

# 空间解析几何

(第二版)

黄宣国 编著



博学·数学系列



复旦大学出版社

[www.fudanpress.com.cn](http://www.fudanpress.com.cn)

# 空间解析几何

(第二版)

黄宣国 编著



博学·数学系列

常州大学图书馆  
藏书章



復旦大學出版社

[www.fudanpress.com.cn](http://www.fudanpress.com.cn)

图书在版编目(CIP)数据

空间解析几何/黄宣国编著. —2版. —上海: 复旦大学出版社, 2019. 8  
(复旦博学·数学系列)  
ISBN 978-7-309-14238-9

I. ①空… II. ①黄… III. ①立体几何-解析几何 IV. ①0182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 055678 号

空间解析几何(第二版)

黄宣国 编著

责任编辑/陆俊杰

复旦大学出版社有限公司出版发行

上海市国权路 579 号 邮编: 200433

网址: fupnet@fudanpress.com <http://www.fudanpress.com>

门市零售: 86-21-65642857 团体订购: 86-21-65118853

外埠邮购: 86-21-65109143 出版部电话: 86-21-65642845

杭州日报报业集团盛元印务有限公司

开本 787×960 1/16 印张 13 字数 228 千

2019 年 8 月第 2 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-14238-9/O · 667

定价: 29.00 元

---

如有印装质量问题, 请向复旦大学出版社有限公司出版部调换。

版权所有 侵权必究

## 博学·数学系列

### 《数学分析(上下册)》

(普通高等教育“十五”国家级规划教材)

欧阳光中 姚允龙 周 渊 编著

### 《高等代数学》(第三版)

(普通高等教育“十五”“十一五”“十二五”国家级规划教材)

姚慕生 吴泉水 谢启鸿 编著

### 《数学模型》(第三版)

(普通高等教育“十五”“十一五”国家级规划教材)

谭永基 蔡志杰 编著

### 《空间解析几何》(第二版)

黄宣国 编著

### 《概率论》(第二版)

应坚刚 何 萍 编著

### 《数理统计讲义》

(普通高等教育“十一五”国家级规划教材)

郑 明 陈子毅 汪嘉冈 编著

### 《常微分方程》

楼红卫 林 伟 编著

### 《抽象代数学》(第二版)

姚慕生 编著

### 《数值逼近》(第二版)

(普通高等教育“十一五”国家级规划教材)

