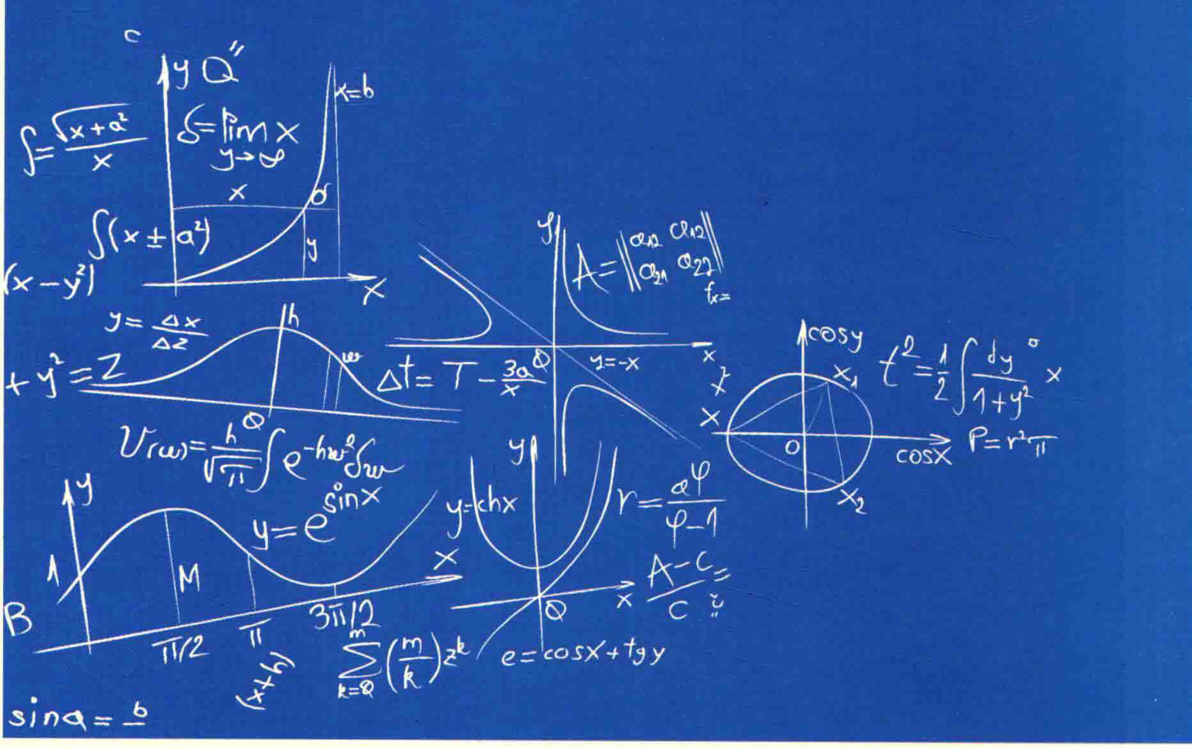
ADVANCED MATHEMATICS

高等数学

上册

王海民　阮其华　主编



厦门大学出版社 XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

ADVANCED MATHEMATICS

高等数学 上册

主　编：王海民　阮其华
副主编：柳志千　林丽芳　张新军

厦门大学出版社　国家一级出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS　全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:上册/王海民,阮其华主编. —厦门:厦门大学出版社,2018.7

ISBN 978-7-5615-7008-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王…②阮… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 122735 号

出 版 人 郑文礼
责任编辑 郑 丹
封面设计 蒋卓群
技术编辑 许克华

出版发行 厦门大学出版社
社　　址 厦门市软件园二期望海路 39 号
邮政编码 361008
总 编 办 0592-2182177 0592-2181406(传真)
营销中心 0592-2184458 0592-2181365
网　　址 http://www.xmupress.com
邮　　箱 xmupress@126.com
印　　刷 三明市华光印务有限公司

开本 787 mm×1 092 mm 1/16
印张 14.75
字数 360 千字
版次 2018 年 7 月第 1 版
印次 2018 年 7 月第 1 次印刷
定价 39.00 元

本书如有印装质量问题请直接寄承印厂调换

厦门大学出版社
微信二维码

厦门大学出版社
微博二维码

前　言

为了推进高等数学教学改革，充分体现基础课以应用为目的，编者根据教育部最新制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，在广泛调查研究的基础上，借鉴当前的教学实践和教改成果，组织编写了本书，以满足普通高等学校理工类专业高等数学课程教学的需要.本书可作为高等院校各相关专业数学课程的教材，还可作为相关工程人员及数学爱好者的阅读参考用书.

