

点石成金

百名中学校长、名师、教育科研院（所）长 

如何 高效学数学

（初中版）

入门 ▶ 深化 ▶ 中考
贯通初中三年

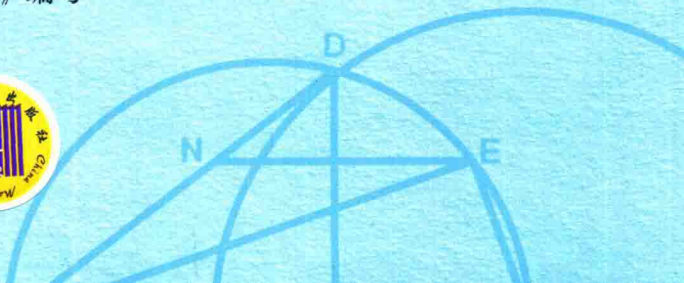
肖林元◎主编

优化数学思维，懂一题会一类
优选最新**中考**经典试题，分类讲解**实用**解题技法

★ 学生学习必备宝典 ★ 家长助学全能工具 ★ 教师提优参考教案

根据教育部《全日制义务教育数学课程标准》编写
国内初中数学教材各版本通用

业出版社
CHINE PRESS



百名中学校长、名师、教育科研院（所）长 

如何 高效学数学

（初中版）

入门 ▶ 深化 ▶ 中考
贯通初中三年

主 编：肖林元

副主编：刘权华

参 编：孙四周 赵齐猛 侯正永 张爱平 于 健

 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

本书根据教育部《全日制义务教育数学课程标准》精神，由一批知名数学特级教师编写，是专为初中生如何高效学数学而量身定做的，全国各版本教材通用。

本书的最大特色是不囿于普通的习题集，而是通过经典例题和案例的阐述，帮助初中生提高数学思维和解题能力，掌握数学学习的方法和技巧，从根本上提高数学学习成绩，从而真正学会数学，爱上数学。

书中例题多选自全国各地最新的中考试题和模拟试题，所有例题难度均贴近中考难度，并依据知识点进行了分类，读者可根据自己的学习进度，选择合适的例题阅读学习。

本书是初中生必备的数学学习宝典，能常阅常新，内容涵盖了初中数学学习所需的基本方法、技巧和思维，适合初中各年级学生使用。初一学生可将其作为初中数学入门书，初二学生可将其作为初中数学复习书，初三学生可将其作为中考数学备考书。

本书还特别适合家长和孩子共同阅读，是家长辅导孩子学数学的全能工具书。本书对提高中青年教师的教学水平也大有裨益。

图书在版编目 (CIP) 数据

如何高效学数学：初中版 / 肖林元主编. —北京：
机械工业出版社，2014.6 (2017.4 重印)
ISBN 978-7-111-46848-6

I. ①如… II. ①肖… III. ①中学数学课—初中—数
学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 105682 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑：杨晓昱 责任印制：常天培

版式设计：张文贵

保定市中华美凯印刷有限公司印刷

2017 年 4 月第 1 版·第 6 次印刷

184mm × 260mm · 14 印张 · 346 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-46848-6