蒋尔雄 赵风光 苏仰锋 编著

### 《应用几何教程》(第二版)

苏步青 华宣积 编著

### 《微分方程数值解》

陈文斌 程 晋 吴新明 李立康 编著

### 《高等代数》

上海财经大学应用数学系 主编

### 《最优化基础理论与方法》(第二版)

王燕军 梁治安 崔雪婷 编著

### 《偏微分方程》

张振宇 张立柱 编著

### 《线性代数与解析几何》

郑广平 裘祖干 陆章基 编著

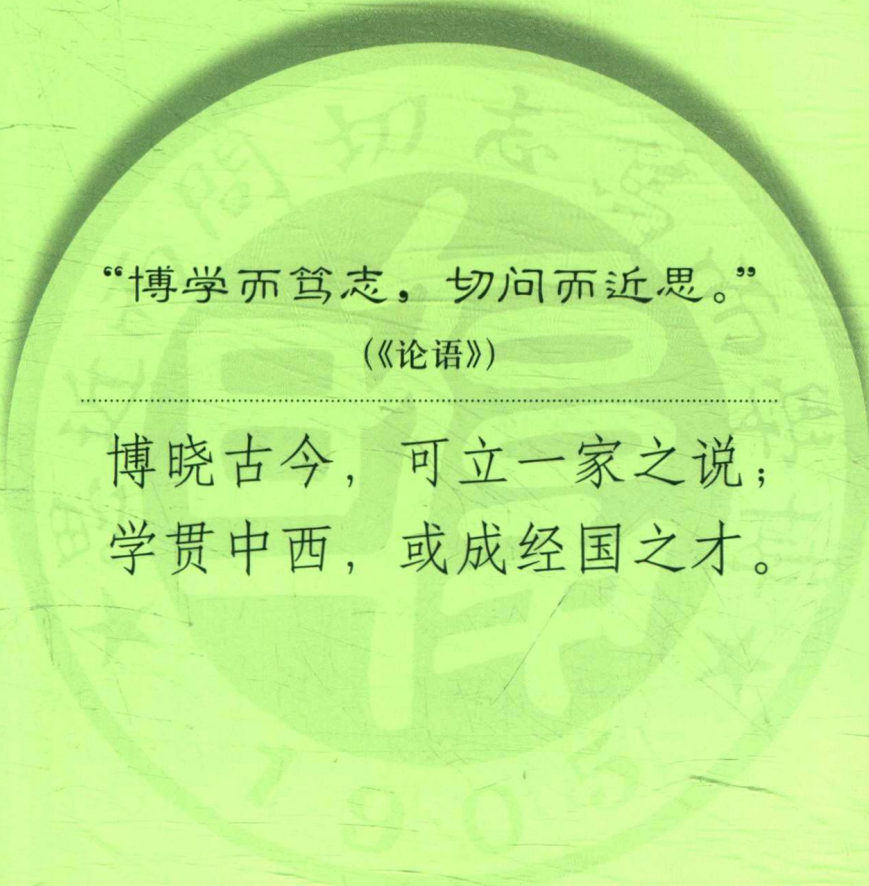
### 《文科高等数学》

(普通高等教育“十一五”国家级规划教材)

华宣积 谭永基 徐惠平 编著

### 《让数据告诉你》

陆立强 编著



“博学而笃志，切问而近思。”

(《论语》)

---

博晓古今，可立一家之说；  
学贯中西，或成经国之才。

## 内容提要

本书是作者在复旦大学数学系主讲“空间解析几何”课程20多年的结晶，全书共3章，第一章，直线与平面；第二章，曲线与二次曲面；第三章，非欧几何，包括球面三角形、射影平面几何与双曲平面几何等内容。书中许多定理和事实是重新证明过的，有些章节完全是作者自己编写的。每章附有一定数量的习题，其中不少习题是复旦大学数学系“空间解析几何”课程的考题。本书可作为综合大学数学和应用数学专业“空间解析几何”课程的教材，也可作为教师教学参考用书。

## 第二版前言

《空间解析几何》出版已经 15 年了,从书出版,到我退休,我用此书在复旦大学数学科学学院又执教了 9 届一年级新生.在教学过程中,对书中内容不断重新思考、打磨、修改.现在呈现在读者面前的第二版,全书大小修改近 70 处,增加了一些内容,补充了若干习题,这些题目绝大多数是我当年自编的考试题.对于新版书,最值得一提的是第三章第三节双曲平面几何正文中,设两条直线相交于一个双曲点,必导致这两条直线的夹角的正弦、余弦可定义的证明是一名复旦大学一年级新生告诉我的.教学相长,遇到好学生,是对老师的帮助,也是老师的幸福.现在第二版采用了他的证明,使得本书最后一节的质量较第一版有了明显的提升.

最后感谢复旦大学出版社对本书的再版.

