^2 + bx) e^{-\frac{2}{x}} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+at^2} - (1+bt) e^{-2t}}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{1+at^2} - 1) - [(1+bt) e^{-2t} - 1]}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+at^2} - 1}{t^2} - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+bt) e^{-2t} - 1}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2at}{2\sqrt{1+at^2}} - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{be^{-2t} + (1+bt) e^{-2t}(-2)}{2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a}{2\sqrt{1+at^2}} - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(b-2-2bt) e^{-2t}}{2t} \\ &= \frac{a}{2} - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-2be^{-2t} - 2(b-2-2bt) e^{-2t}}{2} \\ &= \frac{a}{2} + \frac{2b+2(b-2)}{2} = \frac{a}{2} + 2b - 2 = 1, \end{aligned}$$

故有  $b-2=0$ ,  $\frac{a}{2} + 2b - 2 = 1$ , 即  $a=-2, b=2$ .

20. 设  $f(x)$  在  $0 < |x| < \delta$  时有定义, 其中  $\delta$  为正常数, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \cos x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x^2}} = e,$$

求极限  $\frac{f(x)}{x^3}$ .

【解】  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \cos x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + \left( \cos x - 1 + \frac{f(x)}{x} \right) \right]^{\frac{1}{x^2}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + \left( \cos x - 1 + \frac{f(x)}{x} \right) \right]^{\frac{1}{\cos x - 1 + \frac{f(x)}{x}} \cdot \frac{\cos x - 1 + \frac{f(x)}{x}}{x^2}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{f(x)}{x^3} \right]} = e,$$

即  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 1$ , 而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{3}{2}$ .

21. 设  $f(x)$  在  $x=0$  的某邻域内二阶可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right) = 0$ , 求  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f''(0)$  及  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{x^2}$ .

【解】 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x} + f(x)}{x^2} = 0,$$

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x}{x} + f(x) \right) = 0$ .

又  $f(x)$  在  $x=0$  的某邻域内二阶可导, 因此  $f(x)$ ,  $f'(x)$  在  $x=0$  处连续. 从而  $f(0) = -3$ .

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x} + f(x)}{x^2} = 0, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x} - 3 + f(x) + 3}{x^2} = 0,$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \frac{\sin 3x}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3\cos 3x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin 3x}{2x} = \frac{9}{2}.$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{f(x) + 3}{x^2} = 0 \times \frac{9}{2} = 0.$$

由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{x^2} = \frac{9}{2}$ , 将  $f(x)$  麦克劳林展开, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + o(x^2) + 3}{x^2} = \frac{9}{2},$$

因此  $\frac{1}{2}f''(0) = \frac{9}{2}$ , 于是  $f''(0) = 9$ .

22. 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 且  $f(x_0) \neq 0$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)}{f(x_0)} \right]^n$ .

$$\text{【解】 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)}{f(x_0)} \right]^n = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0 + x)}{f(x_0)} \right]^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{f(x_0)} \right]^{\frac{f(x_0)}{f(x_0 + x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x f(x_0)}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x f(x_0)}}$$

$$= e^{\frac{1}{f(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x}}$$

$$= e^{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}}.$$

23. 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = c$ , 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1) - f(x-1)]$ .

【解】 由微分中值定理, 存在  $\xi \in (x-1, x+1)$ , 使

$$f(x+1)-f(x-1)=2f'(\xi).$$

注意到当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\xi \rightarrow \infty$ , 从而

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1)-f(x-1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} 2f'(\xi) = 2 \lim_{\xi \rightarrow \infty} f'(\xi) = 2c.$$

24. 若  $x \rightarrow 0$  时  $(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$  与  $x \sin x$  是等价无穷小量, 试求常数  $a$ .

【分析】 本题考查等价无穷小量的定义.

$$\text{【解法 1】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2} = -\frac{a}{4}.$$

由等价无穷小的定义知  $-\frac{1}{4}a=1$ , 即  $a=-4$ .

$$\begin{aligned} \text{【解法 2】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}(1-ax^2)^{-\frac{3}{4}}(-2ax)}{\sin x + x \cos x} = -\frac{a}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-ax^2)^{-\frac{3}{4}}}{\sin x + x \cos x} \\ &= -\frac{a}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = -\frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{a}{4} = 1, \text{ 即 } a = -4. \end{aligned}$$

25. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $e^{x^3}-e^{\sin^3 x}$  与  $x^m$  是同阶无穷小量, 试求常数  $m$ .