定价：32.80 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

服务咨询热线：010-88361066

读者购书热线：010-68326294

010-88379203

封面防伪标均为盗版

网络服务

机工官网：www.cmpbook.com

机工官博：weibo.com/cmp1952

金书网：www.golden-book.com

教育服务网：www.cmpedu.com

百名中学校长、名师、教育科研院（所）长

联袂推荐本书

中国教育科学研究院 杨九诠 教授 主任

中国教育科学研究院 毕诚 教授

上海市教育科学研究院普通教育研究所

汤林春 教授 常务副所长

上海市教育科学研究院普通教育研究所

徐士强 主编

重庆市教育科学研究院 李长明 副院长

江西省教育科学研究院 唐春萍 副院长

海南省教育研究培训院 林梓华 主任

江苏省基础教育研究所 王一军 副所长

江苏省教育科学研究院 张晓东 副主任

江苏省教育科学研究院 蔡守龙 副主任

江苏省教育科学研究院 李善良 研究员

武汉市教育科学研究院 王池富 院长

成都市教育科学研究院 秦建平 副院长

沈阳市教育研究院 赵海千 主任

杭州市教育科学研究所 沈美华 副所长

南通市教育科学研究中心 袁亚良 教研员

无锡市教育研究中心 徐敏南 书记 特级教师

盐城市教育科学研究院 金正平 院长

扬州市教育局教学研究室 辜伟节 主任

连云港市教育科学研究所 孙朝仁

所长 特级教师

张家港市教育局教研室 袁建忠 书记

盐城市教育科学研究院 许林 副院长

泰州市教育局教研室 石志群 主任 特级教师

南京市教学研究室 朱建明 副主任 特级教师

南京市教学研究室 孙旭东 数学教研员

鄂尔多斯市教育教学研究室 辛曦丽 书记

湖北大学数学与计算机科学学院 汪江松 教授

南京师范大学教师教育学院 王立新 副院长

南京师范大学附属中学 葛军 校长

南京大学附属中学 王四宝 副校长

深圳中学 王占宝 校长

深圳市福田中学 郭其俊 校长

上海交通大学附属中学嘉定分校 徐辉

数学教研组组长

台州市教育科学研究所 赵凌云 所长

台州市教育科学研究所 李哉平 副所长

南京市栖霞区教师进修学校 李宝玉

副校长 特级教师

宿迁市教育局教研室 于明 主任 特级教师

如皋市教育局教研室 万国全 主任

镇江市新区社发局 赵勇 副局长

南京市钟英中学（原南京市第三初级中学）

钱彤 校长

南京市钟英中学（原南京市第三初级中学）

王小虎 副校长

南京市建邺区教师进修学校 唐德海 书记

南京树人国际学校 王粉山 副校长

南京市玄武区教师进修学校 丁加旗 副校长

南京市第十二中学 张云飞 书记 特级教师

南京市鼓楼区教师进修学校 倪绍军 主任

南京市大厂高级中学 王飞 校长

南京市旭东中学 赵林刚 校长

南京市虹苑中学 王涛 校长

南京市虹苑中学 李明顺 副校长

江苏省靖江高级中学 钱志华 主任

江苏省清江中学 钱旭东 数学教研组组长

江苏省盱眙县中学 周家忠 主任

江苏省江浦高级中学 陈久贵 副校长

江苏省射阳县第二中学 秦曙东 副校长

山东省巨野县实验中学 张守东 校长

常州市兰陵中学 陈世亨 副校长

姜堰市罗塘高级中学 钱厚林 校长

蚌埠市中小学教师进修学校 罗琨 校长

扬州市邗江区瓜州中学 卢国田 校长

江苏省淮阴中学 俞光军 主任

江苏省淮阴中学 沈迎华 数学教研组组长

南京市第五十四中学 周波 校长

南京市白下区教师进修学校 潘春雷 校长

淮安市平桥中学 刘跃山 副校长

南京市南化第二中学 陈世锦 校长

南京市金陵中学河西分校 徐沂 副校长

南京市鼓楼区教师进修学校 闻建华 副校长

南京市秦淮区教师进修学校 王占发 校长

南京市第二十九初级中学 胡松 主任

南京市鼓楼区教师进修学校 宋数山 书记

南京市第五十中学 许天枢 主任

无锡市辅仁高级中学 周伟忠 主任 特级教师

南京航空航天大学附属初级中学 王平 主任

淮安曙光双语学校 徐爱华 副校长

淮安外国语学校 董兆国 数学教研组组长

淮安外国语学校 贾芸芸 教师

盱眙县维桥初级中学 沈启峰 校长

盱眙县旧铺中学 陈吉斌 副校长

南京市中华中学 宋辉 副校长 特级教师

南京市雨花台高级中学 杭秉全 副校长

南京田家炳高级中学 华勇 校长

沭阳县建陵高级中学 王健 校长

沭阳县怀文中学 徐春山 校长

南京市第五十中学 郭华敏 教师

南京市宁海中学分校 卜以楼 主任

南京市高淳区第一中学 顾香才 主任 特级教师

南京第二十九中学致远校区 鞠峰 主任

连云港市海州区板浦初级中学 陈锡云 主任

南京市科利华中学 张华 副校长

沭阳县教育局教研室 魏良亚 主任

沭阳县如东实验学校 吴国喜 主任

扬中市第一中学 王昱 教师

镇江市第四中学 蒋红 教务主任

镇江市江南学校 李智慧 数学教研组组长

泰州市许庄初级中学 叶新和 数学教研组组长

南京师范大学附属中学树人中学 张建波 校长

南京师范大学附属中学树人中学 李克强 主任

南京师范大学附属中学新城初级中学 叶旭山

副校长

南京师范大学附属中学江宁分校 张士民 校长

南京师范大学附属中学新城初级中学 韩晖 校长

(排名不分先后)

前言

工作 32 年来，我一直从事数学教学和研究，当中学数学教师 18 年，从事数学教与学的研究 14 年，教过初中、高中，研究过竞赛，越研究越觉得数学好玩、不难学，越来越发现数学很美，以致我常常被数学的波澜壮阔之势、高瞻远瞩之能、对称和谐之美、茅塞顿开之境所陶醉。