黄宣国

2019 年 2 月

# 第一版前言

从 1989 年起,我开始执教复旦大学数学系一年级新生的“空间解析几何”课程.课时为每年一学期,每周 4 节课.除了一个学期外,已历 14 个春秋.从照本宣科、小增小减,到呈现在读者面前的这本教材,有一个漫长的编写、修改过程.全书含 3 章.第一章直线与平面;第二章曲线与二次曲面;第三章非欧几何,包括球面三角形、射影平面几何与双曲平面几何等内容.对照其他教材,读者从书中会发现,许多定理和事实是重新证明过的,有些章节完全是作者自己编写的.例如第二章 § 3 中关于二次曲面的分类;和本书最后一节双曲平面几何的内容,在手边只有几个结论的情况下,我花了一个多月时间,用射影平面几何的方法给出了双曲平面几何全部重要结论的严格证明.在 2000 年下半年,终于印成讲义.用该讲义我又在复旦大学数学系讲授了 4 个学期.在讲课过程中,吸收了同学们的好建议,对讲义作了一些修改,并补充了一些习题,才将书送交出版社.

凭我多年的教学经验,每周 4 节课,一学期完全能将全书讲完.

安徒生说:科学“是一条光荣的荆棘路”.热爱数学的人们只有不避艰险,才有希望到达光辉的顶峰.愿此话与读者共勉.

2004 年 2 月

# 目 录

第一章 直线与平面	1
§ 1.1 向量代数	1
§ 1.2 直线与平面	21
习题	33
第二章 曲线与二次曲面	36
§ 2.1 曲面与曲线的定义	36
§ 2.2 坐标变换	43
§ 2.3 二次曲面的分类	48
§ 2.4 直纹面	69
§ 2.5 非直纹面的二次曲面	87
§ 2.6 等距变换与仿射变换	97
习题	122
第三章 非欧几何	126
§ 3.1 球面三角形	126
§ 3.2 射影平面几何	130
§ 3.3 双曲平面几何	172
习题	187
附录 双曲平面内两直线夹角的交比定义	190
习题答案及提示	192
主要参考书目	200

# 第一章 直线与平面

在 19 世纪 30 年代,复数广泛用于表示平面上的向量. 向量的理论在整个 19 世纪和 20 世纪初叶得到了蓬勃的发展,形成了一个较完整的体系. 现在,我们就通过短短一学期的学习,来浏览这一体系的最基本的内容,为以后学习和工作奠定一个基础.

## § 1.1 向量代数

### 一、向量

在中学阶段,我们就知道,只有大小的量称为数量;而把既有大小,又有方向的量称为向量,而且向量的起点可以任意选取. 即在欧氏空间内,所有方向相同、长度相等的有向线段表示同一个向量. 例如图 1.1,当  $ABCD$  是一个平行四边形时,则有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}. \quad (1.1.1)$$

用有向线段  $\overrightarrow{OA}$  表示的向量有时记作  $\mathbf{a}$ , 它的长度记作  $|\mathbf{a}|$ .

与向量  $\mathbf{a}$  长度相等,方向相反的向量,称为  $\mathbf{a}$  的反向量,记作  $-\mathbf{a}$ . 那么,可以看到

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}, \quad -(-\mathbf{a}) = \mathbf{a}. \quad (1.1.2)$$

我们规定零向量  $\mathbf{0}$  是长度为零的向量. 当点  $A$  与点  $B$  重合时,  $\overrightarrow{AB}$  表示零向量.

我们知道实数的加、减、乘、除有很多性质. 例如,加法与乘法满足交换律. 即  $a+b=b+a$ ,  $ab=ba$ , 这里  $a, b$  是两个任意实数. 类似地,对于向量,从中学时代就知道向量的加法与减法有以下一些性质:

- (1) 设  $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ , 则向量  $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ ;
- (2)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  (见图 1.2);
- (3)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  (见图 1.3);

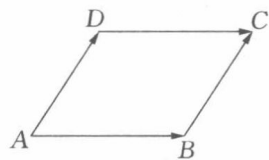


图 1.1

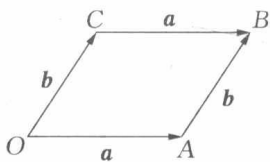


图 1.2

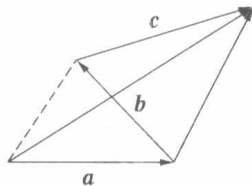


图 1.3

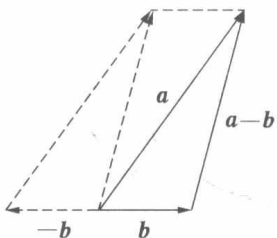


图 1.4

(4)  $a + 0 = a$ ;

(5)  $a + (-a) = 0$ ;

(6)  $a - b = a + (-b)$  (见图 1.4);

(7)  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

从(2)~(6)可以知道,向量的加法与减法的基本运算规律,与实数的加法与减法完全一样.

