

Solution of Hungary Mathematics
Olympiad (Volume 1)



匈牙利奥林匹克 数学竞赛题解

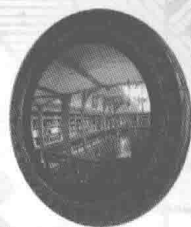
第1卷

● 《匈牙利奥林匹克数学竞赛题解》编写组 编译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

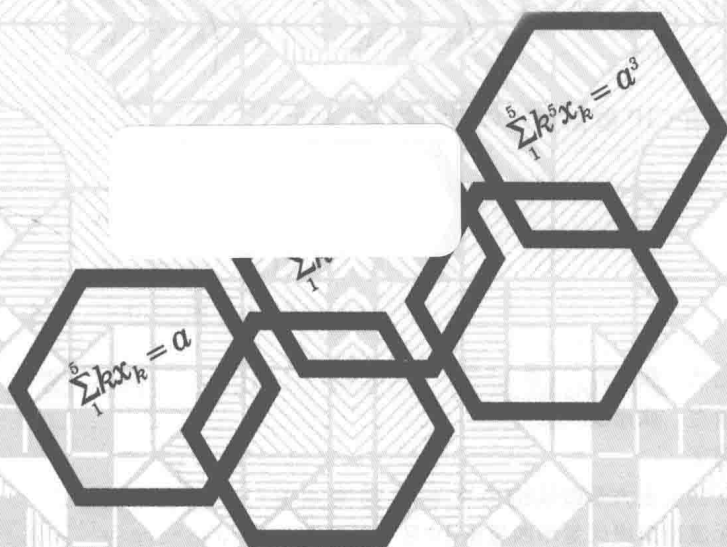
Solution of Hungary Mathematics
Olympiad (Volume 1)



匈牙利奥林匹克 数学竞赛题解

第1卷

● 《匈牙利奥林匹克数学竞赛题解》编写组 编译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书共分2卷,第1卷收集了1894年至1933年匈牙利奥林匹克数学竞赛的一百多道试题及解答,一题多解,并有理论说明.虽然用中学生学过的初等数学知识就可以解答这些试题,但是它又涉及许多高等数学的课题.参阅此书不仅有助于锻炼逻辑思维能力,对进一步学习高等数学也颇有好处.

本书可供中学生、中学教师及广大数学爱好者学习与参考.

图书在版编目(CIP)数据

匈牙利奥林匹克数学竞赛题解.第1卷/《匈牙利奥林匹克数学竞赛题解》编写组编译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.5

ISBN 978-7-5603-5733-1

I. ①匈… II. ①匈 III. ①中学数学课—竞赛题—题解 IV. ①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第287460号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 张永文

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 14 字数 228千字

版 次 2016年5月第1版 2016年5月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-5733-1

定 价 28.00元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎

目

录

第 1 章 1894 年试题及解答

1

§ 1 整数的可除性及分类 //2

§ 2 素数的一个重要性质 //3

§ 3 数学归纳原理 //5

第 2 章 1895 年试题及解答

10

§ 4 关于重复排列 //11

§ 5 关于组合 //12

§ 6 正切定理 //17

第 3 章 1896 年~1897 年试题及解答

19

§ 7 关于将整数分解成素数乘幂的乘积 //19

§ 8 关于三角形的某些内容 //24

§ 9 关于三角函数的乘积之和的变换 //27

§ 10 关于三角形的三角函数乘积的某些关系式 //30

§ 11 欧拉定理 //30

第 4 章 1898 年试题及解答

34

§ 12 同余理论的基本概念 //34

§ 13 关于最大值的存在性 //37

第 5 章 1899 年试题及解答

39

- § 14 关于正星形多边形 //41
 § 15 切比雪夫多项式 //42
 § 16 复数的一个几何应用 //42
 § 17 关于将多项式分解成因式 //43
 § 18 关于去掉无理方程中的根号 //46

第 6 章 1900 年~1901 年试题及解答

49

- § 19 费马小定理 //52
 § 20 代数数和超越数 //54
 § 21 关于求任何一个正整数的约数 //55
 § 22 关于最大公约数和最小公倍数 //55
 § 23 关于互素的数 //56