数学，作为衡量一个人能力的重要学科，从小学到高中，大多数同学对它情有独钟，投入了大量的时间与精力。然而并非人人都是成功者，据不完全统计，约有近四成的中、小学生害怕数学。有的同学讨厌数学到了想放弃的地步，害怕数学到了恐惧的程度，我想这绝不是数学本身的原因。

2014 年初，我登上南京市“名师公益大讲堂”，为全市从小学到高中的学生、家长做了一次讲座，这次讲座受到了学生、教师和社会的普遍欢迎，经过媒体报道，以及视频在线点播，所受到的美誉是我始料不及的。恰巧此时，本书编辑邀请我，给全国初中学生写本如何高效学数学的书，并要求根据初中生的知识结构，选择例题和案例，有效阐述数学学习方法和技巧。授人以鱼，不如授之以渔。授之以渔，才能举一反三。事实告诉人们，当数学思维、数学技巧和数学方法等智力因素或非智力因素被例题和案例有效演绎时，学生们学数学的主动性就会有很大提高。因此，能帮助学生们事半功倍地提高学习效果，这一直是我乐意做的一件事。

后来，我在南京市和其他城市组织了一支师德高、能力强、水平高的数学名师队伍，通过在全国范围内对初中学生学习数学开展问卷调查，了解了初中学生学习数学的主要困难和原因。目前，初中学生学习数学存在较大的畏难情绪，甚至谈数色变，究其原因，主要有三点：一是学习兴趣不能持续；二是学习习惯不佳；三是没有掌握好的学习方法。由此，确定了本书的基本体例。

在编写过程中，我常常看到老师们为寻找解决问题的更好办法而激烈地争论，我深深地感动于老师们为孩子们写书的敬业态度和钻研精神。相信当孩子们阅读这本书后，便会发现数学其实很好玩，很有用，数学可以使我们的思维更严谨，使我们变得更聪明，归根到底一句话：数学很美丽！

下面简要介绍本书的阅读方法：

一、你喜欢数学，数学就会喜欢你。

如果你对数学存在畏难情绪，建议阅读第二章兴趣篇。这一章主要解决了数学学习的兴趣问题。在阅读这一章时，建议结合自己的学习实际，思考一下，为什么要培养学习数学的兴趣？这一章为你提供了六种培养数学学习兴趣的途径，必有一条途径适合你。

二、你要学好数学，就要有好的学习习惯。

你想数学考试得高分，建议你重点阅读第三章习惯篇。这一章主要介绍了数学学习习惯问题。在阅读中，要注意数学学习应该掌握哪些好习惯，如何来培养这些好习惯。

三、你要学得巧妙，就要学会方法。

数学是使人越学越聪明的学科，方法必不可少。在第四章方法篇和第五章考试篇中，通过对大量经典例题的讲解和点评介绍了数学学习和考试的方法，能够有效帮助你理解并运用这些方法。这些方法会使你如虎添翼，帮助你越学越聪明。

如果你对数学还有更高的追求，产生了更深的兴趣，建议阅读其余三章：第一章认识篇介绍了如何认识数学，数学有哪些特点；第六章能力篇介绍了如何有效地提高数学能力；第七章文化篇则重点介绍了数学文化，数学史上发生了哪些重大的事情。如果你能思考和解答数学史上的那些难题，此时，你的数学学习已经提高到一个新的境界，那我要真心祝愿你。

同学们，但愿这本书能够给你启发，助你思考，助你成功！

主编 肖林元

如何使用本书

在正式阅读本书之前，建议同学们做到以下两点，这将大大增加您使用本书进行数学学习的效果。

首先，建议您不要大略读过本书，便将其束之高阁。您不妨从头到尾浏览一遍，以了解全书架构，然后根据自己的学习进度和兴趣点随时参阅。即使您已了解本书讲述的知识、方法、技巧和能力，在整个初中阶段，也能常阅常新。

其次，建议您在阅读中逐步学会以“小老师”的角色，认真地、全力以赴地阅读和思考，然后，再参阅答案解析和点评。趁记忆犹新之际，比如在第二天，就与同学分享或讨论读书心得。这种阅读方式可以增强记忆、加深体会、而且会有更强烈的动机去运用本书所讲述的数学学习习惯、方法和技巧。同时，坦诚地与同学分享读书心得，可以改变形象，赢得友谊。