## 二、实数乘向量

在中学里,我们还知道,实数  $\lambda$  乘向量  $a$ ,得到一个向量  $\lambda a$ ,它的长度  $|\lambda a| = |\lambda| |a|$ ;当  $\lambda > 0$  时,  $\lambda a$  的方向与  $a$  相同;当  $\lambda < 0$  时,  $\lambda a$  的方向与  $a$  相反.

实数乘向量满足以下性质:

(1)  $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$ ;

(2)  $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ ;

(3)  $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ .

这里  $\lambda, \mu$  是任意实数,  $a, b$  是任意向量.

长度为 1 的向量称为单位向量. 对于任一非零向量  $a$ , 定义  $a$  的单位向量是  $\frac{a}{|a|}$ .

如果一组向量,用同一起点的有向线段来表示时,它们是共线的(或共面的),则称这组向量共线(或共面). 共线的两个向量  $a$  与  $b$ ,又称为平行的向量,记为  $a \parallel b$ . 规定零向量与任何一个向量共线. 共线的向量必定共面,任意两个向量必定共面(注意向量的起点可以移动).

当  $a$  不是零向量时,显然与  $a$  共线的向量必可表示成  $\lambda a$ , 这里  $\lambda$  是一个实数.

容易明白,两个非零向量  $a$  和  $b$  共线的充要条件是存在两个非零实数  $\lambda$  和  $\mu$ ,使得

$$\lambda a + \mu b = 0. \quad (1.1.3)$$

为方便,常任意选定平面或空间一点  $O$  作为公共起点,而将终点在  $A$ ,

$B, \dots, X$  等的向量分别记为  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{x}$  等.

**定理 1** (1) 设  $A, B$  为不同两点, 则点  $X$  在直线  $AB$  上的充要条件是: 存在唯一一对实数  $\lambda_1, \lambda_2$ , 使得

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b}, \quad \text{且 } \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad (1.1.4)$$

这里向量的公共起点不在直线  $AB$  上. 特别地, 点  $X$  落在线段  $AB$  上的充要条件是: 存在唯一一对非负实数  $\lambda_1, \lambda_2$ , 使得(1.1.4)式成立.

(2) 设  $A, B, C$  为不在同一直线上的 3 点, 则点  $X$  在  $A, B, C$  所决定的平面  $\pi$  上的充要条件是: 存在唯一的一组实数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , 使得

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \quad (1.1.5)$$

这里向量的公共起点不在平面  $\pi$  上. 特别地, 点  $X$  落在  $\triangle ABC$  内的充要条件是: 存在唯一的一组非负实数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , 使得(1.1.5)式成立.

(3) 设  $A, B, C, D$  为不在同一平面上的 4 点, 则点  $X$  在由  $A, B, C, D$  所决定的四面体内的充要条件是: 存在一组非负实数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , 使得

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} + \lambda_4 \mathbf{d}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1. \quad (1.1.6)$$

**证明** (1) 由于

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{AX} = \mathbf{x} - \mathbf{a}, \quad (1.1.7)$$

设点  $X$  落在直线  $AB$  上,  $\overrightarrow{AX}$  与  $\overrightarrow{AB}$  共线(见图 1.5), 则存在实数  $k$ , 使得

$$\overrightarrow{AX} = k \overrightarrow{AB}. \quad (1.1.8)$$

从(1.1.7)式和(1.1.8)式, 有

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = k(\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$

