王溢然　束炳如　主编

中学生物理思维方法丛书

王溢然　许洪生　编著

8 分割与积累



中国科学技术大学出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

中学生物理思维方法丛书

在中学物理学习过程中，学生在获取知识的同时，还要重视从科学宝库中汲取思维营养，加强科学思维方法的训练。《中学生物理思维方法丛书》就是这样一套“授之以渔”的优秀辅导书。丛书每一册都以某一类或两三类思维方法为主线，在物理学史的恢宏长卷中，撷取若干生动典型的事例，把读者引入饶有兴趣的科学氛围中，然后围绕这些思维方法，就其在中学物理教学中的功能和表现，以及其在具体问题中的应用做较为深入、全面的挖掘，使读者能从物理学史和中学物理教学现实两方面较宽广的视野中，逐步领悟到众多思维方法的真谛。

●分析与综合　●守恒　●猜想与假设　●图示与图像　●模型　●等效　●对称　●分割与积累
●归纳与演绎　●类比　●求异　●数学物理方法　●形象、抽象、直觉

选题编辑　肖向兵　责任编辑　马　瑞　封面设计　周　氏

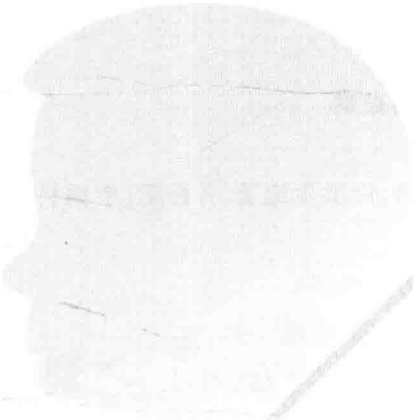
定价：25.00 元

ISBN 978-7-312-03706-1



王溢然　束炳如　主编

中学生物理思维方法丛书



8 分割与积累

王溢然　许洪生　编著

中国科学技术大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

分割与积累/王溢然，许洪生编著.—合肥：中国科学技术大学出版社，2015.8

（中学生物理思维方法丛书）

ISBN 978-7-312-03706-1

Ⅰ.分… Ⅱ.①王…②许… Ⅲ.中学物理课—教学参考资料 Ⅳ.G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 156574 号

出版 中国科学技术大学出版社

安徽省合肥市金寨路 96 号，230026

http://press.ustc.edu.cn

http://shop 109383220.taobao.com

印刷 安徽省瑞隆印务有限公司

发行 中国科学技术大学出版社

经销 全国新华书店

开本 880 mm×1230 mm 1/32

印张 7.75

字数 202 千

版次 2015 年 8 月第 1 版

印次 2015 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—3000 册

定价 25.00 元

只有微分学才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表示状态，并且也表示过程：运动.

——恩格斯

需要全本请访问 www.ertongbook.com

序 1

在中学物理学习过程中，学生在获取知识的同时，还要重视从科学宝库中汲取思维营养，加强科学思维方法的训练.

思维方法的范畴很大，包括抽象思维、形象思维、直觉思维等.以抽象思维而言，又有众多的方法，在逻辑学中都有较严格的定义.对于以广大中学生为主的读者群，就思维科学意义上按照严格定义的方式去介绍这众多的思维方法，显然是没有必要的.由王溢然、束炳如同志主编的这套丛书，不追求思维科学意义上的完整，仅选取了在物理科学中最有影响、中学物理教学中最常见的思维方法（包括研究方法）为对象，在较为宽泛的意义上去展开，立意新颖，构思巧妙.全套丛书各册彼此独立，都以某一类或两三类思维方法为主线，在物理学史的恢宏长卷中，撷取若干生动典型的事例，先把读者引入饶有兴趣的科学氛围中，向读者展示这种思维方法对人类在认识客观规律上的作用.然后，围绕这种思维方法，就其在中学物理教学中的功能和表现，以及其在具体问题中的应用做了较为深入、全面的开掘，使读者能从物理学史和中学物理教学现实两方面较宽广的视野中，逐步领悟到众多思维方法的真谛.

这套丛书既不同于那些浩繁的物理学史典籍，也有别于那些艰深的科学研究方法论的专著，它融合了历史和方法，兼顾了一般与提高，联系了教学与实际，突出了对中学物理教学的指导作用，文笔生

动、图文并茂，称得上是一套融史料性、科学性、实用性、趣味性于一体的优秀课外读物.无论对广大中学生(包括中等文化程度的读者)还是对中学物理教师以及高等师范院校物理专业的学生，都不无裨益.

