第十届全国教育图书展优秀畅销图书
国家集训队教练执笔联合编写
在香港出版繁体字版和网络版
版版畅销，网络销量居榜首

畅销15年
超1200万册

总主编 单墫 熊斌

奥数教程学习手册

·配《奥数教程》第六版·

高一年级

熊斌 冯志刚
陶磊 彭如倩 编著

上海市著名商标
华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

总主编 单墫 熊斌

奥数教程
学习手册

·配《奥数教程》第六版·

华东师范大学出版社

高一年级

熊 斌 冯志刚
陶 磊 彭如倩 编著
关 钲 张 娜

图书在版编目(CIP)数据

奥数教程学习手册. 高一年级/熊斌，冯志刚，陶磊，彭如倩编著. —上海：华东师范大学出版社，2010
ISBN 978-7-5617-7690-2

Ⅰ. 奥…　Ⅱ. ①熊…　②冯…　③陶…　④彭…
Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 073316 号

奥数教程(第六版)学习手册

高一年级

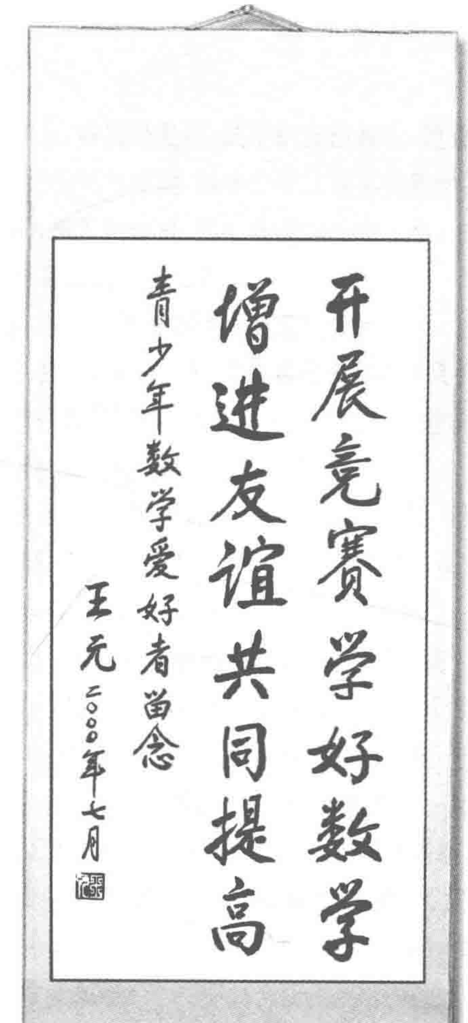
总 主 编　单 墫　熊 斌
编　　著　熊 斌　冯志刚　陶 磊　彭如倩　关 钲　张 娜
总 策 划　倪 明
项目编辑　孔令志
审读编辑　徐惟简
封面设计　高 山
版式设计　蒋 克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　常熟高专印刷有限公司
开　　本　890×1240　32 开
印　　张　8.75
字　　数　219 千字
版　　次　2014 年 6 月第二版
印　　次　2016 年 9 月第 16 次
书　　号　ISBN 978-7-5617-7690-2/G·4451
定　　价　18.00 元

出 版 人　王 焰

(如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社市场部调换或电话 021-62865537 联系)



著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生致青少年数学爱好者

前　言

据说在很多国家，特别是美国，孩子们害怕数学，把数学作为“不受欢迎的学科”. 但在中国，情况很不相同，很多少年儿童喜爱数学，数学成绩也都很好. 的确，数学是中国人擅长的学科，如果在美国的中小学，你见到几个中国学生，那么全班数学的前几名就非他们莫属.

在数(shǔ)数(shù)阶段，中国儿童就显出优势.

中国人能用一只手表示 1～10，而很多国家非用两只手不可.

中国人早就有位数的概念，而且采用最方便的十进制(不少国家至今还有 12 进制，60 进制的残余).

中国文字都是单音节，易于背诵，例如乘法表，学生很快就能掌握，再“傻”的人也都知道“不管三七二十一”. 但外国人，一学乘法，头就大了. 不信，请你用英语背一下乘法表，真是佶屈聱牙，难以成诵.

圆周率 $\pi=3.141\,59\cdots$. 背到小数后五位，中国人花一两分钟就够了. 可是俄国人为了背这几个数字，专门写了一首诗，第一句三个单词，第二句一个……要背 π 先背诗，这在我们看来简直是自找麻烦，可他们还作为记忆的妙法.