和

$$\mathbf{x} = (1 - k)\mathbf{a} + k\mathbf{b}. \quad (1.1.9)$$

令

$$\lambda_1 = 1 - k, \quad \lambda_2 = k, \quad (1.1.10)$$

则  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . 从上面推导可以看出, 当  $A$  和  $B$  给定时, 直线  $AB$  上的点  $X$  由实数  $k$  唯一确定. 反之, 从(1.1.9)式和(1.1.10)式, 有(1.1.8)式, 点  $X$  落在直线  $AB$  上. 当点  $X$  落在线段  $AB$  上, 当且仅当上述  $k \in [0, 1]$ . 当点  $X$  在线段  $AB$  内部时, 从(1.1.9)式可以知道  $\overrightarrow{AX} = \frac{k}{1-k} \overrightarrow{XB}$ . 特别, 当点  $X$  是线段  $AB$  的中点

时,  $k = \frac{1}{2}$ . 这时  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ . 由于向量的公共起点不在直线  $AB$  上, 则向量  $\mathbf{a}$ ,

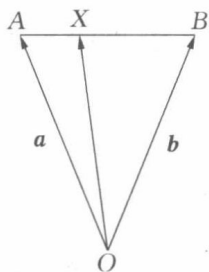


图 1.5

$\mathbf{b}$  不平行. 从  $\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} = \mu_1 \mathbf{a} + \mu_2 \mathbf{b}$  必能推出  $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2$ , 从而有唯一性. 这里  $\mu_1, \mu_2$  也是一对实数.

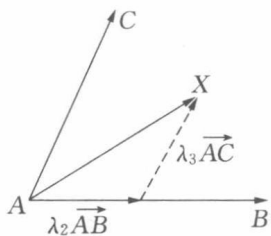


图 1.6

(2) 设点  $X$  落在平面  $\pi$  上, 即  $\overrightarrow{AX}$  与  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  共面, 如图 1.6 所示. 于是, 有实数  $\lambda_2, \lambda_3$ , 使得

$$\overrightarrow{AX} = \lambda_2 \overrightarrow{AB} + \lambda_3 \overrightarrow{AC}. \quad (1.1.11)$$

那么

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = \lambda_2 (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \lambda_3 (\mathbf{c} - \mathbf{a}),$$

和

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}, \quad (1.1.12)$$

这里  $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3$ .

当(1.1.12)式成立时, 必有(1.1.11)式, 则点  $X$  必落在 3 点  $A, B, C$  所决定的平面  $\pi$  内. 由于向量的公共起点不在平面  $\pi$  上, 则 3 个向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  不共面. 从  $\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} = \mu_1 \mathbf{a} + \mu_2 \mathbf{b} + \mu_3 \mathbf{c}$  必能推出  $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \lambda_3 = \mu_3$ , 这里  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  也是一组实数, 从而平面  $\pi$  内的点  $X$  由唯一一组满足(1.1.12)式的 3 个实数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  所决定.

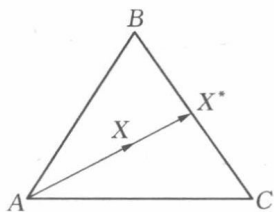


图 1.7

当点  $X$  落在  $\triangle ABC$  内时, 延长线段  $AX$  必交  $BC$  边于  $X^*$ , 如图 1.7 所示, 则有非负实数  $k \in [0, 1]$ , 使得

$$\overrightarrow{AX} = k \overrightarrow{AX^*}, \quad (1.1.13)$$

从上式, 有

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = k(\mathbf{x}^* - \mathbf{a}) = k(\lambda_1^* \mathbf{b} + \lambda_2^* \mathbf{c} - \mathbf{a}), \quad (1.1.14)$$

这里  $\lambda_1^*, \lambda_2^*$  是满足  $\lambda_1^* + \lambda_2^* = 1$  的两个非负实数.

