

基于学科核心素养的教学课例研究丛书

基于学科核心素养的 数学教学课例研究

编著 吴晓红 谢海燕

MATHEMATICS



“十三五”江苏省高等学校重点教材


基于学科核心素养的 数学教学课例研究

编著 吴晓红 谢海燕



2019-2-019

「十三五」江苏省高等学校重点教材

 华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

基于学科核心素养的数学教学课例研究/吴晓红,谢海燕
编著. —上海:华东师范大学出版社,2019
(基于学科核心素养的教学课例研究)
ISBN 978-7-5675-9744-0

I. ①基… II. ①吴…②谢… III. ①中学数学课—教学
研究 IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 234901 号

基于学科核心素养的数学教学课例研究

编 著 吴晓红 谢海燕
策划编辑 李文革
责任编辑 曹祖红 陆奕彤
责任校对 吕安轩
装帧设计 卢晓红

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 店 <http://hdsdcbs.tmall.com>

印 刷 者 上海景条印刷有限公司
开 本 787×1092 16 开
印 张 18
字 数 288 千字
版 次 2019 年 12 月第 1 版
印 次 2019 年 12 月第 1 次
书 号 ISBN 978-7-5675-9744-0
定 价 45.00 元

出版人 王 焰

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

前言

党的十八大报告明确提出把立德树人作为教育的根本任务：“坚持教育为社会主义现代化建设服务、为人民服务，把立德树人作为教育的根本任务，全面实施素质教育，培养德智体美全面发展的社会主义建设者和接班人，努力办好人民满意的教育。”

2014年颁布的《教育部关于全面深化课程改革，落实立德树人根本任务的意见》（以下简称《意见》）指出，要“研究提出各学段学生发展核心素养体系，明确学生应具备的适应终身发展和社会发展需要的必备品格和关键能力”。“核心素养体系”为进一步深化课程改革指明了方向：要根据学生的成长规律和社会对人才的需求，把对学生德智体美全面发展的总体要求和社会主义核心价值观的有关内容具体化、细化，深入回答“培养什么人，怎样培养人”的问题。也就是说，要把立德树人的要求落到实处，充分发挥课程在人才培养中的核心作用，进一步提升综合育人水平，更好地促进各级各类学校的学生全面发展、健康成长。《意见》还明确指出“研究制定学生发展核心素养体系和学业质量标准”，要用核心素养统领课程标准的修订。2014年4月26日，《光明日报》进一步指出：“教育部将根据学生的成长规律和社会对人才的需求，把对学生德智体美全面发展总体要求和社会主义核心价值观的有关内容细化，从而研究制定出各学段学生发展核心素养体系。”

2014年12月，教育部正式启动普通高中课程标准的修订工作，数学核心素养作为数学课程目标的基本组成部分，成为数学课程标准制定的前提。

2016年9月，核心素养研究课题组发布了《中国学生发展核心素养》，可以说，核心素养顺应了世界教育改革发展趋势，是落实立德树人根本任务、全面实施素质教育、深化教育改革的产物。至此，核心素养概念体系已成为新一轮课程深化改革的方向，核心素养成为基础教育课程改革的指路明灯，成为学生成长的DNA，引领着基础教育

深化改革,从“知识本位”时代走向“核心素养”时代。

学生核心素养的培育最终要通过学科教育来实施,必须将宏观的核心素养体系落实到学科核心素养的培育上和具体的学科课程建设中。发展学生核心素养的重任历史地落在学科教育工作者身上。

因此,基于学科核心素养的教学变革成为学科研究和实践的热点。就数学学科而言,数学核心素养是数学课程改革的新指向,是数学教育的培养目标。因而,基于学科核心素养的数学教学变革成为数学教育改革的重点。深入理解数学核心素养的内涵,探讨数学核心素养培养的路径,是推进数学课程改革、促进数学核心素养落地的关键。

数学核心素养是什么?数学核心素养如何落地?这不仅是理论研究的问题,更是实践探讨的重点。一个优秀的教学课例能使我们更加直观、具体地了解数学核心素养的教学,为数学核心素养的落地指明方向。为此,本书汇集部分全国中小学一线数学名师的优质课,精选概念课、定理课、综合实践课、练习课等不同教学课型,通过教学预设、精彩实录、课例评析等方面的展示,力求为大家呈现实实在在的基于核心素养的课堂教学样态。