第 7 章 1902 年~1903 年试题及解答

58

- § 24 关于取整数值的多项式 //59
 § 25 关于二项式级数 //60
 § 26 关于波约依几何学 //61
 § 27 再论非欧几何 //66
 § 28 关于完全数 //70

第 8 章 1904 年~1908 年试题及解答

74

- § 29 伯努利不等式 //77
 § 30 狄里希利原理 //82
 § 31 整系数代数方程 //83

第 9 章 1909 年~1911 年试题及解答

88

- § 32 关于费马大定理 //88
 § 33 关于两个数的调和平均值 //90
 § 34 关于诺模图 //93
 § 35 三角多项式的一个性质 //99

§ 36 关于正多边形和它的重心 //100

第 10 章 1912 年~1913 年试题及解答

102

§ 37 包含和排除的公式 //102

§ 38 关于三角形的边和角的一个关系 //107

§ 39 关于最大公约数的两个定理 //109

第 11 章 1914 年~1918 年试题及解答

111

§ 40 关于切比雪夫多项式的马尔科夫定理 //112

§ 41 拉格尔定理 //117

§ 42 柯西不等式 //119

§ 43 琴生不等式 //120

§ 44 凸函数和凹函数 //123

第 12 章 1922 年~1923 年试题及解答

132

§ 45 爱森斯坦定理 //133

§ 46 关于恒等多项式 //136

第 13 章 1924 年~1926 年试题及解答

138

§ 47 关于抛物线 //139

§ 48 点关于圆的幂及两圆的根轴 //140

§ 49 关于将阶乘分解为乘积因子时素数的最大乘幂 //143

§ 50 关于马遍历无穷象棋盘的格子的问题 //146

第 14 章 1927 年~1933 年试题及解答

149

§ 51 关于矢量 //167

§ 52 图论的某些知识 //174

附录 对匈牙利数学的一次采访

180

Bolyais, 父与子 //180

奥匈协定及解放 //181

- 竞赛与刊物 //183
- 匈牙利特色 //186
- 黎 兹 //189
- 厄多斯与图兰(Turán) //193
- 结 语 //194
- Alfred Rényi //195

参考文献

第1章 1894年试题及解答

1 证明:对于同样的整数 x 和 y ,表达式

$$2x + 3y \quad \text{和} \quad 9x + 5y$$

能同时被 17 整除.

证法 1 (1) 首先我们来弄清楚:如果表达式 $2x + 3y$ 等于某个任意给定的整数 k , x 和 y 可以取怎样的整数值. 假设

$$2x + 3y = k \quad (1)$$

这时

$$x = \frac{k - 3y}{2} = -y + \frac{k - y}{2} \quad (2)$$

因此,仅当表达式 $\frac{k - y}{2}$ 等于某个整数 s 时, x 才能是整数. 由

$$\frac{k - y}{2} = s \quad \text{得}$$

$$y = k - 2s$$

再由等式(2)即得

$$x = -y + s = 3s - k$$

因此仅当

$$x = -k + 3s, y = k - 2s \quad (3)$$

时整数 x 和 y 才能满足等式(1),其中 s 是任意的整数.

反之,当 s 取任意的整数时,我们可以由公式(3)得到整数 x 和 y ,它们满足等式(1).

(2) 用类似的方法我们可以求得:如果

$$9x + 5y = l \quad (4)$$

其中 l 是某个给定的整数,那么 x 和 y 能取什么整数值.

由等式(4)解出 y ,得

$$y = \frac{l - 9x}{5} = -2x + \frac{l + x}{5} \quad (5)$$

因此,仅当表达式 $\frac{l + x}{5}$ 等于某个整数 t 时, y 才能取整数值. 但

这时

$$x = 5t - l$$

再由等式(5)即得

$$y = -2x + t = -9t + 2l$$

因此仅当

$$x = 5t - l, y = -9t + 2l \quad (6)$$

时,两个整数 x 和 y 才满足等式(4),其中 t 是任意整数.

反之,当 t 取任意的整数时,我们可以由公式(6)求得整数 x 和 y ,它们满足等式(4).

(3)由(1)中的证明知,若表达式 $2x + 3y$ 是17的倍数(即等于形如 $17n$ 的整数,这里 n 是任意的整数),则 x 和 y 一定可以表示成

$$x = -17n + 3s, \quad y = 17n - 2s$$

的形式,其中 s 是任意的整数.