从(1.1.14)式, 有

$$\mathbf{x} = (1 - k)\mathbf{a} + k\lambda_1^* \mathbf{b} + k\lambda_2^* \mathbf{c}. \quad (1.1.15)$$

记

$$\lambda_1 = 1 - k, \quad \lambda_2 = k\lambda_1^*, \quad \lambda_3 = k\lambda_2^*, \quad (1.1.16)$$

则  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  都是非负实数, 且满足

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1. \quad (1.1.17)$$

当(1.1.15)式~(1.1.17)式成立时, 必有(1.1.13)式和(1.1.14)式, 于是点  $X$  落在  $\triangle ABC$  内.

注 从上面的推导还可以看出,点  $X$  在  $\triangle ABC$  内的充要条件是  $\overrightarrow{AX} = k\overrightarrow{AX^*} = k(\lambda_1\overrightarrow{AB} + \lambda_2\overrightarrow{AC})$  (这里  $\lambda_1, \lambda_2$  是两个和为 1 的非负实数)  $= \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ , 这里  $\lambda = k\lambda_1 \in [0, 1], \mu = k\lambda_2 \in [0, 1], \lambda + \mu = k(\lambda_1 + \lambda_2) = k \in [0, 1]$ .

(3) 如果点  $X$  落在四面体  $ABCD$  内部, 连接  $AX$  并延长至交平面  $BCD$  于点  $X^*$ , 且点  $X^*$  落在  $\triangle BCD$  内, 那么存在实数  $k \in [0, 1]$ , 使得

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = \overrightarrow{AX} = k\overrightarrow{AX^*} = k(\mathbf{x}^* - \mathbf{a}), \quad (1.1.18)$$

且利用(2)的结论(1.1.12)公式, 有

$$\mathbf{x}^* = \lambda_2^*\mathbf{b} + \lambda_3^*\mathbf{c} + \lambda_4^*\mathbf{d}, \quad (1.1.19)$$

这里  $\lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*$  是 3 个非负实数, 满足  $\lambda_2^* + \lambda_3^* + \lambda_4^* = 1$ .

从(1.1.18)式和(1.1.19)式, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (1-k)\mathbf{a} + k\mathbf{x}^* = (1-k)\mathbf{a} + k(\lambda_2^*\mathbf{b} + \lambda_3^*\mathbf{c} + \lambda_4^*\mathbf{d}) \\ &= \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c} + \lambda_4\mathbf{d}, \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

这里  $\lambda_1 = 1-k, \lambda_2 = k\lambda_2^*, \lambda_3 = k\lambda_3^*, \lambda_4 = k\lambda_4^*$ ,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1, \quad (1.1.21)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  都是非负实数. 当  $A, B, C, D$  这 4 点固定时, 四面体  $ABCD$  内一点  $X$  由满足(1.1.21)式的 4 个非负实数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  确定, 充分性显然.

下面举两个向量应用的例题.

**例 1** (1) 如图 1.8 所示, 在  $\triangle ABC$  中,  $O$  是外心,  $G$  是重心,  $H$  是垂心, 求证:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}); \quad \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC};$$

(2)  $\triangle ABC$  是一个锐角三角形,  $H$  为垂心, 弦  $AB$  分  $\triangle ABC$  的外接圆圆周为 1:2 的两段圆弧, 点  $N$  是小圆弧  $\widehat{AB}$  的中点. 求证:  $CN \perp OH$  (见图 1.9).