本书分为上、下两册.上册主要内容包括函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程等.下册主要内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等.本书内容丰富，并且叙述清楚、透彻，逻辑严谨.

本册由王海民、阮其华主编.具体编写分工如下：王海民编写第1、2章；林丽芳编写第3、7章；柳志千编写第4、5、6章.

本书在编写过程中，参考了其他一些作者的相关内容及资料，并得到了许多专家的大力支持与帮助，在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，成书仓促，书中难免会存在错漏之处，敬请专家和读者批评指正，以帮助我们不断改进.

编者

2018年5月

目　录

第 1 章　函数的极限与连续 …… 1
1.1　初等函数 …… 1
1.1.1　函数的概念 …… 1
1.1.2　函数的几种特性 …… 4
1.1.3　反函数、复合函数和初等函数 …… 6
习题 1.1 …… 11
1.2　极　限 …… 12
1.2.1　数列的极限 …… 12
1.2.2　函数的极限 …… 14
1.2.3　无穷小量与无穷大量 …… 18
习题 1.2 …… 21
1.3　极限的运算 …… 22
1.3.1　极限的四则运算法则 …… 22
1.3.2　极限的存在准则 …… 24
1.3.3　两个重要极限 …… 26
习题 1.3 …… 28
1.4　函数的连续性 …… 29
1.4.1　连续函数的概念 …… 29
1.4.2　函数的间断点及其分类 …… 31
1.4.3　初等函数的连续性 …… 33
1.4.4　闭区间上连续函数的性质 …… 34
习题 1.4 …… 36
总习题 1 …… 37

第 2 章　导数与微分 …… 40
2.1　导数的概念 …… 40
2.1.1　引　例 …… 40
2.1.2　导数的定义 …… 41
2.1.3　求导实例 …… 44
2.1.4　导数的几何意义 …… 46

2.1.5 函数的可导性与连续性的关系 …… 46
习题 2.1 …… 47
2.2 导数的运算 …… 48
2.2.1 导数的四则运算法则 …… 48
2.2.2 反函数的求导法则 …… 49
2.2.3 基本初等函数的求导公式 …… 51
2.2.4 复合函数的求导法则 …… 52
2.2.5 隐函数的求导法则 …… 55
2.2.6 对数求导法 …… 56
2.2.7 参数方程求导 …… 57
习题 2.2 …… 58
2.3 高阶导数 …… 59
习题 2.3 …… 60
2.4 微 分 …… 61
2.4.1 微分的概念与几何意义 …… 61
2.4.2 微分的运算 …… 63
2.4.3 微分在近似计算中的应用 …… 64
习题 2.4 …… 66
总习题 2 …… 66

第 3 章 微分中值定理与导数的应用 …… 69
3.1 微分中值定理 …… 69
3.1.1 罗尔定理 …… 69
3.1.2 拉格朗日中值定理 …… 71
3.1.3 柯西中值定理 …… 74
习题 3.1 …… 76
3.2 洛必达法则 …… 76
3.2.1 $\frac{0}{0}$型 …… 77
3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$型 …… 78
3.2.3 可化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型的极限 …… 79
习题 3.2 …… 82
3.3 泰勒公式 …… 83
3.3.1 泰勒公式 …… 83
3.3.2 几个常用函数的展开式 …… 85
3.3.3 泰勒公式的应用 …… 88

习题 3.3 …… 90
3.4 函数的单调性与曲线的凹凸性 …… 90
3.4.1 函数单调性的判定法 …… 90
3.4.2 曲线的凹凸与拐点 …… 93
习题 3.4 …… 96
3.5 函数的极值与最值 …… 97
3.5.1 函数的极值及其求法 …… 97
3.5.2 最大值和最小值问题 …… 101
习题 3.5 …… 104
3.6 函数图形的描绘 …… 105
3.6.1 曲线的渐近线 …… 105
3.6.2 函数图形的描绘 …… 107
习题 3.6 …… 111
3.7 曲率与方程的近似解 …… 111
3.7.1 弧微分 …… 111
3.7.2 曲率及其计算公式 …… 112
3.7.3 曲率圆与曲率半径 …… 115
3.7.4 方程的近似解 …… 116
习题 3.7 …… 119
总习题 3 …… 120