科学研究是一项艰巨的创造性劳动.任何科学发现和科学理论的诞生都是在一定的背景下，科学家精心的实验观测、复杂的思维活动的产物.在攀登道路上充满着坎坷和危机，并不是一帆风顺、一蹴而就的.科学家常常需及时地(有时甚至是痛苦地)调整自己的思维航向，才能顺利抵达成功的彼岸.因此，任何一项科学新发现、一种科学新理论的诞生，绝不会仅是某种单一思维活动的结果.这也就决定了丛书各册在史料的选用上必然存在某些重复和交叉.虽然这是一个不足之处，却也可以使读者的思维层次“多元化”.不过，作为整套丛书来说，如果在史料的选用上搭配得更精细一些、在思维活动的开掘上更深刻一些，将会使全书更臻完美.

我把这套丛书介绍给读者，首先希望引起广大中学生的兴趣，能从前辈科学家思维活动中汲取智慧，活化自己的思维，开发潜在的智能；其次希望中学物理教师在此基础上继续开展对学生思维方法训练的研究，致力于提高学生的素质，以适应新时期的需要；最后我也真诚地希望这套丛书能成为图书百花园中一朵惹人喜爱的花朵.

阎金铎

序 2

“中学生物理思维方法”是一个很诱人的课题.如果从我比较自觉地关注这个课题算起,要追溯到20世纪80年代.开始时,朴素的动因就是激发学生兴趣,丰富上课内容;后来,通过对许多科学研究方法论著作、思维学著作等的学习和教学实践,认识上逐步从传授知识层面提高到了对学生的学习能力乃至思维品质进行培养的高度.于是,在90年代中期,经过比较充分的积累,策划编写了这套思维方法丛书.

《中学生物理思维方法丛书》问世后,受到了广泛的关注,被列入国家新闻出版总署“八五”规划重点图书,还被推介到台湾出版了繁体字版(中国台湾新竹“凡异出版社”).因此,作者受到了很大的鼓舞.

光阴荏苒,如今已进入21世纪.科学技术飞速发展,教学理念不断更新,教学的要求也随着时代前进的脚步有了很大的变化.当前,国际教育界大力提倡“科学的历史、哲学和科学”教育,希望借此更好地提高学生的科学素质.我国从新世纪开始试行的《高中物理课程标准》也明确提出同样的要求.中外教育家一致的认识——结合物理教学内容,回顾前辈科学家创造足迹,无疑是了解科学本质、培养科学精神的一个重要途径.

本丛书的新一版继续坚持“科学史料、思维方法、中学教学”三结合的内容特色,并补充了反映科学技术方面的新成果、新思想,尤其

在结合中学物理教学方面有了很大的进展——删去或淡化了与当前中学物理教学联系不够紧密的某些枝叶，突出了主干知识；撤换了相对陈旧的某些问题，彰显了时代风貌；调整了某些内容，强化了服务对象.值得说明的是，在新一版中还选入了相当数量的近年高考题，这些问题集中反射了各地专家、学者的智慧，格外显得光彩熠熠、耐人寻味.因此，新一版内容更为丰满多彩，也更为贴近中学教学和学生实际，更好地体现了科学性、方法性、应用性、趣味性.希望能够继续被广大读者喜欢，也希望能够更好地使读者受到启发，有所得益，有所进步！

今后，随着时代的发展和中学物理教学要求的不断更新，新思想、新成果和教学中的新问题势必会层出不穷，但前辈科学家崇高的科研精神、深邃的思想和创造性思维方法的光辉，必将永远照耀着人们前进的道路！

在新一版问世之际，首先要衷心感谢我的良师益友、苏州大学物理系束炳如教授.从萌发编写丛书的想法开始，束先生就给予作者极大的鼓励、支持.编写过程中，作者与先生进行了难以计次的深夜长谈，他开阔的思路、活跃的创见和对具体问题深刻的分析指导，都给了作者极为有益的启发和帮助，让作者从中得到了强大的精神力量，也给作者留下了永不磨灭的记忆.借此机会，同时衷心感谢两位德高望重的原顾问周培源先生*和于光远先生**以往对本丛书的关爱；衷心感谢为本丛书作序的阎金铎教授***对作者的鼓励；衷心感谢吴保让先生、倪汉彬先生、贾广善先生、刘国钧先生等曾为丛书审读初稿

* 周培源(1902～1993)，著名物理学家，中国科学院院士，曾任中国物理学会理事长、中国科学技术协会主席、北京大学校长等.