最后，衷心祝愿同学们在数学学习中快乐成长！



案例 1-12

巴顿的战舰与浪高

1942年10月，巴顿将军率领4万多美军，乘100艘战舰，直奔距离美国4000km的摩洛哥，计划在11月8日凌晨时登陆。11月4日，海面上突然刮起西北大风，惊涛骇浪使舰艇倾斜达 42° 。直到11月6日天气仍无好转。华盛顿总部担心舰队会因大风而全军覆没，电令巴顿的舰队改在地中海沿海的任何其他港口登陆。巴顿回电：“不管天气如何，我将按原计划行动。”11月7日午夜，海面突然风息浪静，巴顿军团按计划登陆成功。事后人们说这是侥幸取胜，这位“血胆将军”拿将士的生命作赌注。

点评：其实巴顿将军在出发前就和气象学家详细研究了摩洛哥海域风浪变化的规律和相关参数，知道11月4日至7日该海域虽然有大风，但根据该海域往常最大浪高波长和舰艇的比例关系，恰恰达不到翻船的程度，不会对整个舰队造成危险。相反，11月8日却是一个有利于登陆的好天气。巴顿正是利用科学预测和可靠边缘参数，抓住“可怕的机会”，突然出现在敌人面前。

通过来源于生活的案例，展示数学之美。

深入点评，帮助理解。

法一：设这一堆桃子至少有 x 个，由于每次平均分成五堆后都多一个，因此借给它们 4 个，于是连同这 4 个桃子，一共有 $(x+4)$ 个桃子。

假定这 5 只猴子分别拿走了（包括它们各自所吃掉的 1 个） a 、 b 、 c 、 d 、 e 个桃子。于是， $a = \frac{x+4}{5}$ ， $b = \frac{4(x+4)}{25}$ ， $c = \frac{16(x+4)}{125}$ ， $d = \frac{64(x+4)}{625}$ ， $e = \frac{256(x+4)}{3125}$ 。而 e 为整数，且 256 与 3125 互质，因此 $x+4$ 应是 3125 的倍数，于是 $x+4 = 3125k$ ，其中 k 为自然数。

显然，当 $k=1$ 时， $x=3121$ 。即这 5 只猴子至少摘了 3121 个桃子。

法二：设第 5 只猴子拿走了 x 个桃子，那么第 5 只猴子取桃子前的桃子数是 $(5x+1)$ ；第 4 只猴子取桃子前，还有的桃子数是 $[\frac{5}{4}(5x+1)+1]$ ；第 3 只猴子取桃子前，还有 $[\frac{5}{4}[\frac{5}{4}(\frac{5}{4}(5x+1)+1)+1]]$ 个桃子；第 2 只猴子取桃子前，还有 $[\frac{5}{4}[\frac{5}{4}[\frac{5}{4}[\frac{5}{4}(5x+1)+1]+1]+1]]$ 个桃子；第 1 只猴子取桃子前，一共有 $\frac{5}{4}[\frac{5}{4}[\frac{5}{4}[\frac{5}{4}(5x+1)+1]+1]+1]+1 = 12x+8 + \frac{53(x+1)}{256}$ 个桃子。

因为 $x+1$ 应该是 256 的倍数，设 $x+1 = 256k$ ，显然，当 $k=1$ 时， $x=255$ ，这时桃子数最少为 3121 个。

多种解法，
拓展思维。

思考题

1-1 烤面包的时间

史密斯家里有一个老式的烤面包器，一次只能放两片面包，每片烤一面。要烤另一面时，就得取出面包片，把它们翻个面，然后再放回烤面包器中。烤面包器对放在它上面的每片面包，正好要花 1 分钟的时间烤完一面。

一天早晨，史密斯夫人要烤 3 片面包，两面都烤。史密斯先生越过报纸的顶端注视着她夫人。当他看了夫人的操作后，他笑了。她花了 4 分钟时间。“亲爱的，你可以少用一点时间烤完这 3 片面包，”他说，“这可以使我们电费账单上的金额减少一些。”

史密斯先生说说得对不对？如果他说得对，那他夫人该怎样才能在不 4 分钟的时间内烤完那 3 片面包呢？

巩固已学知识，
检测学习效果。

数学 小故事

1 名优秀数学家的作用超过 10 个师的兵力

第二次世界大战中，美国曾经宣称：1 名优秀数学家的作用超过 10 个师的兵力。故事来源于 1943 年以前，在大西洋上英美运输船队常常受到德国潜艇的袭击，当时，英美两国困于实力受限，又无力增派更多的护航舰艇，一时间，德军的“潜艇战”搞得盟军焦头烂额。