第 4 章 不定积分 …… 122
4.1 不定积分的概念 …… 122
4.1.1 原函数 …… 122
4.1.2 不定积分 …… 123
4.1.3 不定积分的几何意义 …… 124
习题 4.1 …… 125
4.2 不定积分的基本公式与性质 …… 126
4.2.1 不定积分的基本公式 …… 126
4.2.2 不定积分的性质 …… 127
习题 4.2 …… 129
4.3 不定积分的计算 …… 130
4.3.1 第一类换元积分法 …… 130
4.3.2 第二类换元积分法 …… 133
4.3.3 分部积分法 …… 136
习题 4.3 …… 140
4.4 几种特殊类型函数的积分举例 …… 141

4.4.1 有理函数的积分 …… 141
4.4.2 三角函数有理式的积分 …… 146
4.4.3 简单无理式的积分 …… 147
习题 4.4 …… 148
总习题 4 …… 149

第 5 章 定积分 …… 153
5.1 定积分的概念与性质 …… 153
5.1.1 引 例 …… 153
5.1.2 定积分的概念与几何意义 …… 155
5.1.3 定积分的性质 …… 157
习题 5.1 …… 159
5.2 牛顿-莱布尼茨公式 …… 160
5.2.1 变上限的定积分及导数 …… 160
5.2.2 牛顿-莱布尼茨公式 …… 162
习题 5.2 …… 164
5.3 定积分的计算 …… 164
5.3.1 定积分的换元积分法 …… 164
5.3.2 定积分的分部积分法 …… 167
习题 5.3 …… 169
5.4 广义积分 …… 170
5.4.1 无穷区间上的广义积分 …… 170
5.4.2 无界函数的广义积分 …… 171
习题 5.4 …… 173
总习题 5 …… 173

第 6 章 定积分的应用 …… 176
6.1 定积分的元素法 …… 176
6.2 定积分在几何上的应用 …… 177
6.2.1 求平面图形的面积 …… 177
6.2.2 求旋转体的体积 …… 179
6.2.3 求平面曲线的弧长 …… 181
习题 6.2 …… 182
6.3 定积分在物理中的应用 …… 182
6.3.1 求变力做功 …… 182
6.3.2 求液体的压力 …… 183
习题 6.3 …… 184

6.4 定积分在经济管理中的应用 …… 184
习题 6.4 …… 185
总习题 6 …… 185

第 7 章 微分方程 …… 187
7.1 微分方程的基本概念 …… 187
习题 7.1 …… 190
7.2 可分离变量的微分方程 …… 190
习题 7.2 …… 196
7.3 一阶齐次方程 …… 197
习题 7.3 …… 200
7.4 一阶线性微分方程 …… 200
习题 7.4 …… 204
7.5 可降阶的高阶微分方程 …… 205
习题 7.5 …… 211
7.6 二阶常系数线性微分方程 …… 211
7.6.1 二阶常系数齐次线性微分方程 …… 211
7.6.2 二阶常系数非齐次线性微分方程 …… 215
习题 7.6 …… 220
总习题 7 …… 221

参考文献 …… 223

第1章　函数的极限与连续

高等数学主要研究的对象是函数，研究的工具是极限.函数是现代数学的基本概念，连续是函数的一个重要性态.极限理论是微积分和级数的理论基础.本章将在复习和深化函数知识的基础上，进一步学习函数的极限、连续性，掌握求极限的方法.

1.1　初等函数

1.1.1　函数的概念

1. 变量、区间与邻域

我们在观察各种自然现象或研究实际问题的时候，会遇到许多的量，这些量一般可分为两种：

常量：在观察过程中保持固定不变的量，通常用字母 a,b,c 等表示.

变量：在观察过程中可取不同数值的量，通常用字母 x,y,z 等表示.

例如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数保持一定，它们是常量，而气体的温度和压力则是变量.