但这时

$$9x + 5y = 9(-17n + 3s) + 5(17n - 2s) = 17(-4n + s)$$

因此表达式 $9x + 5y$ 所取的值也是17的倍数.

同样,从(2)中的证明知,使表达式 $9x + 5y$ 为17的倍数的整数 x 和 y ,可以表示成

$$x = 5t - 17m, \quad y = -9t + 37m$$

这样一来

$$2x + 3y = 17(-t + 4m)$$

也是17的倍数.*

证法2 为了简单起见,我们记

$$u = 2x + 3y, \quad v = 9x + 5y$$

于是

$$3v - 5u = 17x$$

上一关系式可以表示成

$$3v = 5u + 17x \quad (1)$$

$$5u = 3v - 17x \quad (2)$$

如果 x 和 y 是使 u 能被17整除的整数,那么由关系式(1), $3v$ 也能被17整除.因为乘积 $3v$ 的第一个因子不能被素数17整除,所以欲使整个乘积能被17整除,仅仅只有在 v 能被17整除时才有可能.

同样可以证明:如果 x 和 y 是使 v 能被17整除的整数,那么由关系式(2), u 也能被17整除.*

§1 整数的可除性及分类^①

如果对于某个整数 a 和不为零的整数 b ,可以找到这样一个整数 k ,使得等式 $a = bk$ 成立,那么就说 a 能被 b 整除.在这种情况下,数 a 叫作数 b 的倍数,数 b 叫作数 a 的约数.

^① 为了进一步理解上述题解,这里给出相应的数学知识.下同.

整数 a, b, k 并不一定都是正的, 它们之中的任何一个都可以是负的, 而数 a 和 k 甚至可以为零.

如果 a 能被 b 整除, 而 b 能被 c 整除, 那么 a 能被 c 整除.

如果 a 和 a' 能被 b 整除, $a + a'$ 和 $a - a'$ 也能被 b 整除.

如果 b 是不为零的整数 a 的约数, 那么 b 的绝对值不能超过 a 的绝对值^①. 因此, 每一个不为零的整数只有有限个不同的约数. 例如, 数 12 的约数为 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

通常在求整数的约数时, 仅限于求它的正约数, 因为所有的负约数可以通过改变正约数的符号而得到.

正单位和负单位(即数 1 和 -1) 除了 1 以外, 没有其他的正约数. 所有绝对值大于 1 的整数至少() 有两个正约数: 它自身的绝对值和 1.

如果绝对值大于 1 的整数 p , 除了 $|p|$ 和 1 以外, 没有其他的正约数, 那么 p 就叫作素数.

如果某个绝对值大于 1 的整数 a , 至少有一个不同于 $|a|$ 和 1 的正约数(我们用 b 表示这个约数), 那么 a 可以表示成 $a = kb$ 的形式, 这里的 b 和 k 表示整数, 且满足不等式 $1 < |k| < |a|$. 这样一来, 在这种情况下, 数 a 可以表示成两个整数乘积的形式, 这两个整数的绝对值大于 1 而小于 $|a|$. 这样的数 a 叫作复合数.

零可以被任何整数整除.

这样一来, 整数可以被分成四类:

- (1) 正单位和负单位;
- (2) 素数;
- (3) 复合数;
- (4) 零(构成单独的一类).

数论研究数的可除性和许多与它相近的问题. 它的基础早在欧几里得^②的书——《几何原本》的卷 VII - IX 中就奠定了.

§ 2 素数的一个重要性质

第 1 题的证法 2 利用了下面的素数的性质.

(1) 如果两个整数中的任何一个都不能被某一个给定的素数 p 整除, 那么它们的乘积也不能被 p 整除.

^① 正数或零的绝对值就是它自己. 负数的绝对值是一个正数, 和原来的数仅仅是符号不同. 数 a 的绝对值是用 $|a|$ 来表示. 例如, $|5| = |-5| = 5$.

^② 欧几里得(Euclid, 公元前 330—公元前 275), 古希腊数学家, 被称为“几何之父”. ——中译者注

为了证明这个论断,只要研究自然数^①就行了,因为一方面,任何数 N 和 $-N$ 具有相同的约数,另一方面,任何一个数的负约数乘以 (-1) 以后就变成了它的正约数.