为此，有位美国海军将领专门去请教了几位数学家，数学家们运用概率论分析后发现，舰队与敌潜艇相遇是一个随机事件，按数学角度来看这一问题，它具有一定的规律。一定数量的船（如 100 艘）编队规模越小，编次就越多（如每次 20 艘，就要有 5 个编次）；编次越多，与敌人相遇的概率就越大。比如 5 位同学放学都回自己家里，老师要找 1 位同学的话，随便去哪家都行。但若这 5 位同学都在其中某一家的话，老师要找几家才能找到，一次找到的可能性只有 20%。

美国海军接受了数学家的建议，命令船队在指定海域集合，再集体通过危险海域，然后各自驶向预定港口。结果奇迹出现了！盟军舰队遭袭被击沉的概率由原来的 25% 降低为 1%，大大减少了损失，保证了物资的及时供应。

开阔视野，
放松心情。



问·答

问：为什么老师讲的我都会，自己做就不会？

答：这是一个多年来一直困扰教育教学的难题，理科尤其是数学更为突出。“懂”和“会”的思维过程有区别，心理水平有差异。“懂”是指能够理解别人所讲内容的正确性及逻辑关系，能够理解别人的思维过程，甚至只能理解别人的思维过程的成果。不一定对所用知识、方法真正理解，仅仅在听别人讲解时才回忆起听过的内容，而“会”则要求能够独立地分析问题，进行联想思维，实现已有知识结构与要解决的问题的有效“连接”。

“懂”的要求远远低于“会”。一方面“懂”的过程中信息输入比较全面，即使听者原本没有记住的知识或方法，在他人的讲解过程中都可以迅速回忆，而“会”则要求独立运用相关知识和方法，没有记住就无法掌握；另一方面“懂”的过程仅仅是确认他人判断的正确性，而“会”则要求自己找出问题的对策。

解答常见问题，
明确学习方法。

例 23 (2013·绍兴) 教室里的饮水机接通电源就进入自动程序，开机加热时每分钟上升 10°C ，加热到 100°C ，停止加热，水温开始下降，此时水温 ($^{\circ}\text{C}$) 与开机后用时 (min) 成反比例关系。直至水温降至 30°C ，饮水机关机，饮水机关机后即刻自动开机，重复上述自动程序。若在水温为 30°C 时，接通电源后，水温 y ($^{\circ}\text{C}$) 和时间 (min) 的关系如图 5-20，为了在上午第一节下课时 (8:45) 能喝到不超过 50°C 的水，则接通电源的时间可以是当天上午的 ()

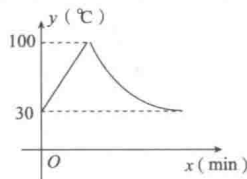


图 5-20

优选最新中考试题，把握中考命题脉搏。

☆☆ 表示初一例题，
☆☆☆ 表示初二例题，
☆☆☆☆ 表示初三例题。

- A. 7:20 B. 7:30 C. 7:45 D. 7:50

参考答案：

例 21 解：如图 5-22，校门关闭时，取其中一个菱形 $ABCD$ 。

根据题意，得 $\angle BAD = 60^{\circ}$ ， $AB = 0.3$ 米。

\therefore 在菱形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ，

$\therefore \triangle BAD$ 是等边三角形，

$\therefore BD = AB = 0.3$ 米。

\therefore 大门的宽是： $0.3 \times 20 \approx 6$ (米)；

校门打开时，取其中一个菱形 $A_1B_1C_1D_1$ 。

根据题意，得 $\angle B_1A_1D_1 = 10^{\circ}$ ， $A_1B_1 = 0.3$ 米。

\therefore 在菱形 $A_1B_1C_1D_1$ 中， $A_1C_1 \perp B_1D_1$ ，交 B_1D_1 于点 O_1 ， $\angle B_1A_1O_1 = 5^{\circ}$ ，

\therefore 在 $\text{Rt}\triangle A_1B_1O_1$ 中，

$B_1O_1 = \sin \angle B_1A_1O_1 \cdot A_1B_1 = \sin 5^{\circ} \times 0.3 = 0.02616$ (米)，