任何一个变量，总有一定的变化范围.如果变量的变化是连续的，常用区间来表示.区间是高等数学中常用的实数集，包括四种有限集和五种无限集，它们的名称、记号和定义如下：

闭区间	$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	
开区间	$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$	
半开半闭区间	$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$	$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$
无限区间	$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$	$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$
	$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$	$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$
	$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$	

其中 a,b 为确定的实数，分别称为区间的**左端点**和**右端点**.闭区间$[a,b]$、半开半闭区间$[a,b)$及$(a,b]$、开区间(a,b)为有限区间.有限区间的左、右端点之间的距离 $b-a$ 称为**区间长度**. $+\infty$ 与 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”与“负无穷大”，它们不表示任何数，仅仅是符号.

区间在数轴上的表示如图 1-1 所示.

邻域是高等数学中经常用到的概念.设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，称实数集 $\{x\mid |x-a|<\delta\}$ 为**点 a 的 δ 邻域**，记作$U(a,\delta)$，a 称为该**邻域的中心**，δ 称为该**邻域的半径**.由邻域的定义知

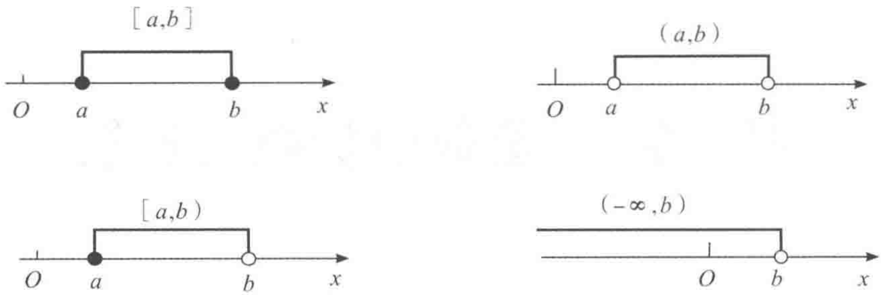


图 1-1

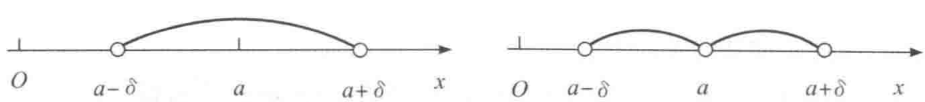
$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$$

表示分别以 $a-\delta,a+\delta$ 为左、右端点的开区间,区间长度为 2δ,如图 1-2(a) 所示.

在$U(a,\delta)$ 中去掉中心点 a 得到的实数集$\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$ 称为**点 a 的去心 δ 邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,显然,去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 是两个开区间$(a-\delta,a)$ 和$(a,a+\delta)$ 的并集,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta),$$

如图 1-2 所示.



(a) $U(a,\delta)$ (b) $\mathring{U}(a,\delta)$

图 1-2

2. 函数的概念

在自然现象或生产过程中,同时出现的某些变量往往存在着相互依赖、相互制约的关系,这种关系在数学上称为函数关系.

定义 1.1 设 x 和 y 是某一变化过程中的两个变量,如果 x 在实数的某一范围 D 内任意取一个数值,变量 y 按照一定的对应法则 f,都有唯一确定的实数值与之对应,则称 y 是 x **的函数**,记作

$$y=f(x),x\in D,$$

称 x 为**自变量**,y 为**因变量**或函数,自变量 x 的取值范围 D 叫作函数的**定义域**.

当自变量 x 取数值 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的因变量 y 的值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**,记为 $f(x_0)$ 或$y\big|_{x=x_0}$.当 x 取遍 D 中的所有数值时,与之对应的 y 值的集合 M 叫作这个函数的**值域**,记为 $f(D)$,即 $f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$.

在函数的定义中,自变量 x 与因变量 y 的对应法则也可用其他字母 g,F,G,f_1 等表示.如果两个函数的定义域相同,并且对应法则也相同(从而值域也相同),那么它们不管用什么记号,均表示同一个函数.