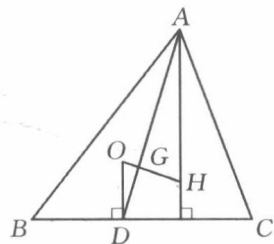


图 1.8

**证明** (1) 设  $D$  是边  $BC$  的中点, 利用平面几何知识知道

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}, \quad (1.1.22)$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \text{ (利用(1.1.22))}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) \text{ (利用定理 1(1)证明的最后叙述)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \vec{OA} + \frac{1}{3}(\vec{OB} - \vec{OA}) + \frac{1}{3}(\vec{OC} - \vec{OA}) \\
 &= \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).
 \end{aligned} \tag{1.1.23}$$

注 这里  $O$  改为空间任意一点, (1.1.23) 式仍然成立.

从平面几何知识知道, 点  $G$  在线段  $OH$  上, 且  $OG = \frac{1}{2}GH$ , 例如, 当  $\triangle ABC$  是锐角三角形时, 如图 1.8 所示. 利用  $\triangle AHG$  与  $\triangle DOG$  相似, 这里  $G$  是  $AD$  与  $OH$  的交点, 以及  $OD = R\cos A = \frac{1}{2}AH$ , 这里  $R$  是  $\triangle ABC$  的外接圆半径; 当  $\triangle ABC$  是钝角三角形时, 例如设  $A$  为钝角, 对应有  $OD = R\cos(\pi - A) = \frac{1}{2}AH$ . 当角  $A$  是直角时, 点  $A$  即垂心  $H$ , 斜边  $BC$  中点即外心  $O$ . 于是, 有

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OH}. \tag{1.1.24}$$

从(1.1.23)式和(1.1.24)式有结论(1).

(2) 由于  $\triangle ABC$  是锐角三角形, 外心  $O$ , 垂心  $H$  都在  $\triangle ABC$  内部, 因此

$$\vec{CH} = \vec{OH} - \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}. \tag{1.1.25}$$

这里利用了(1)的结论.

又

$$\angle AOB = \frac{2\pi}{3}, \tag{1.1.26}$$

且点  $N$  是小圆弧  $\widehat{AB}$  的中点, 则

$$\angle AON = \angle BON = \frac{\pi}{3}, \tag{1.1.27}$$

因而  $\triangle AON$  与  $\triangle BON$  都是等边三角形. 四边形  $AOBN$  是一个菱形. 于是

$$\vec{ON} = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{CH} \quad (\text{利用(1.1.25)式}). \tag{1.1.28}$$

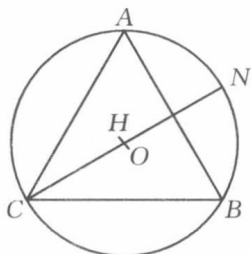


图 1.9

当两条直线  $ON$  与  $CH$  不重合时,  $OCHN$  是一个平行四边形. 又  $OC = ON$ , 则  $OCHN$  也是一个菱形, 对角线  $CN$  与  $OH$  互相垂直.

由(1.1.28)式, 当点  $C, O, H, N$  这 4 点在同一条直线上时,  $CN$  为直径,  $O, H$  两点重合, 结论仍然认为成立

(这里规定零向量垂直于任一向量).

**例 2**  $ABCD$  是平面内一个凸四边形,  $BC$  平行于  $AD$ .  $M$  是  $CD$  的中点,  $P$  是  $MA$  的中点,  $Q$  是  $MB$  的中点. 直线  $DP$  和  $CQ$  交于点  $N$ .

求证: 点  $N$  不在  $\triangle ABM$  的外部的充要条件是  $\frac{1}{3} \leq \frac{AD}{BC} \leq 3$ .