$\therefore B_1D_1 = 2B_1O_1 = 0.05232$ 米，

\therefore 伸缩门的宽是： $0.05232 \times 20 = 1.0464$ 米；

\therefore 校门打开的宽度为： $6 - 1.0464 = 4.9536 \approx 5$ (米)。

故校门打开了 5 米。

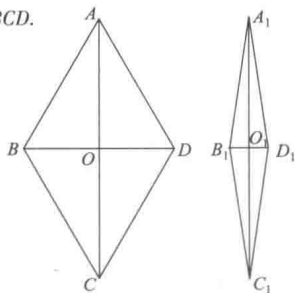


图 5-22

全面解析，
优化思维。

目 录

前 言

如何使用本书

第一章 认识篇

1

- 一、数学是什么 //1
 - (一) 数学是什么 //1
 - (二) 用数学的眼光看问题 //2
 - 1. 数学很有用 //2
 - 2. 数学很好玩 //4
 - 3. 数学学习会使你的思维更严谨 //5
 - 4. 数学使你变聪明 //6
- 二、数学有哪些显著的特点 //8
 - 1. 高度抽象性 //8
 - 2. 逻辑严密性 //9
 - 3. 广泛应用性 //11
- 三、初中数学学什么 //13
 - (一) 初中数学学什么 //13
 - 1. 内容 //13
 - 2. 知识结构 //13
 - 3. 思想方法 //13
 - 4. 能力的培养 //14
 - (二) 案例分析 //14
 - 1. 字母表示数 //14
 - 2. 从“算术法”到“方程” //14

第二章 兴趣篇

18

- 一、为什么说学好中学数学尤其需要培养兴趣 //18
 - (一) 兴趣是最好的老师 //18
 - (二) 数学是一门特殊的学科 //19
 - (三) 学好初中数学的关键是兴趣 //19
- 二、培养兴趣有哪些主要策略 //21



- (一) 数学学习生活化 //21
- (二) 数学学习情感化 //22
 - 1. 人生理想教育 //22
 - 2. 喜爱数学老师 //22
- (三) 增强数学学习的自信心 //23
 - 1. 重视概念的学习, 加深对数学基本概念和公式的理解 //23
 - 2. 掌握数学的基本思想和通性通法 //23
- (四) 树立数学学习的好榜样 //23
- (五) 充分感受数学美 //24
 - 1. 数学的对称美——两岸青山相对出 //24
 - 2. 数学的和谐美——浓妆淡抹总相宜 //25
 - 3. 数学的奇异美——塞下秋来风景异 //26
 - 4. 数学的简洁美——看似寻常最奇崛 //27
 - 5. 数学的数字美——一枝红杏出墙来 //28
 - 6. 数学的符号美——万紫千红总是春 //28
- (六) 充分认识数学学习的核心价值 //29

第三章 习惯篇

32

- 一、数学学习习惯是什么 //32
- 二、数学学习习惯有哪些 //33
- 三、怎样培养数学学习习惯 //34
 - (一) 自主学习的习惯 //34
 - 1. 预习的习惯 //34
 - 2. 复习的习惯 //37
 - 3. 反思的习惯 //39
 - 4. 纠错的习惯 //42
 - 5. 做题的习惯 //44
 - (二) 课堂学习的习惯 //47
 - 1. 欣赏老师的习惯 //48
 - 2. 专注倾听的习惯 //49
 - 3. 记课堂笔记的习惯 //52
 - 4. 积极思考的习惯 //55

第四章 方法篇

57

- 一、数学思想方法是什么 //57
- 二、常见的数学思想方法有哪些 //57
- 三、如何掌握数学思想方法 //58
 - (一) 学会分类 //58
 - 1. 在“数与代数”领域需要分类的问题 //58

2. 在“空间与图形”领域需要分类的问题 //60
3. 在综合性背景中需要分类的问题 //62
- (二) 学会转化和化归 //67
 1. 复杂问题向简单问题转化 //68
 2. 已知与未知的转化 //70
 3. 正面与反面的转化 //71
 4. 数与形的转化 //72
 5. 一般与特殊的转化 //75
 6. 动与静的转化 //78
- (三) 学会数形结合 //79
 1. 以形助数，借助于几何直观阐明数之间的关系 //80
 2. 以数释形，借助于数的精确性阐明形的某些属性 //83
 3. 数形对照，抽象的数学语言与几何直观相结合 //83
- (四) 学会建模 //86
 1. 建立适当数学模型解决实际问题 //86
 2. 利用函数模型解决最值问题 //92
- 四、掌握数学方法的几点注意 //95
 1. 求教与自学相结合 //95
 2. 学习与思考相结合 //95
 3. 学习与运用相结合 //95
 4. 模仿与创新相结合 //95

第五章 考试篇

97

- 一、重视考试内容 //97
 - (一) 如何审题 //97
 1. 读思写画并举 //97
 2. 找准关键词 //99
 3. 挖掘隐含条件 //101
 4. 排除干扰条件 //103
 5. 识别题目中的“陷阱” //105
 6. 联系实际 //107
 - (二) 如何解题 //111
 1. 解选择题的方法 //111
 2. 解填空题的方法 //113
 3. 解简答题的方法 //115
 - (三) 如何书写 //131
 1. 关注书写的规范 //131
 2. 关注按步骤给分 //133
 3. 关注书写的清楚 //140