在实际问题中,函数的定义域由实际意义确定.例如,正方形的面积 S 与边长 x 的关系是 $S=x^2$,定义域为$(0,+\infty)$.在研究由公式表达的函数时,我们规定:函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的一切实数值所组成的集合.例如,函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是

$(-1,1)$，函数 $y=\sin x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

例 1　设有函数 $f(x)=x-1$ 和 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$，问它们是否为同一个函数？

解　$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)$ 在 $x=-1$ 点无定义，其定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同，从而它们不是同一个函数.

例 2　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x+1}+\sqrt{-x}+\sqrt{x+4}$；　　　(2) $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$.

解　(1) 要使函数 y 有意义，必须保证 $\begin{cases}x+1\neq 0,\\-x\geqslant 0,\\x+4\geqslant 0\end{cases}$ 成立，即 $\begin{cases}x\neq -1,\\x\leqslant 0,\\x\geqslant -4.\end{cases}$ 这个不等式组的解为 $-4\leqslant x\leqslant 0$ 且 $x\neq -1$，所以函数的定义域为 $[-4,-1)\cup(-1,0]$.

(2) 要使函数 y 有意义，必须保证 $\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\\sin x>0\end{cases}$ 成立，即

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\2n\pi<x<(2n+1)\pi\quad(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).\end{cases}$$

这个不等式组的解为 $-4\leqslant x<-\pi$ 或 $0<x<\pi$，所以函数的定义域为 $[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.

例 3　求函数 $f(x)=x^2-3x+5$ 在 $x=3$，$x=x_0$，$x=x_0+h$ 各点的函数值.

解

$$f(3)=3^2-3\times 3+5=5;$$

$$f(x_0)=x_0^2-3x_0+5;$$

$$f(x_0+h)=(x_0+h)^2-3(x_0+h)+5=x_0^2+(2h-3)x_0+(h^2-3h+5).$$

3. 函数的表示方法

函数的表示方法通常有公式法(又称解析法)、列表法和图像法三种.

(1) 以数学式子表示函数的方法叫公式法，如 $y=x^2$，$y=\cos x$.公式法的优点是便于理论推导和计算.

(2) 以表格形式表示函数的方法叫列表法，它是将自变量的值与对应的函数值列为表格，如三角函数表，对数表等.列表法的优点是所求的函数值容易查得.

(3) 以图形表示函数的方法叫图形法或图像法.这种方法在工程技术上应用很普遍，其优点是直观形象，可看到函数的变化趋势.

4. 分段函数

在定义域的不同范围内，用不同的解析式表示的函数称为**分段函数**.

例 4　旅客携带行李乘飞机时，行李的质量不超过 20 千克时不收费用，若超过 20 千克，每超过 1 千克收运费 a 元，建立运费 y 与行李质量 x 的函数关系.

解　由题意知，当 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时，运费 $y=0$；而当 $x>20$ 时，只有超过的部分 $x-20$ 按每千克收运费 a 元，此时 $y=a(x-20)$.于是函数 y 可以写成：

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20,\\a(x-20), & x>20,\end{cases}$$

这样便建立了行李质量 x 与行李运费 y 之间的函数关系.

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(-3)$,$f(0)$,$f(2)$,并作图.

解 $f(-3)=-3+1=-2$,$f(0)=0$,$f(2)=2-1=1$. 图像如图 1-3 所示.

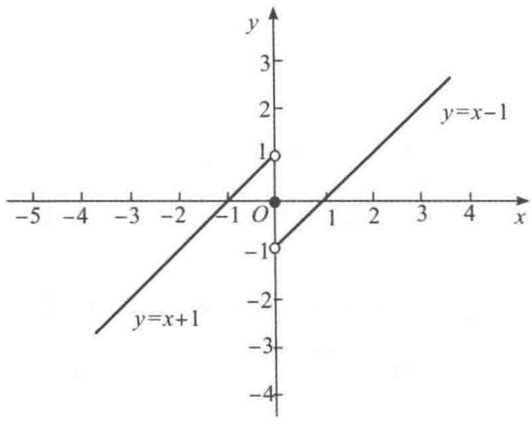


图 1-3

分段函数是公式法表达函数的一种方式,在理论分析和实际应用中都是很有用的.需要注意的是:分段函数是用几个公式合起来表示一个函数,而不是表示几个函数.分段函数的定义域是各个定义区间的并集.