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3}-e^{\sin^3 x}}{x^m} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3}(1-e^{\sin^3 x-x^3})}{x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{\sin^3 x-x^3}}{x^m} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{\sin^3 x-x^3}}{x^m} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x-x^3}{x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-\sin x)(x^2+x \sin x+\sin^2 x)}{x^m} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-\sin x) \left(1+\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)}{x^{m-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1+\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin^2 x}{x^2}\right) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin x}{x^{m-2}} \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{(m-2)x^{m-3}} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{(m-2)x^{m-3}}. \end{aligned}$$

由同阶无穷小的定义知  $m-3=2$ , 即  $m=5$  时,  $e^{x^3}-e^{\sin^3 x}$  与  $x^m$  是  $x \rightarrow 0$  时的同阶无穷小量.

26. 当  $x \rightarrow 0$  时  $3x-4 \sin x + \sin x \cos x$  与  $x^n$  为同阶无穷小量, 试求  $n$ .

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x-4 \sin x + \sin x \cos x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x-4 \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x}{x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-4 \cos x + \cos 2x}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x - 2 \sin 2x}{n(n-1)x^{n-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos x - 4 \cos 2x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin x + 8 \sin 2x}{n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \cos x + 16 \cos 2x}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}}. \end{aligned}$$

故当  $n=5$  时上述极限存在并且等于  $\frac{1}{10}$ , 即  $n=5$  时  $3x-4 \sin x + \sin x \cos x$  与  $x^n$  是  $x \rightarrow 0$  时的同阶无穷小量.

27. 设当  $x \rightarrow 0$  时,  $\ln(1+x)-(ax^2+bx)$  是比  $x \arcsin x$  高阶的无穷小量, 试求常数  $a$  和  $b$ .

【分析】 本题考查高阶无穷小量的定义, 其中  $\ln(1+x)$  要利用泰勒公式展开.

【解】 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x \arcsin x \sim x^2$ . 而

$$\ln(1+x)-(ax^2+bx) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (ax^2+bx) = (1-b)x - \left(\frac{1}{2}+a\right)x^2 + o(x^2).$$

由条件知  $1-b=0$ ,  $\frac{1}{2}+a=0$ , 即  $a=-\frac{1}{2}$ ,  $b=1$  时,  $\ln(1+x)-(ax^2+bx)$  是  $x \rightarrow 0$  时的比  $x \arcsin x$  高阶的无穷小量.

28. 设  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = \ln(x^2 + \sqrt{1+x^2})$  与  $g(x) = \sqrt[3]{1-ax^k} - 1$  是等价的无穷小量, 试求常数  $a$  和  $k$  的值.

【分析】 本题考查等价无穷小量, 利用求导定阶法求  $f(x)$  的等价无穷小量, 利用等价无穷小量代换求  $g(x)$  的等价无穷小量.

【解】 因  $x \rightarrow 0$  时有  $f'(x) = \frac{1}{x^2 + \sqrt{1+x^2}} \left( 2x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \sim x \left( 2 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) \sim 3x$ , 故

$$f(x) \sim \int_0^x 3tdt = \frac{3}{2}x^2.$$

又  $g(x) = \sqrt[3]{1-ax^k} - 1 \sim -\frac{a}{3}x^k$ , 由  $f(x)$  和  $g(x)$  是  $x \rightarrow 0$  时的等价无穷小量, 可得  $a = -\frac{9}{2}, k = 2$ .

29. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \ln \cos(x-1), & \text{若 } x \neq 1, \\ 1 - \sin \frac{\pi}{2}x & \\ 1, & \text{若 } x = 1. \end{cases}$  问  $f(x)$  在  $x=1$  处是否连续? 若不连续, 修改  $f(x)$  在  $x=1$  处的定义, 使之连续.

【分析】 本题考查分段函数在分段点处的连续性.

【解】  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sin(x-1)}{\cos(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x-1)}{-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}x}{-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2}x} = -\frac{4}{\pi^2} \neq 1.$$

即  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ , 故  $f(x)$  在  $x=1$  处不连续.

令  $f(1) = -\frac{4}{\pi^2}$ , 则  $f(x)$  在  $x=1$  处连续.