因此,在关注发展学生核心素养的今天,聚焦数学核心素养,理清数学核心素养的理论内涵和实践意义,基于课例揭示核心素养落地的路径,不仅重要而且极为迫切。

本书主要包括三部分:上篇重点从词源分析、历史脉络考察、关系透视等不同角度揭示数学核心素养的意义,为开展基于数学核心素养的教学奠定理论基础;中篇聚焦数学核心素养的六个方面,基于实践案例对数学核心素养进行进一步解读;下篇重点给出核心素养指导下的数学教学课例,为培养学生核心素养提供基于数学核心素养的数学课堂教学课例。

本书由江苏师范大学吴晓红教授、谢海燕博士主持编著。其中上篇(第1~4章)由吴晓红撰写,中篇由谢海燕(第5章、第6章、第9章)、朱超(第7章)、许晴(第8章)、蒋林倩(第10章)撰写,下篇由来自广东中山的刘燕(第11章)、江苏南京的储冬生(第12章)、河北沧州的杨磊(第13章)、江苏徐州的王宗信(第14章)、江苏连云港的马敏(第15章)、江苏泰州的徐秀峰(第16章)、江苏连云港的顾秋婷(第17章)、江苏新沂的姚松(第18章)撰写。中篇由谢海燕整理统稿,全书由吴晓红统稿。

在本书编写过程中,我们参考了大量文献资料,吸收了许多专家学者的研究成果,在此一并表示诚挚谢意。

目录

上篇 理论概述

- 第 1 章 词源分析：数学核心素养的本质 / 3
 - 1.1 素养 / 3
 - 1.2 数学素养 / 4
 - 1.3 核心素养 / 6
 - 1.4 数学核心素养 / 7
- 第 2 章 目标审视：期望课程中的数学核心素养 / 9
 - 2.1 数学期望课程的阶段划分 / 9
 - 2.2 大纲时代：能力突出、情志显现 / 10
 - 2.3 课标初期：数学素养走向前台 / 13
 - 2.4 课标当代：数学核心素养成为改革方向 / 15
- 第 3 章 要素分析：数学核心素养的意义追溯 / 17
 - 3.1 数学关键能力：数学核心素养的显性要素 / 17
 - 3.2 数学抽象、数学建模的根源及发展 / 19
 - 3.3 逻辑推理、直观想象、数学运算的根源及发展 / 20
 - 3.4 数据分析的根源及发展 / 22
 - 3.5 情感意志：数学核心素养的内隐品质 / 24
- 第 4 章 关系透视：从数学素养到数学核心素养 / 27
 - 4.1 关于数学素养 / 27

- 4.2 关于数学核心素养 / 30
- 4.3 从数学素养到数学核心素养 / 34

中篇 实践解读

- 第5章 数学抽象的理论内涵与实施路径 / 39
 - 5.1 数学抽象的理论内涵 / 39
 - 5.2 提高学生数学抽象素养的实施路径 / 43
- 第6章 逻辑推理的理论内涵与实施路径 / 51
 - 6.1 逻辑推理的理论内涵 / 51
 - 6.2 提高学生逻辑推理素养的实施路径 / 56
- 第7章 数学建模的理论内涵与实施路径 / 64
 - 7.1 数学建模的理论内涵 / 64
 - 7.2 提高学生数学建模素养的实施路径 / 67
- 第8章 直观想象的理论内涵与实施路径 / 79
 - 8.1 直观想象的理论内涵 / 79
 - 8.2 提高学生直观想象素养的实施路径 / 82
- 第9章 数学运算的理论内涵与实施路径 / 92
 - 9.1 数学运算的理论内涵 / 92
 - 9.2 提高学生数学运算素养的实施路径 / 94
- 第10章 数据分析的理论内涵与实施路径 / 106
 - 10.1 数据分析的理论内涵 / 106
 - 10.2 提高学生数据分析素养的实施路径 / 109

下篇 教学课例

- 第 11 章 方程的意义 / 125
- 第 12 章 鸡兔同笼 / 150
- 第 13 章 用字母表示数 / 173
- 第 14 章 几何画板探究一次函数图像及其性质 / 190
- 第 15 章 证明 / 210
- 第 16 章 用相似三角形解决问题(2) / 225
- 第 17 章 导数在研究函数中的应用: 单调性 / 240
- 第 18 章 映射的概念 / 260