** 于光远(1915～2013)，著名经济学家，中国社会科学院哲学社会科学学部委员，曾任国家计划委员会经济研究所所长、中国社会科学院副院长等.

*** 阎金铎，著名物理教育家，北京师范大学物理系教授、教科所所长，曾任中国教育学会物理教学研究会理事长等.

并提出了宝贵的修改意见；衷心感谢曾为丛书绘制精美插图的朱然先生；衷心感谢被引用为参考资料的原作者们；衷心感谢曾经对丛书大力支持的大象出版社；衷心感谢广大读者朋友对本丛书的厚爱.

本丛书相当于一个“系统工程”，编辑、出版需要花费大量的人力、物力.新一版的问世，跟中国科学技术大学出版社的鼎力支持是分不开的.在此，也代表所有作者对中国科学技术大学出版社和有关编辑室表示衷心的感谢.

不知哪位作家说过这样的话：写作的最大乐趣首先是在写作的过程中，作者与读者心灵交流；其次是作品出版后，能够被读者认可.虽然这套丛书不是文学创作的作品，我们也只是站立三尺讲台的中学老师，但是在编写过程中，内心时时有着一种极为强烈的冲动，有一个声音呼唤着：把我们在长期教学实践中所积累和思考的有关中学物理教与学的点滴认识、心得与中学物理教学界同行，尤其是广大的中学生朋友们进行交流、分享与探讨.实际上，书中有许多地方都包含着从以往学生的思维火花中演绎的方法.

本丛书的新一版，尽管我们思考了比较长的时间，编写中也都作了努力，但仍然难免会有疏漏乃至错误的地方，请读者发现后予以指正.

王溢然

2014 年 2 月于苏州庆秀斋

需要全本请访问 www.ertongbook.com

前　言

分割与积累的思想方法，在人类文明史上很早就有了萌芽.刘徽割圆术的成功，可以认为宣告了分割与积累方法的科学地位，牛顿和莱布尼茨创立的微积分，则标志着这一科学体系的建立.从此，微积分思想有力地推动了科学发展的进程，并由此建立起经典物理学的大厦.直到今天，在现代物理学的发展进程中，也无时不闪耀着它的思想光辉.

本书从刘徽的割圆术和微积分的创立谈起，进而探讨了分割与积累思想在科学认识中的指导作用和在中学物理教学中的功能，并结合中学物理教学介绍了常用的几种分割与积累方法，最后通过对中学物理许多具体问题的剖析、演解，介绍了分割与积累思想在中学物理解题中的典型应用.

希望本书能有利于发展广大读者(尤其是广大中学生)的思维能力，并帮助广大读者突破物理学习中的难点，打开通往成功之路的大门.

作　者

2015 年 4 月

目　录

序 1 …… (ⅰ)

序 2 …… (ⅲ)

前言 …… (ⅶ)

1　从割圆术到微积分 …… (001)

1.1　刘徽的割圆术 …… (001)

1.2　牛顿和莱布尼茨的微积分 …… (005)

2　分割与积累思想在科学认识中的作用 …… (014)

2.1　突破变量研究的困难 …… (014)

2.2　深化物质结构的认识 …… (024)

2.3　建立科学的度量体系 …… (043)

2.4　提供实验设计的依据 …… (050)

2.5　升华对微观世界的理解 …… (059)

3　中学物理中常见的四种分割 …… (063)

3.1　均匀分割 …… (063)

3.2　不均匀分割 …… (068)

3.3 黄金分割 …… (072)
3.4 微小量分割(微元法) …… (079)

4 分割与积累思想的教学功能 …… (096)
4.1 帮助建立和理解概念 …… (096)
4.2 指导认识和掌握规律 …… (110)
4.3 解释现象和处理数据 …… (124)
4.4 提升分析和探究层次 …… (133)

5 分割与积累思想在中学物理解题中的应用 …… (143)
5.1 隔离法的应用 …… (143)
5.2 微元法的应用 …… (162)
5.3 高考中微元法应用赏析 …… (208)

主要参考资料 …… (229)

后记 …… (231)

1 从割圆术到微积分

1.1 刘徽的割圆术

刘徽(约公元 225—295)是我国魏晋时期的数学家,生于如今山东省的临淄或淄川一带.他一生最大的贡献,是为我国的古典数学名著《九章算术》作了注释*,同时还提出了很多独创的见解.利用"割圆术"计算圆周率就是其中的一个著名方法.