30. 设函数  $F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x^2}, & x \neq 0, \\ f(0), & x = 0, \end{cases}$  其中  $f(x)$  在  $x=0$  处二阶可导,  $f''(0) \neq 0, f'(0) = 0, f(0) = 0$ , 则  $x=0$  是  $F(x)$

的( )

(A) 第一类间断点.

(B) 连续点.

(C) 第二类间断点.

(D) 连续点或间断点不能由此确定.

【解】 应选(A).

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \frac{1}{2} f''(0) \neq F(0),$$

所以  $x=0$  是  $F(x)$  的第一类(可去)间断点.

31. 设  $f(x)$  连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x)-1}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right] = 3$ , 求  $f(0)$ .

【解】 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x)-1}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right] = 3$  知

$$\frac{f(x)-1}{x} - \frac{\sin x}{x^2} = 3 + \alpha(x), \text{ 其中 } \lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0.$$

$$xf(x) - x - \sin x = 3x^2 + \alpha(x) \cdot x^2,$$

$$f(x) = 3x + 1 + \frac{\sin x}{x} + \alpha(x) \cdot x.$$

等式两边取极限, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 3x + 1 + \frac{\sin x}{x} + \alpha(x) \cdot x \right] = 2.$$

由于  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 所以  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ .

32. 求函数  $f(x) = \frac{1}{x^2} \arctan \frac{1}{x - \frac{1}{x}}$  的间断点, 并判别其类型.

【解】  $f(x)$  的间断点为  $x=0$  以及  $x - \frac{1}{x} = 0$ , 即  $x=1$  和  $x=-1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \arctan \frac{1}{x - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan \frac{x}{x^2 - 1}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x^2 - 1}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(x^2 - 1)} = \infty,$$

故  $x=0$  是  $f(x)$  的第二类间断点, 且是无穷间断点.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2} \arctan \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan \frac{x}{x^2 - 1} = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2} \arctan \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1}{x^2} \arctan \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \arctan \frac{x}{x^2 - 1} = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \arctan \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{\pi}{2}.$$

故  $x=1$  和  $x=-1$  是  $f(x)$  的第一类间断点, 且是跳跃间断点.

33. 设函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(e^{nx} + 1)}{1 + x^2 e^{nx}}$ , 讨论  $f(x)$  的间断点, 其结论为( )

(A) 不存在间断点.

(B)  $x=0$  是可去间断点.

(C)  $x=0$  是跳跃间断点.

(D)  $x=0$  是无穷间断点.

【解】 应选(D).

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0 \cdot 2}{1} = 0,$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(e^{nx} + 1)}{1 + x^2 e^{nx}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + 0} = x,$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(e^{nx} + 1)}{1 + x^2 e^{nx}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(1 + e^{-nx})}{e^{-nx} + x^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x},$$

$$\text{即 } f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ , 所以  $x=0$  是  $f(x)$  的无穷间断点, 故应选(D).

34. 证明方程  $\frac{x}{e} - \ln x - \sqrt{2} = 0$  在  $(0, +\infty)$  内至少有两个实根.

【分析】 本题考查利用零点定理证明方程的根的存在性.

【解】 令  $f(x) = \frac{x}{e} - \ln x - \sqrt{2}$ , 则  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内连续, 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x}{e} - \ln x - \sqrt{2} \right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{e} - \ln x - \sqrt{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{e} - \ln x \right) - \sqrt{2}$$

$$\stackrel{\text{令 } t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{et} - \ln \frac{1}{t} \right) - \sqrt{2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 + et \ln t}{et} - \sqrt{2} = +\infty.$$

又  $f(e) = -\sqrt{2} < 0$ , 故由零点定理,  $f(x) = 0$  在  $(0, e)$  与  $(e, +\infty)$  内至少各有一个实根, 即  $f(x) = 0$  在  $(0, +\infty)$  内

至少有两个实根.

35. 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上非负连续, 且  $f(0)=f(1)=0$ , 证明对实数  $a(0<a<1)$ , 必有  $\xi \in [0,1]$  使  $f(\xi+a)=f(\xi)$ .

【证】 令  $F(x)=f(x+a)-f(x)$ . 因为  $f(x)$  在  $[0,1]$  上非负连续,  $f(x+a)$  应在  $[-a,1-a]$  上非负连续, 于是  $F(x)$  在  $[0,1-a]$  上连续.

由于  $F(0)=f(a)-f(0)=f(a) \geq 0, F(1-a)=f(1)-f(1-a)=-f(1-a) \leq 0$ .