5. 隐函数

由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数称为**隐函数**,例 $xy=1$,$e^x-2\ln(xy)+1=0$ 等.相应地,我们将前面讨论的函数 $y=f(x)$ 称为**显函数**.

有些隐函数可以表示成显函数的形式,例如,$x^2+y^2-1=0$ 确定了一个隐函数,从中解出 y,得 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$,就变成了显函数.而有些隐函数却不可以,如方程 $y+x-\ln y=0$ 所确定的函数就无法表示成显函数.

1.1.2 函数的几种特性

1. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subseteq D$,如果对于任意 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,总有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**(图 1-4),区间 I 称为函数 $y=f(x)$ 的一个单调增加区间;当 $x_1<x_2$ 时,总有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调减少**(图 1-5),区间 I 称为函数 $y=f(x)$ 的一个单调减少区间.

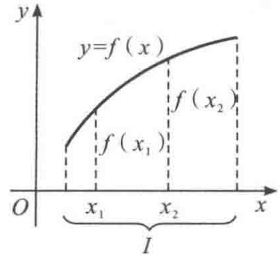


图 1-4

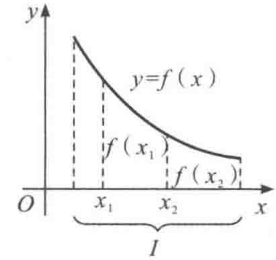


图 1-5

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**，所在的区间称为这个函数的**单调区间**.

例如：函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的，则其在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数(图 1-6).

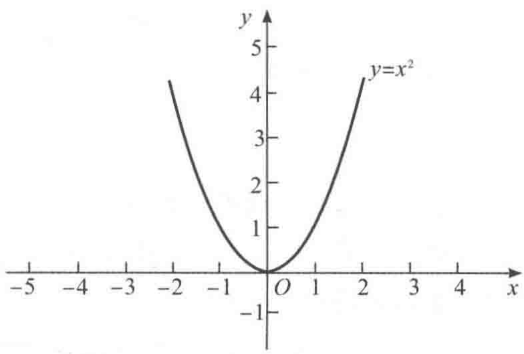


图 1-6

注意：函数的单调性是关于函数在区间上所讨论的一个概念，绝不能离开区间谈函数的单调性.

2. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subseteq D$，如果存在某个正数 M，对于任意的 $x\in X$，都有不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称 $f(x)$ 在 X 上**有界**，或称 $f(x)$ 是 X 上的**有界函数**.如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**，或称 $f(x)$ 是 X 上的**无界函数**.

应该注意两点：① 当函数 $y=f(x)$ 在 X 上有界时，正数 M 的取法不是唯一的.例如 $y=\sin x$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上是有界的，有 $|\sin x|\leqslant 1$，但我们也可以取 $M=2$，即 $|\sin x|\leqslant 2$ 总是成立的，实际上 M 可以取任何大于 1 的数.② 函数的有界性，不仅仅是要注意函数的特点，还要注意自变量的变化范围 X.例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，但在区间 $(0,1)$ 内是无界的.

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，即当 $x\in D$ 时，有 $-x\in D$.如果对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.如果 $f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数，则称 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

如 $y=x^2$ 与 $y=\cos x$ 都是偶函数，$y=x^3$ 与 $y=\sin x$ 都是奇函数，而 $y=\sin x+\cos x$ 是**非奇非偶函数**.

在几何上，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

例 6　判断函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解　因为函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以,$f(x)$ 是奇函数.

4. 周期性

设函数 $y=f(x), x\in D$.如果存在某一非零常数 T,使得对于任意 $x\in D$,均有 $x\pm T\in D$,且有 $f(x+T)=f(x)$ 成立,则称函数 $y=f(x)$ 为**周期函数**,称 T 为该函数的周期.通常我们说的周期函数的周期都是指**最小正周期**.

如函数 $y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,函数 $y=\tan x$ 及 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

在几何上,周期为 T 的周期函数的图像在长度为 T 的相邻区间上形状相同.

例 7 求函数 $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ 的周期,其中 A,ω,φ 为常数.