上篇 理论概述

多视角审视可以更全面更深入地认识、理解数学核心素养。上篇从词源分析、历史分析、要素分析、背景分析、关系分析等角度入手,探讨数学核心素养的意义。通过对数学核心素养进行词源分析,明确数学核心素养的本质;通过对数学期望课程的历史考察,揭示数学核心素养发展的历史脉络;通过分析数学核心素养诸要素,进一步追溯要素的意义;通过分析数学核心素养与数学素养的关系以及揭示数学核心素养产生的时代背景,进一步理解数学核心素养产生的必要性和重要性,理解从数学素养到数学核心素养的必然性。上篇理论概述力求全方位、多角度揭示数学核心素养的意义,为开展数学核心素养教学,提升学生数学核心素养奠定理论基础。

第1章 词源分析：数学核心素养的本质

理解“数学核心素养”，首先需要理解“素养”、“数学素养”、“核心素养”等相关概念。

1.1 素养

“素养”一词可追溯到《汉书·李寻传》：“马不伏枥，不可以驱道；士不素养，不可以重国。”《后汉书·刘表传》：“越有所素养者，使人示之以利，必持众来。”（宋）陆游《上殿札子》：“气不素养，临事惶遽。”在《汉语大词典（第九卷）》中，“素养”指“修习涵养”，在《现代汉语词典（第7版）》中，“素养”是指一个人平时的修养。而“修养”在《现代汉语词典（第7版）》中，是指人的综合素质，它包含四种基本含义：培养高尚的品质和正确的待人处世的态度，求取学识品德之充实完美；科学文化知识、艺术、思想等方面所达到的一定水平；逐渐养成的待人处事的正确态度；智力，性格。

从中看出，素养是指一个人平日的基本修养，相对于先天的素质而言，素养是后天培养的、可以习得的，是由后天训练和实践而获得的一种修养，它包括个人的才能和内在涵养。

国外与“素养”相关的英文词主要有：competency, literacy, ability, capability, 以

及 accomplishment, attainment, quality 等。付文晓等的研究表明^①, competency 来自拉丁语 competentia, 表示一起集会, 在 1590 年表示竞争的意思, 到 1797 年才有素养的概念。competencies 是 competency 的复数形式, competency 与 competence 的拉丁文词根为 competere, 它是指各种能力或力量(powers)的聚汇, 以使人恰当应对情境。在《牛津高阶英汉双解词典(第 7 版)》中, literacy 指读写能力; ability 包含两种含义, 即①能力, ②才能、本领、才智; capability 表示两种含义, 即①能力、才能, ②(国家的)军事力量、军事武器; accomplishment 包含三种基本含义, 即①成就、成绩, ②才艺、技艺、专长, ③完成、成就; attainment 包含两种含义, 即①成就、造诣, ②达到、获得; quality 有两种词性, 即名词和形容词。作名词时有五种含义, 即①质量、品质, ②上乘、优质、高标准, ③人品、素质、品德, ④特征、特色、特质, ⑤(供有品位者阅读的)高端报纸; 作形容词时有两种含义, 即①优质的、高质量的, ②棒极了。

可见这些词主要含有能力、技能、才能、品质等涵义。

整体来说,“素养”就是后天通过训练和实践习得的, 沉淀在人身上并对人的发展、生活、学习有价值和有意义的东西, 主要包括个人的才能和内在涵养。它具有后天性、可习得性、综合性、持久性。

1.2 数学素养

“与人的先天素质相比, 素养具有可教性, 学科核心素养是通过学科教育获得的, 它是可教育的素养; 而且是必须通过学科教育和学生学习才能获得的素养。”^②因此, 理解数学核心素养必须基于数学学科特点。

也就是说, 数学素养不同于其他学科学习所获得的素养, 是关于“数学”的素养, 是通过数学学习活动获得的。因此, 对数学素养的理解必须建立在数学学科本质基础上。例如, 如果将数学理解为一门计算科学, 那么数学运算则成为学生应该具备的数学素养; 如果将数学作为科学技术的基础工具, 那么必然强调数学是科学的语言, 相应

① 付文晓, 钱旭升. “核心素养”的词源学研究[J]. 教育导刊, 2017(12).

② 余文森. 论学科核心素养的课程论意义[J]. 教育研究, 2018(3).