于是,我们可以把上述论断变成下面的形式来进行证明:

如果某一个自然数 a 不能被素数 p 整除,那么乘积 ab 仅当 p 能除尽第二个因子 b 的时候才能被 p 整除.

于是,假设给定了正素数 p 和某一个不能被 p 整除的数 a . 设 B 是自然数 b 的集合,这里的 b 是那些使乘积 ab 能被 p 整除的自然数(显然,集合 B 包含数 p 本身和它的倍数). 我们来求包含在 B 中的最小的数. 这样的数是存在的. 事实上,只要在数

$$a \cdot 1, a \cdot 2, \dots, a \cdot (p-1), a \cdot p \quad (1)$$

之中寻求能被 p 整除的数就行了. 显然, $a \cdot p$ 一定能被 p 整除. 如果在序列(1)中, $a \cdot m$ 是第一个能被 p 整除的数,那么 m 是集合 B 中最小的数.

我们来证明,一方面,所有包含在 B 中的数都能被 m 整除,而另一方面,数 m 只可能是素数 p .

事实上,假设属于集合 B 的某一个数 b 不能被 m 整除. 设在比 b 小的 m 的倍数中, mq 是最大的,即

$$b = mq + r$$

其中 r 表示数 $1, 2, \dots, m-1$ 中的某一个. 我们来证明,在这种情况下,小于 m 的数 r 应该包含在集合 B 中,尽管这与数 m 的定义相违背. 事实上,将等式两边乘以 a ,我们得到

$$ab = amq + ar$$

由此

$$ar = ab - (am) \cdot q$$

右端的第一项能被 p 整除. 第二项也能被 p 整除,因为括号中的乘积能被 p 整除. 因此, ar 也能被 p 整除,但这是不可能的. 因为 $0 < r < m$,而在和 a 的乘积为 p 的倍数的正整数中, m 是最小的数.

所得到的矛盾证明了,任何一个属于 B 的数 b 应该能被 m 整除.

因为数 p 本身属于集合 B ,所以根据上面所证明的, p 能被 m 整除. 但是 p 只有两个正约数:1和 p ,而 $m \neq 1$,因为根据假设数 $a \cdot 1 = a$ 不能被 p 整除. 因此必须满足等式 $m = p$. 这就证明了第二个断言,因而证明了上面所说的定理.

上述定理中的定理可以有下面的推广.

^① 通常把正整数叫作自然数. 有点名气的数学家布尔巴基(Bourbaki)还把0算作自然数. 在我们的命题中,任何一个数都不会是0,因为已知它们不能被 p 整除,而0可以被任何数整除. —— 俄译编辑注

(2) 如果数

$$a, b, c, d, \dots$$

中的任何一个数都不能被素数 p 整除, 那么乘积

$$ab, abc = (ab)c, abcd = (abc)d, \dots$$

中的任何一个都不能被 p 整除.

(3) 用类似于我们选取数 m 的方法可以证明下面简单的论断, 我们今后将不止一次地用到它.

如果 A 是非空的集合, 它的元素是某些自然数, 那和在 A 所包含的数中, 有一个最小的数.

事实上, 如果 a 是属于集合 A 的任一自然数, 那么当我们依次来研究数

$$1, 2, \dots, a-1, a$$

时, 我们会遇到(不迟于第 a 次) 第一个属于集合 A 的数, 而这个数将是构成集合 A 的所有数中最小的数.

应该特别着重指出, 我们是在由自然数组成的集合 A 中寻求最小的数. 如果不是这样, 例如, 在所有的(不一定是正的) 偶数中, 或者是在所有的倒数为自然数(不一定是整数) 的数中寻求最小的数, 那么是不可能找到最小数的.

§ 3 数学归纳原理^①

(1) 在 § 2 中, 下面的论断——称之为最小数原理——占有重要的地位.

如果 A 是非空的集合, 它的元素是某些自然数, 那么在 A 所包含的数中有最小的数.

我们回想一下这个论断是怎样被证明的. 因为这个集合 A 是非空的, 所以必存在一个属于它的自然数 a . 依次来看自然数 $1, 2, \dots, a$. 在这些数中, 第一个属于 A 的数将是这个集合中最小的数.

