华东师范大学第二附属中学 · 校本教材

围绕游戏，漫步数学

施洪亮　何智宇◎编著

师范大学出版社

华东师范大学第二附属中学 · 校本教材

围绕游戏，漫步数学

洪亮　何智宇◎编著

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

围绕游戏,漫步数学／施洪亮,何智宇编著.—上海:华东师范大学出版社,2018
ISBN 978－7－5675－8250－7

Ⅰ.①围… Ⅱ.①施… ②何… Ⅲ.①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 202763 号

围绕游戏，漫步数学

编　　著　施洪亮　何智宇
策划组稿　王　焰
项目编辑　王国红
审读编辑　陈　震
装帧设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021－60821666　行政传真 021－62572105
客服电话　021－62865537　门市(邮购)电话 021－62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com/

印 刷 者　苏州工业园区美柯乐制版印务有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　14.5
字　　数　195 千字
版　　次　2018 年 9 月第 1 版
印　　次　2018 年 9 月第 1 次
书　　号　ISBN 978－7－5675－8250－7/O·290
定　　价　56.00 元

出 版 人　王　焰

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社客服中心调换或电话 021－62865537 联系）

序　言

施洪亮老师是我的学生，他从华东师大数学系毕业后即进入华东师大二附中工作，在教学第一线取得了不俗的成绩，特别是在发现和培养创新型人才和资优生教育方面硕果累累. 他辅导的学生中有的还荣获了国际数学奥林匹克金牌和丘成桐中学数学奖.

审读了电子版的书稿后，我觉得此书不同寻常. 作者在寓数学教育于数学游戏方面做了重要的实践探索，内容非常有意义. 本书是他 20 年中学数学教育研究和思考的成果，蕴含了作者"以激发兴趣引领创新"的数学教育教学理念.

著名数学家陈省身曾说"数学好玩"，在数学家眼里，数学是思维的体操，确实是好玩的. 然而更多人说，数学是抽象的、枯燥的、难懂的，在实际生活中是没有用的. 我们在数学教学中应该如何改变这种现象？在数学教学中怎样让学习者觉得数学好玩、有趣且启迪思维，进而激发学生的主动学习数学的兴趣，是摆在我们每一位数学教育工作者面前的一个问题.

《围绕游戏，漫步数学》一书中收入了 30 个游戏或趣题，有中国传统的，也有国际上流行的；有贴近现实生活的游戏，也有较为新颖的与现代数学有关的趣题. 每个游戏均给出了背景、问题的解法、问题的数学原理阐述以及问题的拓展学习与思考. 作者围绕这些数学游戏，精心设计，深入浅出地编制相关的数学内容，通过让学生玩游戏，在游戏过程中锻炼思维能力和动手能力，引发学生数学思考，进而品味到数学的奥秘、欣赏到数学的美、理解到数学智慧、领略到数学家的风采.

游戏与数学相辅相成. 作者以拓展型选修课平台做了一个很好融数学于游戏的尝试,我相信本书对广大中学师生开展数学课外活动来说是一个可以借鉴和参考的好资料. 在《围绕游戏,漫步数学》出版之际,写了以上的一些体会,与洪亮老师共勉,同时也向各位读者发出呼吁,希望大家一起努力推广数学游戏,在数学游戏中领略数学美景,在数学游戏中学好数学并启迪数学创新.

熊　斌

2018 年 7 月

前　言

2000多年前古希腊著名哲学家亚里士多德在所著的《诗学》中已蕴含了“寓教于乐”的思想，后由古罗马诗人、文艺理论家贺拉斯明确地表达出来. 寓教于乐的形式是多样的，在实践中还会有很多创新，寓教于游戏是最直观、最容易被认同的. 如打扑克、下象棋、玩魔方、做数独、轮流取物等游戏活动，可以锻炼人们的思维和动手能力，具有典型而清晰的教育功能. 当人们用数学的眼光去看待很多游戏时，很容易认识到游戏不但是好玩的，也可以是严肃的、有用的、深奥的.