(1) 若  $F(0)=0$ , 则  $\xi=0$  即为所求;

(2) 若  $F(1-a)=0$ , 则  $\xi=1-a$  即为所求;

(3) 若  $F(0) \neq 0$  且  $F(1-a) \neq 0$ , 则由介值定理, 必存在  $\xi \in (0,1-a) \subset (0,1)$ , 使得  $F(\xi)=0$ , 即  $f(\xi+a)=f(\xi)$ .

综上所述, 存在  $\xi \in [0,1)$ , 使  $f(\xi+a)=f(\xi)$ .

36. 设  $f(x)$  在  $[a,b]$  上可微,  $\forall x \in [a,b], a < f(x) < b$ , 且  $f'(x) \neq 1, x \in (a,b)$ . 试证: 在  $(a,b)$  内方程  $f(x)=x$  有唯一实根.

【证】 存在性. 令  $F(x)=f(x)-x$ , 显然  $F(x)$  在  $[a,b]$  上连续, 又  $F(a)=f(a)-a > 0, F(b)=f(b)-b < 0$ , 则由零点定理可知, 至少存在一点  $\xi \in (a,b)$ , 使  $F(\xi)=0$ , 即  $f(\xi)=\xi$ .

用反证法证唯一性. 设存在  $\eta \in (a,b), \eta \neq \xi$ , 使  $F(\eta)=0$ , 则由罗尔定理可知, 在  $\eta$  与  $\xi$  之间存在一点  $c$ , 使  $F'(c)=f'(c)-1=0$ , 即  $f'(c)=1$ , 这与  $f'(x) \neq 1, x \in (a,b)$  矛盾.

## 第二章 一元函数微分学

1. 设  $f(x)$  在  $x=a$  的某个邻域内有定义, 则  $f(x)$  在  $x=a$  处可导的一个充分条件是( )

- (A)  $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[ f\left(a + \frac{1}{h}\right) - f(a) \right]$  存在. (B)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h}$  存在.  
(C)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$  存在. (D)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$  存在.

【分析】 本题考查导数的定义. 函数  $f(x)$  在  $x=a$  处可导的充分必要条件是左、右导数存在且相等, 根据此结论选出正确选项.

【解】 应选(D).

对于(A)选项, 由于  $h \rightarrow +\infty$ , 因此只能保证右导数  $f'_+(a)$  存在.

又例如  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq a, \\ 0, & x = a, \end{cases}$  则  $f(x)$  在  $x=a$  处不连续, 故也不可导, 但显然满足(B)、(C), 因此(B)、(C) 不正确, 只有(D)选项是正确的.

2. 设函数  $f(x)$  对任意  $x$  均满足等式  $f(1+x) = af(x)$ , 且有  $f'(0) = b$ , 其中  $a, b$  为非零常数, 则( )

- (A)  $f(x)$  在  $x=1$  处不可导. (B)  $f(x)$  在  $x=1$  处可导, 且  $f'(1) = a$ .  
(C)  $f(x)$  在  $x=1$  处可导, 且  $f'(1) = b$ . (D)  $f(x)$  在  $x=1$  处可导, 且  $f'(1) = ab$ .

【解】 应选(D).

由已知条件, 令  $x=0$ , 得  $f(1) = af(0)$ , 从而

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{af(x) - af(0)}{x} = af'(0) = ab,$$

故应选(D).

3. 设  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 下列命题错误的是( )

- (A) 如果  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则  $f(0) = 0$ . (B) 如果  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则  $f'(0)$  存在.  
(C) 如果  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$  存在, 则  $f(0) = 0$ . (D) 如果  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$  存在, 则  $f'(0)$  存在.

【解】 应选(D).

由于  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 故  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .

如果  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ .

于是  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ , 从而(A)、(B)选项都是正确的命题.

又如果  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$  存在, 则  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + f(-x)] = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} f(-x) = 2f(0)$ , 因此选项(C)的命题也是正确的.

如果令  $f(x) = |x|$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$ , 但  $f'(0)$  显然不存在, 综上, 应选(D).

4. 已知  $f'(x_0) = -1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)} = ( )$

- (A) 1. (B) -1. (C) 3. (D) -3.

【解】 应选(A).

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)}{-x} \cdot (-1)} = -\frac{1}{f'(x_0)} = 1,$$