对这个论证的完善性很容易产生怀疑. 特别是, 为什么从 1 开始我们一定能够到达任一给定的自然数 a ? 自然地会回答: “因为只有有限个小于 a 的自然数”. 但这样的回答是不能令人满意的, 因为“有限个数”意味着什么呢? 借口这是“实践经验的推广”几乎也是无济于事的. 在日常生活中, 我们不仅不和“任何给定的”自然数打交道, 甚至也不和很大的数打交道. (例如, 谁数过 9^9 个物体? 我想, 即使是在十亿个数的范

^① 由俄译编辑补加的.

围内,也不会有人依次选取这些自然数的)因此,在这些骤然看来没有什么不对的话中,例如“任一自然数 a ”这句话,已经不明显地包含了比粗糙的感性经验更多的什么东西,这里有巨大的质的飞跃:从若干(不是非常之多)具体的、个别的有限集合(一匹马、两只皮靴、三棵树)中进行抽象,我们得到无穷的自然数序列的概念,它的项使我们有可能讨论任一有限集合的元素的个数^①.阿基米德^②的《沙粒的计算》是一部优秀的著作,它说明了我们可以想象并说出任意大的自然数.命数法(即关于自然数命名的学说)曾长时间地作为一种单独的算术运算不是没有原因的(例如, $M \cdot B \cdot$ 罗蒙诺索夫学习过的 $\Pi \cdot$ 马格里兹基的《算术》就是这样的).

我们的怀疑好像是牵强附会的:这一切是如此显然的或几乎是显然的,在繁琐的论证上花费时间和提出荒诞的问题是值得的吗?但是,实际上所涉及的是非常本质的问题:关于数学论证的基本原理.自然数以及它的性质在数学的所有分支中都要用到,而我们甚至并不总能明显地意识到这一点.

(2)数学家在进行证明时所采用的法则,要求精确地叙述原始命题——公理,而所有其他命题应该按照逻辑法则从它们中推出来.在公理中,要指明某种数学理论中必不可少的对象以及这些对象所满足的必不可少的关系.最常用的自然数列的一组公理是由意大利数学家皮亚诺^③提出的.他成功地指出了,从下面最简单的关系出发: a 紧跟在 b 后面或 b 紧靠在 a 前面(在这里说“ $a=b+1$ ”还为时过早,因为加法还没有定义),可以定义所有的算术运算,并能证明自然数的一切性质.皮亚诺公理是:

① 在自然数中有这样一个数,没有任何自然数紧靠在它的前面,这个数我们用1来表示;

② 对于任何一个自然数,有且只有一个自然数紧跟在它后面;

③ 任何一个自然数有不多于一个紧靠在它前面的数;

④(归纳公理)任何一个自然数集合 A ,若:

(a)1属于 A ;

(b)如果某个自然数属于 A ,那么紧跟在它后面的自然数也属于 A ,则 A 和整个自然数集合重合.

① 为了回答什么是“有限集合”这个问题,应该比较深入地研究数学的基础(可见§60).

② 阿基米德(Archimedes,公元前287—公元前212),古希腊哲学家、数学家、物理学家,确定了许多物体的表面积和体积的计算方法,发现杠杆原理和浮力定律.——中译者注

③ 皮亚诺(Peano,1858—1932),意大利数学家,其致力于发展布尔(Boole)所创始的符号逻辑系统.——中译者注

正像我们已经指出的,这四条公理对于建立整个算术已经足够了(见《初等数学百科全书》,卷1,国家技术出版社,莫斯科,1951^①).因此在今后,代替“紧跟在 n 后面的自然数”,我们将简单地写作 $n+1$.

(3) 归纳公理用精确的逻辑术语表达了自然数列的这样一种性质,这种性质在直观上用“从1开始,一个一个地选取可以到达任何一个自然数”这句话来表达,它是一种形式上方便的办法,使得能够一下子把整个自然数的无穷集合引入到论证中去.这多半借助于数学归纳原理(也叫作数学归纳法或完全归纳法)来实现.

数学归纳原理. 假设 $P(n)$ 是依赖于自然数 n 作为参数的命题. 如果 $P(1)$ 成立,且由 $P(n)$ 成立可以推出 $P(n+1)$ 成立,那么 $P(n)$ 对所有的自然数 n 都成立.