游戏与数学作为两项人类活动具有许多共同的特点，这种共性主要体现在它们的性质、结构以及实践等三个方面. 数学与游戏之间的关系是相互渗透、相互统一的关系. 游戏的精神一直伴随着数学的成长和发展，成为数学发展的主要动力之一，并从以下几个方面影响了数学的发展：游戏激发了许多重要数学思想的产生；游戏促进了数学知识的传播；游戏是发现数学人才的有效途径；游戏还在数学教育中起着非常重要的作用. 数学与游戏息息相关，数学也将在一个更高的层次上复归游戏.

抽象的数学很理性，而游戏让人感性. 德国思想家席勒认为人的感性与理性一直存在着冲突，但数学游戏为感性与理性相结合提供了前所未有的条件. 数学游戏使学习不再是被机械地灌输知识，参与数学游戏的过程就是智力与想象力的开发和培养过程，而且可以升华为对世界的创造. 可以预见的是，人们未来的工作、生活很多都会与数学游戏有更深度的融合，因此数学游戏的教育必须被充分挖掘.

笔者从教以来致力于培养学生的数学创新素养,始终认为数学游戏是一个非常好的抓手,曾大力推动了上海市的中小学生智力游戏大赛、游戏与数学嘉年华活动等在华东师大二附中举行. 笔者于2014年9月第一次面向华东师大二附中学生开设"游戏与数学"课程,试图在寓数学教育于数学游戏方面做一点实践探索,以期围绕数学游戏,让学生漫步数学花园并感受到数学的芬芳. 几年来在华东师大二附中两个校区面向初高中学生开设多轮,积累了一定的案例. 特此结集,与数学教育同仁及数学游戏爱好者分享.

施洪亮

写给选课同学的话

同学,你喜欢数学吗?你觉得数学好玩吗?如果你的答案不是那么肯定,不妨来华东师大二附中学习“游戏与数学”这门拓展选修课程吧.也许,这门课程会改变你对数学的看法.

回首我们的学习生涯,很多人对数学学习的记忆并不愉快.有人认为数学枯燥,数学难懂,数学一点也不好玩.数学真的有那么无趣吗?其实不然.2002 年 8 月在北京举行国际数学家大会期间,91 岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词,写下了“数学好玩”4 个大字.有人会说,陈省身先生认为数学好玩,因为他是数学大师,他懂数学的奥妙;对于我们凡夫俗子来说,数学太深奥了.但陈省身说,他从小就觉得数学好玩.正因为觉得数学好玩,才兴致勃勃地玩个不停,最终陈省身玩成了数学大师,并不是成了大师才说数学好玩.

“游戏与数学”课将依托那些具有娱乐和消遣性质的并带有数学因素的游戏和智力难题让大家感悟数学,并训练思维.从游戏入手让中小学生体会到数学好玩,数学无所不在.在很多有趣的游戏活动中,数学是幕后的策划者,是游戏规则的制定者.玩纸牌、玩魔术、玩幻方、玩数独、玩七巧板、玩九连环、玩汉诺塔、玩魔方、玩称球、玩取物,不少人玩起来乐而不倦.玩的人不一定知道,所玩的其实是数学.这些游戏,使人在玩游戏的过程中启迪思想、开阔视野,锻炼思维能力.

世界上好玩的事物,很多需要有了感受体验才能食髓知味.通俗理解游戏就是玩,所以“游戏与数学”就是一门让大家玩数学的课程.它试图让大家在游戏的过程中不知不觉学习数学,掌握一些重要的数学思想方法,进而提升创新

意识与创新能力;通过了解一些数学趣题、数学文化,适当扩大知识面和对数学文化的认同;提高学生对“数学是什么”、“数学有什么用”的认识,进而更全面地理解数学.当然,中小学生从游戏中体会到的好玩,与数学研究者所感受到的好玩,是有所不同的.但只要我们学会在玩游戏中思考,也许你就会爱上数学.

游戏本身并不是数学的终点,它不能完全取代对所有数学活动的分析,数学中的游戏娱乐、美学欣赏、哲学思考、实用价值探索等因素是如此紧密地交织在一起,因此本课程设计了较多动手实践的环节,还有思辨整合的作业考评.有些数学游戏的结论很迷人,但我想说:***“发现数学结论的过程,很多时候比数学结论本身更美妙.”***

本课程对学生的数学基础没有特别要求,除华东师大二附中本部高中生外,也适合华东师大二附中国际部和初中学生学习,希望广大数学爱好者踊跃参选.希望大家一起在畅玩游戏中漫步数学花园.