解 设所求的周期为 T,由于

$$f(t+T)=A\sin[\omega(t+T)+\varphi]=A\sin[(\omega t+\varphi)+\omega T],$$

要使

$$f(t+T)=f(t),$$

即

$$A\sin[(\omega t+\varphi)+\omega T]=A\sin(\omega t+\varphi)$$

成立,因为 $\sin t$ 的周期为 2π,只需

$$\omega T=2n\pi(n=0,1,2,\cdots).$$

使上式成立的最小正数为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$(取 $n=1$),所以函数 $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ 的周期是$\frac{2\pi}{\omega}$.

1.1.3 反函数、复合函数和初等函数

1. 反函数

函数关系的实质就是从定量分析的角度来描述运动过程中变量之间的相互依赖关系.但在研究过程中,哪个量作为自变量,哪个量作为因变量(函数)是由具体问题来决定的.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W.对于值域 W 中的任一数值 y,在定义域 D 上至少可以确定一个数值 x 与 y 对应,且满足关系式

$$f(x)=y.$$

如果把 y 作为自变量,x 作为因变量,则由上述关系式可确定一个新函数 $x=\varphi(y)$(或 $x=f^{-1}(y)$).这个新函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**.反函数的定义域为 W,值域为 D.相对于反函数,函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

由于习惯上采用字母 x 表示自变量,y 表示函数.因此,将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 换成 y,y 换成 x,$y=f(x)$ 的反函数即为 $y=f^{-1}(x)$.

注意:(1) 函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 是表示同一个函数.

(2) 求反函数的过程可分为两步:第一步,从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$;第二步,交换字母 x 和 y.

例 8　求函数 $y=10^{x+1}$ 的反函数.

解　由 $y=10^{x+1}$ 解出 $x=\lg y-1$,然后交换 x 和 y,得 $y=\lg x-1$,即 $y=\lg x-1$ 是函数 $y=10^{x+1}$ 的反函数.

2. 基本初等函数

在大量的函数关系中,有几种函数是最常见的、最基本的.它们是常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.这几类函数称为**基本初等函数**.下面分别介绍它们的定义、图像和性质.

(1) 常值函数 $y=C$(C 为任意常数)

由于常值函数在定义域内每一点处所对应的函数值都相等,所以其图像是平行于 x 轴且截距为 C 的直线.

(2) 幂函数 $y=x^u$(u 为任意实数)

幂函数 $y=x^u$($u\in\mathbf{R}$) 随着 u 的取值不同,其定义域、值域、图像和性质也不尽相同.当 $u>0$ 时,如图 1-7 所示,$y=x^u$ 的定义域包含区间$[0,+\infty)$,图像都过$(0,0)$,$(1,1)$ 点,在$(0,+\infty)$ 内,$y=x^u$ 是严格单调增加的;当 $u<0$ 时,如图 1-8 所示,$y=x^u$ 的定义域包含区间$(0,+\infty)$,图像都过$(1,1)$ 点,在$(0,+\infty)$ 内,$y=x^u$ 是严格单调减少的.

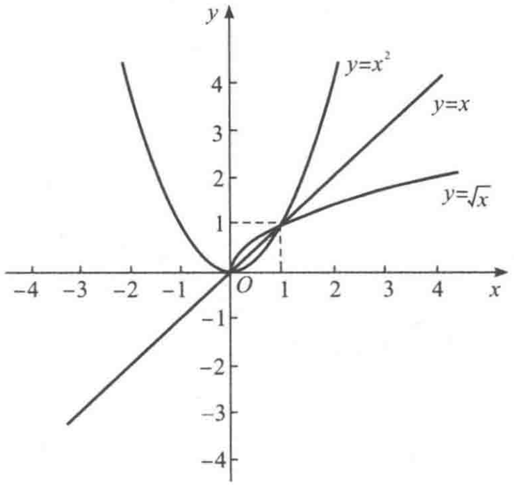


图 1-7

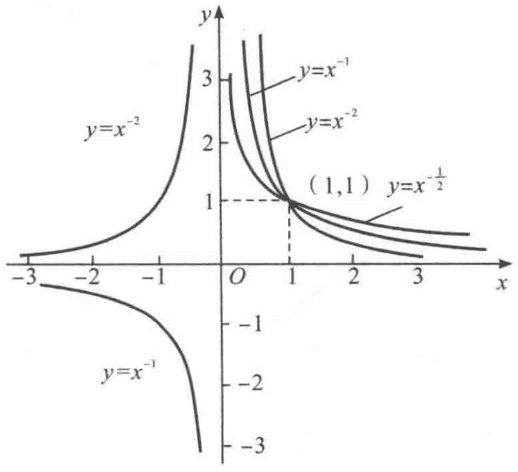


图 1-8

(3) 指数函数 $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$)

指数函数 $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$) 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$,图像都过$(0,1)$ 点.当 $a>1$ 时,它单调增加;当 $0<a<1$ 时,它单调减少(图 1-9).