为了从归纳公理引出数学归纳原理,我们用 A 表示使 $P(n)$ 成立的自然数 n 的集合. 这时 A 包含1,因为 $P(1)$ 成立,且若 A 包含 n ,那么 $P(n)$ 成立,这时 $P(n+1)$ 也成立,这意味着 A 包含紧跟在 n 后面的自然数 $n+1$. 根据归纳公理, A 包含所有的自然数,即 $P(n)$ 对所有的 n 都成立.

命题 $P(1)$ 如果成立,叫作归纳基础. 关于 $P(n)$ 成立的假设叫作归纳假设.

作为例子,我们证明下面的命题.

$P(n)$:是自然数 n 或者是1,或者是跟在某一个自然数后面的数.

$P(1)$ (归纳基础)显然成立. 假设 $P(n)$ 成立(归纳假设). 这时 n 是某一个自然数,而 $n+1$ 是紧跟在它后面的数. 这就意味着 $P(n+1)$ 成立. 根据归纳原理, $P(n)$ 对所有的 n 都成立.

在这本书中,我们以后会遇到许多应用归纳原理的例子. 现在我们感兴趣的是下面的事实:前面所说的最小数原理和归纳公理是等价的并可以代替它.

(4) 由归纳公理推出最小数原理. 假设 A 是自然数列的某一个集合. 我们假设在这个集合中没有最小的数. 我们构造一个集合 M ,它含有这样的自然数 m ,如果所有满足条件 $n \leq m$ 的自然数 n 不属于集合 A ^②. 这时:

1属于 M ;不然的话,1应该属于 A 并且是 A 中最小的数.

如果自然数 m 属于 M ,那么所有满足条件 $n \leq m$ 的自然数 n 不属于 A . 因而数 $m+1$ 也不可能属于 A ,因为不然的话,它就

① 还可参考艾·兰道所著《分析基础》,有中译本(刘绶堂译).——中译者注

② 注意,我们认为所有的算术运算已经建立了. 特别是,我们已经会比较自然数的大小. 1是所有自然数中最小的数.

是 A 中最小的数. 因此 $m+1$ 也属于 M .

根据归纳公理, M 和整个自然数集合重合, 但若 A 是非空的时候, 这是不可能的.

(5) 由最小数原理推出归纳公理. 设 M 是归纳公理的条件中所说的集合. 我们取补集 A , 它由所有不属于 M 的自然数构成. 如果 M 不和整个自然数列重合, 那么 A 是非空的. 根据最小数原理, 在 A 中有最小数 a . 因为 1 属于 M , 所以 $a \neq 1$. 根据上面所证明的, a 紧跟在某一个自然数 n 的后面. 因为 a 是 A 中最小的数, 所以 n 不属于 A , 于是 n 属于 M , 而紧跟在它后面的自然数 a 不属于 M , 这和集合 M 的定义相矛盾, 这个矛盾表明, A 是空的, 于是 M 和整个自然数集合重合.

2 给定一个圆和圆内的点 P 和 Q , 求作内接于这个圆的直角三角形, 使它的一条直角边通过点 P , 另一条直角边通过点 Q , 点 P 和 Q 在什么位置时, 本题无解?

解 对线段 PQ 所张的角为直角的点的轨迹是以 PQ 为直径所画的圆 k' (图 1). 圆 k' 和已知圆 k 的交点即是内接于圆 k 且直角边或直角边的延长线通过点 P 和 Q 的直角三角形的顶点. 为了使得直角边本身而不是它们的延长线通过点 P 和 Q , 这两个点应该在圆 k 内.

如果点 P 和 Q 在圆 k 内, 圆 k 和 k' 有几个交点, 本题就有几个解, 因此:

(1) 如果 $\frac{1}{2}PQ > r - d$ (其中 r 是圆 k 的半径, d 是圆 k 的

圆心到线段 PQ 的中点的距离), 则有两个解.

(2) 如果 $\frac{1}{2}PQ = r - d$, 则只有一个解.

(3) 如果 $\frac{1}{2}PQ < r - d$, 则无解. 因为圆 k' 的圆心到圆 k 的

最短距离等于 $r - d$.