**证明** 如图 1.10 所示, 设点  $M$  为坐标原点, 与  $AD$  平行的直线为  $x$  轴, 建立直角坐标系. 于是点  $M$  的坐标为  $(0, 0)$ , 设点  $C$  的坐标是  $(a, b)$ , 这里  $b < 0$ . 点  $D$  的坐标为  $(-a, -b)$ . 记点  $B$  的坐标是  $(c, b)$ , 点  $A$  的坐标为  $(d, -b)$ , 则线段  $MA$  的中点  $P$  的坐标是  $(\frac{d}{2}, -\frac{b}{2})$ , 线段  $MB$  的中点  $Q$  的坐标是  $(\frac{c}{2}, \frac{b}{2})$ . 直线  $CQ$  的方程是

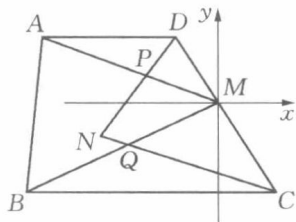


图 1.10

$$y - b = \frac{b}{2a - c}(x - a), \quad (1.1.29)$$

直线  $DP$  的方程是

$$y + b = \frac{b}{2a + d}(x + a). \quad (1.1.30)$$

解由(1.1.29)式和(1.1.30)式组成的联立方程组, 可以求出点  $N$  的坐标为  $(\frac{2(c-a)(2a+d)}{c+d} - a, \frac{b(c-d-2a)}{c+d})$ . 记  $x$  轴的单位正向量为  $e_1$ ,  $y$  轴的单位正向量为  $e_2$ , 则

$$\overrightarrow{MN} = \left[ \frac{2(c-a)(2a+d)}{c+d} - a \right] e_1 + \frac{b(c-d-2a)}{c+d} e_2, \quad (1.1.31)$$

$$\overrightarrow{MA} = de_1 - be_2, \quad \overrightarrow{MB} = ce_1 + be_2. \quad (1.1.32)$$

求实数  $\lambda$  和  $\mu$ , 使得

$$\overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{MB} + \mu \overrightarrow{MA}. \quad (1.1.33)$$

由(1.1.31)式、(1.1.32)式和(1.1.33)式知道  $\lambda, \mu$  满足下述方程组:

$$\begin{cases} \lambda c + \mu d = \frac{2(c-a)(2a+d)}{c+d} - a, \\ \lambda b - \mu b = \frac{b(c-d-2a)}{c+d}. \end{cases} \quad (1.1.34)$$

解上述方程组, 得

$$\begin{cases} \lambda = \frac{(a+d)(3c-4a-d)}{(c+d)^2}, \\ \mu = \frac{(a-c)(c-4a-3d)}{(c+d)^2}. \end{cases} \quad (1.1.35)$$

由于

$$AD = -a-d, \quad BC = a-c, \quad (1.1.36)$$

利用(1.1.35)式和(1.1.36)式,有

$$\begin{cases} \lambda = \frac{AD(3BC-AD)}{(AD+BC)^2}, \\ \mu = \frac{BC(3AD-BC)}{(AD+BC)^2}. \end{cases} \quad (1.1.37)$$

从上式,有

$$\lambda + \mu = \frac{6AD \cdot BC - (AD^2 + BC^2)}{(AD+BC)^2}. \quad (1.1.38)$$

明显地,有

$$\begin{aligned} 2AD \cdot BC &\leq AD^2 + BC^2, \\ 4AD \cdot BC &\leq (AD+BC)^2. \end{aligned} \quad (1.1.39)$$

从(1.1.38)式和(1.1.39)式,有

$$\lambda + \mu \leq \frac{4AD \cdot BC}{(AD+BC)^2} \leq 1. \quad (1.1.40)$$

由定理 1(2)的注,(1.1.37)式和(1.1.40)式,点  $N$  不在  $\triangle ABM$  的外部的充要条件是

$$3BC \geq AD, \quad 3AD \geq BC. \quad (1.1.41)$$

(1.1.41)式等价于

$$\frac{1}{3} \leq \frac{BC}{AD} \leq 3. \quad (1.1.42)$$

这就是结论.

### 三、内积

设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  是两个非零向量. 将这两个向量的起点平行移动到同一点  $O$ . 向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  分别所在的两条直线有两个夹角, 一个在  $[0, \pi]$  内, 另一个在  $(\pi, 2\pi]$  内. 我们规定