四则运算应用题及其算术解法，也是中国数学的一大特色. 从很古的时候开始，中国人就编了很多应用题，或联系实际，或饶有兴趣，解法简洁优雅，机敏而又多种多样，有助于提高学生的学习兴趣，启迪学生智慧. 例如：

“一百个和尚一百个馒头，大和尚一个人吃三个，小和尚三个人吃一个，问有几个大和尚，几个小和尚?”

外国人多半只会列方程解. 中国却有多种算术解法，如将每个大和尚“变”成 9 个小和尚，100 个馒头表明小和尚是 300 个，多出 200 个和尚，是由于每个大和尚变小和尚，多变出 8 个，从而 $200\div8=25$ 即是大和尚人数. 小和尚自然是 75 人，或将一个大和尚与 3 个小和尚编成一组，平均每人吃一个馒头. 恰好与总体的平均数相等. 所以大和尚与小和尚这样编组后不多不少，即大和尚是 $100\div(3+1)=25$ 人.

中国人善于计算,尤其善于心算.古代还有人会用手指计算(所谓"掐指一算").同时,中国很早就有计算的器械,如算筹、算盘.后者可以说是计算机的雏形.

在数学的入门阶段——算术的学习中,我国的优势显然,所以数学往往是我国聪明的孩子喜爱的学科.

几何推理,在我国古代并不发达(但关于几何图形的计算,我国有不少论著),比希腊人稍逊一筹.但是,中国人善于向别人学习.目前我国中学生的几何水平,在世界上遥遥领先.曾有一个外国教育代表团来到我国一个初中班,他们认为所教的几何内容太深,学生不可能接受,但听课之后,不得不承认这些内容中国的学生不但能够理解,而且掌握得很好.

我国数学教育成绩显著.在国际数学竞赛中,我国选手获得众多奖牌,就是最有力的证明.从 1986 年我国正式派队参加国际数学奥林匹克以来,中国队已经获得了 14 次团体冠军,可谓是成绩骄人.当代著名数学家陈省身先生曾对此特别赞赏.他说:"今年一件值得庆祝的事,是中国在国际数学竞赛中获得第一……去年也是第一名."(陈省身 1990 年 10 月在台湾成功大学的讲演"怎样把中国建为数学大国")

陈省身先生还预言:"中国将在 21 世纪成为数学大国."

成为数学大国,当然不是一件容易的事,不可能一蹴而就,它需要坚持不懈的努力.我们编写这套丛书,目的就是:(1)进一步普及数学知识,使数学为更多的青少年喜爱,帮助他们取得好的成绩;(2)使喜爱数学的同学得到更好的发展,通过这套丛书,学到更多的知识和方法.

"天下大事,必作于细."我们希望,而且相信,这套丛书的出版,在使我国成为数学大国的努力中,能起到一点作用.本丛书初版于 2000 年,现根据课程改革的要求对各册再作不同程度的修订.

著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生担任本丛书顾问,并为青少年数学爱好者题词,我们表示衷心的感谢.还要感谢华东师大出版社及倪明、孔令志先生,没有他们,这套丛书不会是现在这个样子.

单 墫 熊 斌

2014 年 5 月

目　录

习题详细解答

基础篇

第 1 讲　集合的概念与运算 …… 1
第 2 讲　有限集元素的数目 …… 7
第 3 讲　二次函数 …… 12
第 4 讲　函数的图象和性质 …… 20
第 5 讲　幂函数、指数函数、对数函数 …… 27
第 6 讲　含绝对值的函数 …… 34
第 7 讲　函数的最大值和最小值 …… 38
第 8 讲　等差数列与等比数列 …… 46
第 9 讲　高阶等差数列 …… 52
第 10 讲　数列求和 …… 54
第 11 讲　数列综合题 …… 59
第 12 讲　三角函数的概念与性质 …… 66
第 13 讲　三角恒等变形 …… 73
第 14 讲　三角不等式 …… 80
第 15 讲　三角函数的最大值和最小值问题 …… 89
第 16 讲　反三角函数与三角方程 …… 95
第 17 讲　正弦定理与余弦定理 …… 102
第 18 讲　向量的概念与运算 …… 111

第 19 讲　空间的“角”和“距离” …… 116
第 20 讲　截面、折叠和展开 …… 123
第 21 讲　射影与面积射影定理 …… 128

提高篇

第 22 讲　集合的分划 …… 133
第 23 讲　二次函数综合题 …… 138
第 24 讲　离散量的最大值与最小值 …… 142
第 25 讲　简单的函数迭代和函数方程 …… 152
第 26 讲　构造函数解题 …… 162
第 27 讲　向量与几何 …… 166
第 28 讲　四面体 …… 173
第 29 讲　递推数列与递推方法 …… 179
第 30 讲　周期数列 …… 189