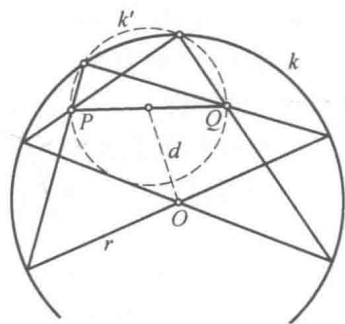


图 1

3 三角形的边构成公差为 d 的等差数列, 三角形的面积等于 S , 求三角形的边长和角, 再对 $d=1, S=6$ 这个特殊情况, 求解本题.

解 我们将三角形的边表示成 $a = b - d, b, c = b + d$, 这里 $0 < d < b$. 将表达式

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3b}{2}, p-a = \frac{b}{2} + d$$

$$p-b = \frac{b}{2}, p-c = \frac{b}{2} - d$$

代入海伦^①公式

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

我们得到

$$S^2 = \frac{3b^2}{4} \left(\frac{b^2}{4} - d^2 \right)$$

把它看作是(关于 b^2 的)二次方程, 我们解得

$$b^2 = 2 \left(d^2 + \sqrt{d^4 + \frac{4S^2}{3}} \right)$$

开平方(两个根号都取正号, 因为 b 是三角形的一条边, 所以是正的), 我们得到

$$b = \sqrt{2 \left(d^2 + \sqrt{d^4 + \frac{4S^2}{3}} \right)}, a = b - d, c = b + d$$

a 及 b 所对的角 α 和 β 一定是锐角^②, 且

$$S = \frac{bc}{2} \sin \alpha, S = \frac{ac}{2} \sin \beta$$

最后, c 所对的角 $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

如果 $d = 1, S = 6$, 那么从上面所得到的公式求得 $b = 4$. 于是 $a = 3, c = 5$, 且

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \sin \beta = \frac{4}{5} = \cos \alpha$$

因此, $\alpha = 36^\circ 52', \beta = 90^\circ - \alpha = 53^\circ 8', \gamma = 90^\circ$.

① 海伦(Heron, 不详), 古希腊人. —— 中译者注

② 事实上, 在三角形中, 最大的边所对的角才可能是钝角. 在我们的情形中, 只有边 c 所对的角才可能是钝角. —— 俄译者注

第2章 1895年试题及解答

4 有两类卡片,每类卡片都有无穷多张.试证:从这些卡片中,有 $2(2^{n-1} - 1)$ 种方法挑选出这样的组,它由 n 张有序的卡片组成,而且每一类卡片至少含有一张.

证明 我们约定认为,包含在一组中的卡片编了号码,并且我们来研究由 n 张卡片构成一组的所有可能的方法,而两种“不允许的”情况(整个一组全由一类卡片构成)以后再除去.

当 $n=2$ 时,可以有下面一些组

$$AA, AB, BA, BB \quad (1)$$

这里 BA 表示这样的组,第一张卡片是 B 类的,第二张卡片是 A 类的.

当 $n=3$ 时,由两类不同卡片可以构成 $2 \times 4 = 8$ (个)有序组.为了得到这些组,必须对式(1)中所列举的两个字母的有序组添加第三个字母(A 或 B).由三张卡片构成的组的全部情况看来是

$$AAA, ABA, BAA, BBA$$

$$AAB, ABB, BAB, BBB$$

例如,字母组合 BAB 表示这样的组:第一张卡片是 B 类的,第二张卡片是 A 类的,第三张卡片又是 B 类的.

当每一组的卡片数增加 1 张时,由两类卡片构成有序组的个数增加一倍.因此,有 2^n 种由 n 张两类卡片构成的不同有序组.这些组对应于由两个字母 A 和 B 构成的 n 位重复排列.*

从总的组数中除去本题条件不允许的两个组(完全由一类卡片构成的组),我们得到,对于 n 张两类卡片构成的组来说,所允许的有序组的总个数等于 $2^n - 2$. 不满足本题条件的两个卡片组成对应于同一个字母 A 或 B 的 n 位重复排列.

如果在由两个字母 A 和 B 的 n 位重复排列中,用数字 1 来代替 A ,用数字 2 来代替 B ,那么本题断言可以叙述如下:

有 $2^n - 2$ 个不同的 n 位数,这些 n 位数是由数字 1 和 2 构成的,且在这些 n 位数中,两个数字都至少出现一次.