- (四) 如何检验 //141
- 1. 取特殊值检验 //141
- 2. 代入检验 //142
- 3. 换一种方法检验 //142

二、调节考试心理 //143

- (一) 积极暗示, 强化自信 //143
- (二) 适度紧张, 优化情绪 //144
- (三) 把握节奏, 潜心解题 //145
- 1. 两慢两快 //145
- 2. 四先四后 //145
- (四) 分步分解, 从容应对 //146

第六章 能力篇

148

一、什么是数学能力 //148

二、数学能力有哪些 //149

三、如何提高数学能力 //150

(一) 如何提高运算能力 //150

- 1. 悟清算理 //150
- 2. 熟练算法 //150
- 3. 善于转化 //151

(二) 如何提高逻辑思维能力 //152

- 1. 什么是逻辑思维能力 //152
- 2. 注重逻辑思维的培养 //152
- 3. 掌握逻辑思维的基本方法 //155
- 4. 培养合情推理的能力 //158
- 5. 形成良好的数学思维品质 //159

(三) 如何提高空间想象能力 //166

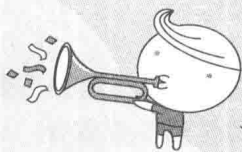
- 1. 空间想象能力包括哪些 //166
- 2. 从观察实物图形中定性图形 //166
- 3. 从操作实物图形中定量图形 //167
- 4. 从理性分析中揭示图形体质 //167
- 5. 从模拟操作中再现图形结构 //168

(四) 如何提高迁移能力 //171

- 1. 数学认知的迁移 //172
- 2. 数学技能的迁移 //173
- 3. 数学思维方法的迁移 //174
- 4. 数学学习策略的迁移 //176
- 5. 数学活动经验的迁移 //180
- 6. 克服数学学习的负迁移 //181

- 一、数学为我们提供了什么 //184
 - (一) 提供了理性精神 //184
 - (二) 提供了思维方法 //186
 - (三) 提供给我们足够的自信 //188
 - (四) 让我们知道什么是信仰 //189
 - (五) 信仰与理性矛盾吗 //191
 - (六) 我们还需要感性吗 //192
 - (七) 用理性来指导感性 //193
- 二、数学能让我们做什么 //194
 - (一) 数学能极大地提高我们的认识能力 //194
 - (二) 数学能让我们预测未知的世界 //194
 - (三) 你知道通向无穷的路只有一条吗 //196
- 三、数学史上发生过哪些重大的事情 //197
 - (一) 古代的东方数学与西方数学各有什么特点 //197
 - 1. 经典之作的比较 //197
 - 2. 数学特点的比较 //198
 - (二) 割圆术为什么伟大 //198
 - 1. 为什么圆周率的精确度能代表一个民族的数学水平 //199
 - 2. 为什么用实验法求圆周率不能达到高水平 //199
 - 3. 割圆术优越在哪里 //201
 - (三) 数学史上的三次危机 //201
 - 1. 第一次数学危机——无理数的发现 //201
 - 2. 第二次数学危机——无穷小是零吗 //202
 - 3. 第三次数学危机——罗素悖论 //202
 - (四) 古希腊的三大尺规作图问题 //202
 - 1. 倍立方体问题 //203
 - 2. 三等分任意角问题 //203
 - 3. “化圆为方”问题 //203
 - (五) 数学史上的四大天王 //204
 - 1. 数学之神——阿基米德 //204
 - 2. 科学巨人——牛顿 //205
 - 3. 数学王子——高斯 //206
 - 4. 大家的导师——欧拉 //207
- 四、数学思维能力测量表 //209

第一章



认识篇

宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，
生物之谜，日用之繁，无处不用数学。

——华罗庚

一、数学是什么

数学究竟是什么？学习数学有什么用？同学们都会有这样的疑问。

（一）数学是什么

我们提起数学，可能往往首先想到的是数字和计算。学习数学就是为了解题和考试。

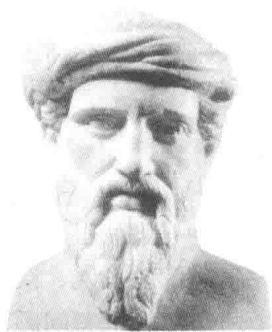
古希腊数学家毕达哥拉斯说过这么一句话：“万物皆数。”这句话的意思是说：一切事物都可以归结为数，以及数的运算。离开了数和数的运算，任何事物都不能被我们所认识。因此数学首先就是研究数的。

当然数学不光研究“数”，也研究“形”。大家都很熟悉的三角形、正方形，都是数学研究的对象。历史上，关于什么是数学的说法更是五花八门。有人说，数学就是关联；也有人说，数学就是逻辑，“逻辑是数学的青年时代，数学是逻辑的壮年时代。”那么，究竟什么是数学呢？