地,数学素养必然强调运用数学语言解决现实问题。

因此,基于不同的观点和视角,国内外对数学素养的认识也有不同。

例如,美国数学教师协会 NCTM 于 1989 年在《学校数学课程与评价标准》中,将数学素养内涵概括为“能理解数学价值,对自己的数学能力有信心,成为数学问题解决的能手,学会数学交流,学会数学推理”^①。在《面向 21 世纪的基础教学》报告中又指出:“现代数学素养包含数学知识、数学思维、数学方法、数学思想、数学技能、数学能力、个性品质七个方面的内容”^②。2000 年,澳大利亚在全球生活技能调查中,把数学素养定义为:“人们用来有效处理生活与工作过程中出现的数量问题所需的技能、知识、信念、气质、思维习惯、交流能力、问题解决能力的聚合”^③。著名的国际学生评估项目 PISA 研究指出,数学素养是“个体识别和理解数学在世界中所起作用的能力,做出有根据的数学判断的能力,以及作为一个关心社会、善于思考的公民,为了满足个人生活需要而使用和从事数学活动的能力”^④。

在国内,桂德怀、徐彬艳认为,数学素养是数学情感态度价值观、数学知识、数学能力的综合体现^⑤;蔡上鹤指出,数学素养的结构是多方位的,基本的有知识技能素养、逻辑思维素养、运用数学素养、唯物辩证素养^⑥;郑强把“数学素养”界定为:“在数学课程学习过程中,学习者通过数学学习,加深对数学知识的理解,内化数学文化的成果,最终在学习者身上体现的一种时代价值或自己达到的新水平,同时能够主动将数学理论应用于生产生活实践^⑦。”

整体来看,虽然观点百花齐放,但都认可数学素养是通过数学学习获得的素养,主要将数学素养看作是一个通过数学学习获得的,包括知识、能力、情感的综合体,即“学生的数学素养应包括数学的知识素养(问题、方法、语言、理论等)和观念素养,同时,我

① National Council of Teachers of Mathematics. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics [M]. Reston, VA: Author, 1989.

② 胡典顺. 数学素养研究综述[J]. 课程·教材·教法, 2010(12).

③ 桂德怀, 徐彬艳. 数学素养内涵之探析[J]. 数学教育学报, 2008(3).

④ OECD. PISA 2003 Mathematics Literacy Framework. 2002.

⑤ 桂德怀, 徐彬艳. 数学素养内涵之探析[J]. 数学教育学报, 2008(3).

⑥ 蔡上鹤. 谈谈数学素养[J]. 人民教育, 1994(10).

⑦ 郑强. 论数学素养及其在数学课程中的价值体现[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版), 2005(2).

们应将它们看作一个综合体,并从辩证的角度理解这些要素”^①。

1.3 核心素养

近年来,“素养”已成为不同领域的热词,不仅出现了与学科相关的“语文素养”“数学素养”“化学素养”等,还出现了不同领域或者不同维度的相关概念,诸如“媒体素养”“金融素养”“信息素养”“政治素养”“核心素养”等。以基础教育的不同学科为标准,素养可以分为数学素养、语文素养、物理素养、化学素养等等,即是通过不同学科学习所获得的素养。以学生发展需求程度为标准,素养又可以分为核心素养与一般素养。

在《现代汉语常用词辞海》第一卷中,“核心”是指中心,指事物的主要部分或事物的关键。《现代汉语词典(第7版)》中,“核心”是指中心、主要的部分(就事物之间的关系说)。因此,“核心”是就事物之间关系而言的,指处于主要地位、起着领导作用的事物,核心素养就是对学生素养发展起重要作用的、居于统帅地位的素养。

与核心素养相对的英文主要有: key competencies、key competency、core competencies、core skills 等。在《牛津高阶英汉双解词典(第7版)》中,“core”有两种词性:名词、形容词。作名词时,基本含义有:①(苹果等的)果心,核;②(物体的)中心部分;③最重要的部分、核心、要点、精髓;④(参加某项活动的)一小群人。作为形容词时,其基本含义有:①最重要的、主要的、基本的;②核心(信念、价值、原则等);③核心成员的、骨干的。“key”有三种词性,分别为:名词、动词和形容词。作名词时,其含义为:①开锁工具(钥匙);②最重要的事(关键、要诀);③计算机(计算机或者打印机的)键;④乐器(钢琴或其他乐器的)键;⑤音乐(调);⑥答案、题解;⑦(地图或平面图的)符号说明、图例。作动词时,其基本含义为:①用键盘输入、键入;②用钥匙划坏(汽车)。作形容词时,包含一种含义:最重要的、主要的、关键的。

可见,core、key 本身就有“关键的”“最重要的”“主要的”“必不可少的”等含义。因而,核心素养就是指在人的发展中居于统治性、根本性的素养,它“指向事物本质,对事

^① 吴晓红,郑毓信. 新课程背景下学生数学素养问题探析[J]. 中国教育学刊,2012(4).