从周三径一到割圆术

在刘徽算出圆周率以前,工匠们在建筑中涉及圆周长度的时候,都根据以往从生产实践中得到的经验,采用"周三径一"的方法进行计算.也就是说,如果把圆的直径作为 1 个单位的话,那么其周长就是 3 个单位.运用数学的术语,这就表示圆周率 $\pi = 3$.显然,这个结果是很粗糙的.

刘徽的割圆术就是用圆的内接正多边形的周长无限逼近圆周从

---

* 《九章算术》是我国古代极为重要的一本算经,书中系统地总结了我国从先秦到东汉初的数学成果,全书共有 246 道数学应用题,按内容分成九类,即九章.包括土地测量、勾股定理、比例、方程、多位数开平方、开立方、立方形体积计算等运算方法,书中对各类问题都有统一的解法,但都没有证明.刘徽对此作了全面的注释、阐发与订正,使之成为世界古典数学名著之一.

而求出圆周率的方法.首先,他肯定圆的内接正多边形的面积小于圆面积;接着,先从圆内接正六边形起,再令边数一倍一倍地增加,依次构成圆内接 12、24、48、96、… 条边的正多边形(图 1.1),并逐个算出它们的边长.显然,随着圆内接正多边形边数的增加,其面积也越来越接近于整个圆的面积,其周长也越来越接近圆周长,最后就可以根据两者的差值确定圆周率的大小范围.刘徽说:"割之弥细,所失弥少;割之又割,以至于不可割,则与圆周合体,而无所失矣."意思是说,割得越细,正多边形与圆周的误差也越小,这样不断分割下去,最后与圆周重合,便没有误差了.这段弥足珍贵的闪耀着极限思想和无限小分割思想的话,就是古代数学史上著名的"割圆术"的理论基础.



图 1.1

割圆术的数学论证

下面,我们可以对刘徽的方法用现代的数学语言稍稍展开,以便更好地领会其思想精华.

设圆的半径为 r,面积为 S,在圆内作一个正 n 边形和一个正 $2n$ 边形的内接正多边形(图 1.2 中以正六边形和正十二边形为代表),它们的面积分别为 S_n、S_{2n},并作一相关的矩形,如图 1.2 所示.图中 AB 是圆内接正 n 边形的一边,边长用 a_n 表示,AC 和 CB 是圆内接正 $2n$ 边形的两边,每边长用 a_{2n} 表示,则三角形 AOB 和四边形

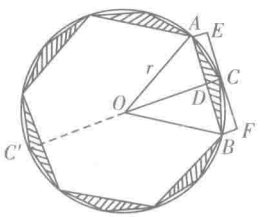


图 1.2

$AOBC$ 的面积分别为

$$S_{\triangle AOB}=\frac{S_n}{n},\quad S_{AOBC}=2\cdot\frac{S_{2n}}{2n}=\frac{S_{2n}}{n}$$

则三角形 ABC 的面积及矩形 $ABFE$ 的面积分别为

$$S_{\triangle ABC}=S_{AOBC}-S_{\triangle AOB}=\frac{S_{2n}-S_n}{n}$$

$$S_{ABFE}=2S_{\triangle ABC}=\frac{2(S_{2n}-S_n)}{n}$$

因此，图中三角形 AOB 与矩形面积之和跟圆内相应的一块面积的大小关系为

$$S_{\triangle AOB}+S_{ABFE}=\frac{S_n}{n}+\frac{2(S_{2n}-S_n)}{n}>\frac{S}{n}$$

即

$$S<S_n+2(S_{2n}-S_n)=2S_{2n}-S_n$$

由于 $S>S_{2n}$，可以得到一个不等式：

$$S_{2n}<S<2S_{2n}-S_n \qquad ①$$

式中 $S_{2n}-S_n$ 即图中阴影面积.当内接正多边形的边数倍增时，通过这个不等式，就可以从过剩与不足两方面趋近圆面积，从而得出圆周率.

接着，刘徽利用勾股定理等数学知识作了进一步的运算：

$$S_{2n}=nS_{AOBC}=n(S_{\triangle AOB}+S_{\triangle ABC})=n\times\frac{1}{2}\times AB\times OC=\frac{n}{2}a_nr$$

根据勾股定理和圆内相交弦的关系

$$OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=\sqrt{r^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$$

$$AC\cdot CB=CC'\cdot CD$$

有关系式

$$a_{2n}^2=2r\cdot(r-OD)=2r^2-r\sqrt{4r^2-a_n^2}$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com