恩格斯站在辩证唯物主义的理论高度，通过深刻分析数学的起源和本质，精辟地作出了一系列科学的论断。恩格斯指出：“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系。”根据恩格斯的观点，较确切的说法就是：数学是研究现实世界的数量关系和空间形式的科学，即数学是研究“数和形”的一门学问。

数学可以分成两大类，一类叫纯粹数学，一类叫应用数学。纯粹数学也叫基础数学，专门研究数学本身的内部规律。中小学课本里介绍的代数、几何等知识，都属于纯粹数学。纯粹数学的一个显著特点，就是暂时撇开具体内容，以纯粹形式研究事物的数量关系和空间形式。例如研究梯形的面积计算公式，至于它是梯形稻田的面积，还是梯形机械零件的面积，都无关紧要，大家关心的只是蕴含在这种几何图形中的数量关系。应用数学则是一个庞大的系统，它着眼于说明自然现象，解决实际问题，是纯粹数学与科学技术之间的桥梁。

随着社会生产力的突飞猛进、计算机的普及、各相关学科的相互渗透、数学学科内部各



分支的统一以及数学与其他学科的统一等，数学与人类社会活动的关系更加密切，数学的内涵和重要性已在更高的层次上逐渐被人们所认识。数学已不仅仅是一种“方法”或“工具”，还是一种思维模式，即“数学思维”；也不仅仅是一门学科，还是一种文化，即“数学文化”；更不仅仅是一些知识，还是人的一种素质，即“数学素质”。概括起来讲：数学是科学，数学是工具，数学是素养，数学是文化。

（二）用数学的眼光看问题

我们生活着的这个世界是丰富多彩、千变万化的。在文学家眼中，世界或许就是一篇激情澎湃的文章，在音乐家眼中，它也许是一支旋律动人的乐曲，在画家眼中，它就是一幅五彩斑斓的画卷，而在科学家眼中，世界又展现出各自不同的魅力，那么在数学家的眼中，世界是怎样的呢？什么又是数学的眼光呢？这里先讲一个小故事：数学家华罗庚与茶杯盖的故事。

数学家华罗庚教授在一次对中学生的演讲中，指着讲台上的茶杯问大家：“你们想过吗？为什么茶杯盖不会掉到茶杯里面去呢？”同学们对这个问题都不屑一顾，想都不想，就说：“这还要问吗？盖子比茶杯口大嘛！”

“真是这个原因吗？”华先生接下来又问：“有一种长方形的饼干盒，它的盖子也比口大，可是一不小心盖子还是会掉到盒子里去！这又是什么原因呢？”

这回，引起了大家的思考，一会儿，有同学有所发现，说：“这是因为长方形盒子对角线的长度，大于盒盖子的长边的长，当然更大于短边的长度，所以沿着盒子的对角线方向，盖子很容易掉进去。”紧接着就有同学补充说：“问题在于盒子和盖子的形状，而圆形的所有直径相等，盖子的直径一定大于杯口的直径，所以盖子不会掉进茶杯里面去。”

可是华先生并不满足于这样的答复。他进一步追问：“那除了做成圆形以外，还有什么形状的房子，它的盖子不会掉进去呢？你能画出这样的图形吗？”

同学们全都陷入思考，有的当时就拿起笔画了起来，他们没有想到这么一个简单的茶杯里还蕴涵着这么深奥的数学问题呢！

从上面的故事我们可以看出，在数学家的眼中，世界是理性的，万事万物里都蕴涵着数学，他们有一双特别敏锐的眼睛，善于从生活中发现数学，并从数学的角度观察和解释这个世界。

通俗地说，谈到一个人有数学眼光，就和说他有数学头脑的意思差不多，是指能从数学的角度去思考问题，主动地运用数学的思维方式去观察、分析、解决日常生活中的问题，对于数据信息、数量关系、空间形状非常敏感，并善于利用数据对事物进行精准的描述。数学眼光实际上体现的是一种数学素养，与数学知识、技能相比，数学眼光和数学素养是人生更为宝贵的财富。因此，这也是我们中学生最应该拥有的东西。

同学们，你们有数学的眼光和头脑吗？下面我们将通过一些生动活泼的案例来介绍生活中随处可见的数学身影，发现数学之美更需要你的一双慧眼。

1. 数学很有用

数学与我们的生活是息息相关的。首先作为一门学科，数学是一切科学的源科学。科学的终极目标是追求真理，而数字则是最真的结果。不仅是理工科，甚至艺术创作都需要知道