目 录

第一部分

单人游戏

第一讲　数字黑洞

一、游戏导入

任取一个四位数,四位数字完全相同的数除外. 提取该数个、十、百、千位上的数字,按从大到小的顺序排列,得到由这四个数字组成的最大的四位数;按从小到大的顺序排列,得到由这四个数字组成的最小的四位数;用这个最大的数减去这个最小的数,得出一个新的四位数;重复上述操作. 例如: 取四位数8351,排列得最大数8531,最小数1358,相减得7173;再排列3、7、1、7这四个数字得7731和1377,相减得6354……请大家动手尝试,看看最后会得到什么.

如果你已经有所发现,请将操作对象改为各位数字不完全相同的三位数,进行上述操作,看看有些什么新的发现. 对于两位数、五位数、六位数……大家都可以试一试.

二、游戏背景

经过一系列尝试,大家可能会发现,任意四位数经过有限次操作后都会变成6174. 任何四位数都逃不出6174这个结果,就像任何靠近黑洞的物质都会被黑洞吸收一样,所以我们把这样的数称作黑洞数. 黑洞数又称陷阱数,具有奇特的转换特

型. 任何一个数字不全相同的整数,经有限“重排求差”操作,总会得到某一个或一些数,这些数即为黑洞数.“重排求差”操作,即用组成该数的数字重排后得到的最大数减去重排后得到的最小数. 这是印度数学家卡普雷卡尔最先发现的,6174 是四位数的卡普雷卡尔黑洞数,最多需要七步. 495 为三位数的重排求差黑洞数,而且最多需要六步;两位数的黑洞数是 90→81→63→72→54 这些数的一个循环,我们称这样的循环为黑洞圈.

三、 游戏破解

下面证明 6174 是四位数的黑洞数.

先证: 任何四位数经一步“重排求差”操作后只会变成 54 个可能的数之一. 设 M 是一个四位数字不完全相同的四位数, 其四位数为整数 a、b、c、d. 不妨设 $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$, 因为它们不全相等,该式中等号不能同时成立. 经一次重排求差操作,得到新数为 $M1 = (1000a + 100b + 10c + d) - (1000d + 100c + 10b + a) = 999(a - d) + 90(b - c)$. 由 $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ 可推出: $a - d > 0, b - c \geqslant 0$ 且 $a - d \geqslant b - c$. 因此, $a - d$ 有 9 个取值,而 $b - c$ 只能取不大于 $a - d$ 的自然数. 故 $M1$ 共有 $2 + 3 + 4 + \cdots + 10 = 54$ 个可能值.

在这 54 个可能值中,有一部分是数码相同而排列顺序不同的值,即再经过一次重排求差操作可得到相同值. 排除这部分数,余下 30 个数是 9990, 9981, 9972, 9963, 9954, 9810, 9711, 9621, 9531, 9441, 8820, 8730, 8721, 8640, 8622, 8550, 8532, 8442, 7731, 7641, 7632, 7551, 7533, 7443, 6642, 6552, 6543, 6444, 5553, 5544. 对于这 30 个数逐个检验,至多 6 步就出现 6174 这个数. 证毕.

四、 游戏背后的数学

经研究发现, 四位数有黑洞数 6174; 五位数有黑洞圈 53955→59994, 74943→62964→71973→83952, 63954→61974→82962→75933;六位数有黑洞数

631764, 549945;七位数有黑洞圈 7519743→8429652→7619733→8439552→7509843→9529641→8719722→8649432→7519743;八位数的黑洞数是97508421, 63317664;九位数的黑洞数是 864197532,十位数的黑洞数是6333176664;十一位数有黑洞数 86431976532 和黑洞圈 76320987633→96442965531→87320987622→96653954331→86330986632→96532966431→87331976622→86542965432→76320987633;十二位数有黑洞圈 975550844421→975110888421→977750842221→975550844421;十三位数的黑洞数是8643319766532,十四位数的黑洞数是 63333317666664;十五位数的黑洞数是 864333197666532.