物全局起支撑性、引领性和持续促进发展的作用”。^①

通过中外词源考察,我们就可以理解“中国学生发展核心素养框架及数学核心素养的深度解读”^②的以下阐述:核心素养是所有学生应具有的最关键、最必要的共同素养;是知识、技能和态度等的综合表现;是在先天遗传的基础上综合后天环境的影响而获得的,可以通过接受教育来形成和发展;核心素养的作用发挥具有整合性等等。

1.4 数学核心素养

从以上概念词源考察可知,数学核心素养就是在先天遗传的基础上,通过后天数学学科的学习而形成的素养,它是可教的、可培养的,具有整体性、综合性的特点,是知识、技能和态度等的综合表现。数学核心素养是最能反映数学学科本质的、对学生发展起至关重要作用的素养。

因此,明确数学学科的本质是确定数学核心素养的关键。史宁中教授指出:“数学教育的终极目标是,一个人学习数学之后,即便这个人未来从事的工作和数学无关,也应当会用数学的眼光观察世界,会用数学的思维思考世界,会用数学的语言表达世界。所谓数学的眼光,本质就是抽象,抽象使得数学具有一般性;所谓数学的思维,本质就是推理,推理使得数学具有严谨性;所谓数学的语言,主要是数学模型,模型使得数学的应用具有广泛性。”^③可见,数学抽象、逻辑推理、数学模型突出反映了数学学科本质,对学生发展有重要作用,因而成为数学核心素养的重要要素。

另外,因为“直观想象是实现数学抽象的思维基础”,而数学运算虽然属于逻辑推理,“但高中阶段数学运算很重要”,又因为“在大数据时代,数据分析变得越来越重要,逐渐形成了一种新的数学语言”,所以直观想象、数学运算、数据分析也成为数学核心素养的重要要素。

可见,“数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现,是具有数学基本特征的思

① 成尚荣. 基础性: 学生核心素养之“核心”[J]. 人民教育, 2015(4).

② 中国学生发展核心素养框架及数学核心素养的深度解读[EB/OL]. (2016-09-20) http://www.360doc.com/content/16/0920/21/2707748_592363478.html.

③ 史宁中. 学科核心素养的培养与教学——以数学学科核心素养的培养为例[J]. 中小学管理, 2017(1).

维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现,是在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的”^①。数学抽象、逻辑推理、数学模型、直观想象、数学运算、数据分析成为数学课程标准提出的数学核心素养。

^① 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2018: 4.

第2章 目标审视：期望课程中的数学核心素养

国际著名的 TIMSS(The Trends in International Mathematics and Science Study)是在国际上有较大影响的国际教育评价研究,被誉为规模最大、最为严密的“世界级”教育研究。该研究将课程分为三个层面:期望课程、实施课程、获得课程。期望课程反映的是国家意愿,是国家对基础教育课程的基本规范和质量要求,通常以教学大纲、课程标准或者部审教材的形式得到体现,它代表着国家意志的课程意图、课程目标和要求。实施课程主要关注课堂教学实际实施的情况,获得课程则关注学生实际习得的内容,其中期望课程是实施课程和获得课程的基础。因而,教学大纲或者课程标准中所出现的关键词就反映了国家教育改革的动向。

数学核心素养之所以成为引领数学课程改革的指路灯,成为数学教育研究的热点,一个重要原因在于“数学学科核心素养”是国家期望课程《普通高中数学课程标准(2017年版)》的关键词。因而,理解数学核心素养,必须考察数学教学大纲或者课程标准的历史演变,从中理清数学核心素养的溯源,明确数学核心素养的意义。

2.1 数学期望课程的阶段划分

1949年新中国成立之际,我国主要学习苏联数学教育模式,颁布的数学期望课程以“数学教学大纲”命名。1949年—2000年期间,我国颁布了许多中小学数学教学大纲。进入21世纪,我国进行新一轮课程改革,开始采用“课程标准”名称,相继颁布了