(4) 对数函数 $y=\log_a x$($a>0,a\neq1$)

对数函数 $y=\log_a x$($a>0,a\neq1$) 是指数函数 $y=a^x$($a>0,a\neq1$) 的反函数,它的定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$,图像都过$(1,0)$ 点.当 $a>1$ 时,它单调增加;当 $0<a<1$ 时,它单调减少(图 1-10).

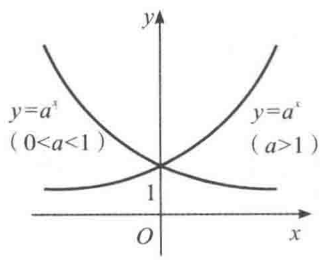


图 1-9

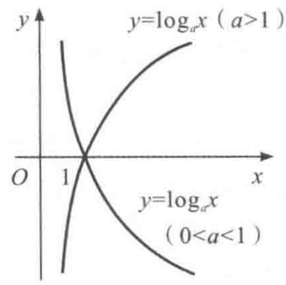


图 1-10

(5) 三角函数

常用的三角函数有:正弦函数 $y=\sin x$,余弦函数 $y=\cos x$,正切函数 $y=\tan x$,余切函数 $y=\cot x$.

$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[-1,1]$.它们都是以 2π 为周期的周期函数,都是有界函数.正弦函数是奇函数,余弦函数是偶函数.如图 1-11 及图 1-12 所示.

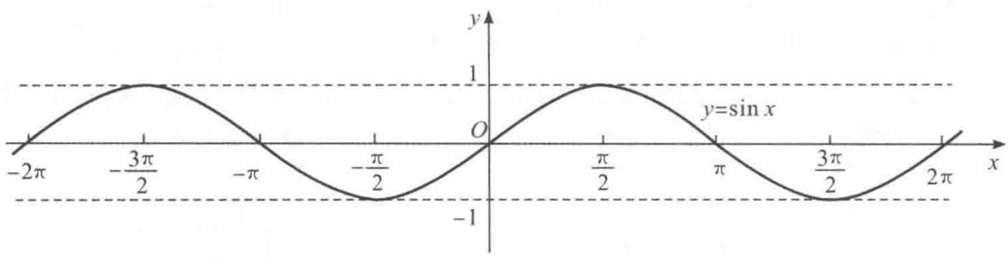


图 1-11

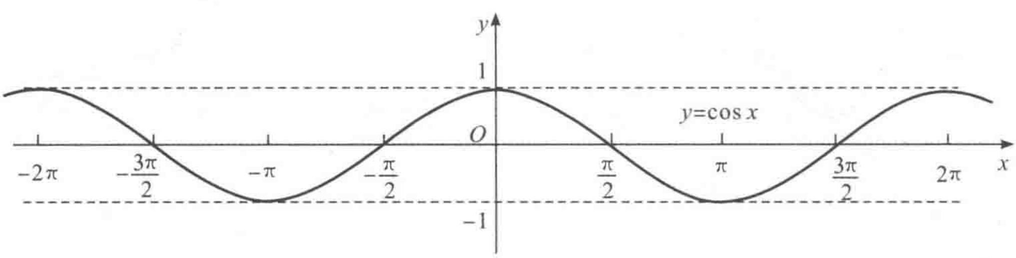


图 1-12

$y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x \middle| x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$,值域是 $(-\infty,+\infty)$.它是奇函数,是以 π 为周期的周期函数,如图 1-13 所示.

$y=\cot x$ 的定义域是 $\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$,值域是 $(-\infty,+\infty)$.它是奇函数,是以 π 为周期的周期函数,如图 1-14 所示.

三角函数还包括正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$,它们都是以 2π 为周期的周期函数.