观察上面列举的黑洞数,6174、631764、63317664、633317664 都是黑洞数.猜测: $6\underbrace{33\cdots3}_{n个3}17\underbrace{66\cdots6}_{n个6}4$ 是 $2n+4$ 位数的一个黑洞数;同样地,$864\underbrace{33\cdots3}_{(n-2)个3}197\underbrace{66\cdots6}_{(n-2)个6}532$ 是 $2n+5$ 位数的一个黑洞数.

先要说明的是,任何数最终都会进入黑洞数或者黑洞圈.我们可以通过反证法来解释.若存在一个 n 位数,经过重排求差操作不会得到一个黑洞圈,即不会存在一个循环.那么对这个 n 位数进行无限次操作,每次得到的答案都是不同的.而进行重排求差操作后得到的答案的可能是有限的.因此,对于任意 n 位数,必定存在一个黑洞圈.

下面证明,$6\underbrace{33\cdots3}_{n个3}17\underbrace{66\cdots6}_{n个6}4$ 是 $2n+4$ 位数的一个黑洞数.

$6\underbrace{33\cdots3}_{n个3}17\underbrace{66\cdots6}_{n个6}4$ 经过重排求差操作,得到

$$7\underbrace{66\cdots6}_{n+1个6}4\underbrace{33\cdots3}_{n个3}1-1\underbrace{33\cdots3}_{n个3}4\underbrace{66\cdots6}_{n+1个6}7=6\underbrace{33\cdots3}_{n个3}17\underbrace{66\cdots6}_{n个6}4.$$

得证.同理,可证明 $2n+5$ 位数的黑洞数.请同学们自己尝试.

五、 拓展学习与思考

(1) 数字黑洞 153

任意找一个 3 的倍数的数,先把这个数的每一个数位上的数字都立方,再相

加，得到一个新数，然后把这个新数的每一个数位上的数字再立方、求和，……重复运算下去，就能得到一个固定的数——153，它也是一种数字"黑洞".

例如：① 63 是 3 的倍数，按上述规律运算如下：

$6^3+3^3=216+27=234$，$2^3+4^3+3^3=8+64+27=99$，

$9^3+9^3=729+729=1458$，$1^3+4^3+5^3+8^3=1+64+125+512=702$，

$7^3+0^3+2^3=351$，$3^3+5^3+1^3=153$，$1^3+5^3+3^3=153$.

② $3^3=27$，$2^3+7^3=351$，$3^3+5^3+1^3=153$……

如果换另一个 3 的倍数，试一试，仍然可以得到同样的结论.

除了 0 和 1，自然数中各位数字的立方之和与其本身相等的只有 153、370、371 和 407（此四个数称为"水仙花数"）. 为使 153 成为黑洞，我们开始时须取一个可被 3 整除的正整数. 分别将其各位数字的立方求出，将这些立方相加组成一个新数然后重复这个程序. 除了"水仙花数"外，一个 n 位数的自然数各个数字的 n 次方之和等于它本身的，还有四位的"玫瑰花数"（1634、8208、9474），五位的"五角星数"（54748、92727、93084）. 当数字个数大于五位时，这类数字就叫做"自幂数".

（2）数字黑洞 123（西西弗斯数）

随便选一个很大的数，作为一块"大石头"，如 63904792. 我们以此为基础，按如下规则转换成一个新的三位数. 第一步：数出多位数中偶数的个数（包括 0 个），并以它作为新数的百位数；第二步：数出多位数中奇数的个数，并以它作为新数的十位数. 第三步：将原数的总位数作为新数的个位数. 63904792 中偶数的个数有 4 个，奇数的个数有 4 个，原数为八位数，于是得出新数为 448. 重复上述操作，对 448 作同样的变换. 3 个偶数，奇数有 0 个，原数为三位数，于是就得出 303. 再经转换就得到 123. 一旦得到 123 后，就再也不变化了. 好比被西西弗斯推上山的石头又落到地上，一番辛苦白费.