竞赛热点精讲

专题 1　集合及其子集(1) …… 195
专题 2　集合及其子集(2) …… 203
专题 3　函数(1) …… 210
专题 4　函数(2) …… 217
专题 5　函数方程 …… 223
专题 6　三角函数 …… 232
专题 7　三角函数在平面几何中的应用 …… 241
专题 8　向量及其应用 …… 250
专题 9　数列问题 …… 257
专题 10　抽屉原理 …… 264

目　录

习题详细解答

基础篇

第 1 讲　集合的概念与运算 …… 1
第 2 讲　有限集元素的数目 …… 7
第 3 讲　二次函数 …… 12
第 4 讲　函数的图象和性质 …… 20
第 5 讲　幂函数、指数函数、对数函数 …… 27
第 6 讲　含绝对值的函数 …… 34
第 7 讲　函数的最大值和最小值 …… 38
第 8 讲　等差数列与等比数列 …… 46
第 9 讲　高阶等差数列 …… 52
第 10 讲　数列求和 …… 54
第 11 讲　数列综合题 …… 59
第 12 讲　三角函数的概念与性质 …… 66
第 13 讲　三角恒等变形 …… 73
第 14 讲　三角不等式 …… 80
第 15 讲　三角函数的最大值和最小值问题 …… 89
第 16 讲　反三角函数与三角方程 …… 95
第 17 讲　正弦定理与余弦定理 …… 102
第 18 讲　向量的概念与运算 …… 111

第 19 讲　空间的“角”和“距离” …… 116
第 20 讲　截面、折叠和展开 …… 123
第 21 讲　射影与面积射影定理 …… 128

提高篇

第 22 讲　集合的分划 …… 133
第 23 讲　二次函数综合题 …… 138
第 24 讲　离散量的最大值与最小值 …… 142
第 25 讲　简单的函数迭代和函数方程 …… 152
第 26 讲　构造函数解题 …… 162
第 27 讲　向量与几何 …… 166
第 28 讲　四面体 …… 173
第 29 讲　递推数列与递推方法 …… 179
第 30 讲　周期数列 …… 189

竞赛热点精讲

专题 1　集合及其子集(1) …… 195
专题 2　集合及其子集(2) …… 203
专题 3　函数(1) …… 210
专题 4　函数(2) …… 217
专题 5　函数方程 …… 223
专题 6　三角函数 …… 232
专题 7　三角函数在平面几何中的应用 …… 241
专题 8　向量及其应用 …… 250
专题 9　数列问题 …… 257
专题 10　抽屉原理 …… 264

第 1 讲

集合的概念与运算

1 983. 因为 A、B 都是集合 U 的子集，所以 $0 \leqslant a \leqslant 31$，$1014 \leqslant b \leqslant 2012$.

所以 $A \cap B = \{x \mid b - 1014 \leqslant x \leqslant a + 1981\}$，或 $A \cap B = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

故当且仅当 $a = 0$，$b = 2012$，或 $a = 31$，$b = 1014$ 时，集合 $A \cap B$ 的长度最小，最小值为 $1981 - 998 = 1014 - 31 = 983$.

2 $\{-3, 0, 2, 6\}$. 显然，在 A 的所有三元子集中，每个元素均出现了 3 次，所以

$$3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = (-1) + 3 + 5 + 8 = 15,$$

故 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5$，于是集合 A 的四个元素分别为 $5 - (-1) = 6$，$5 - 3 = 2$，$5 - 5 = 0$，$5 - 8 = -3$，因此，集合 $A = \{-3, 0, 2, 6\}$.

3 讨论 x、y、z 的符号，可得所求集合为 $\{-3, -1, 1, 5\}$.

4 由 $A \cap B = \{2, 5\}$，知 $5 \in A$，

所以 $$a^3 - 2a^2 - a + 7 = 5,$$

即 $$(a - 2)(a^2 - 1) = 0,$$

所以 $$a = 2 \text{ 或 } a = \pm 1.$$

当 $a = 2$ 时，$5a - 5 = 5$，$-\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + 4 = 5$，即 B 中元素有重复，不可能.

当 $a = 1$ 时，$A = \{2, 4, 5\}$，$B = \{1, 0, 5, 12\}$，此时 $A \cap B = \{5\}$，不合题意.

对所求两个问题分别讨论，可知当 $a=0$ 或 1 时，$(A\cup B)\cap C$ 恰有两个元素；当 $a=-1\pm\sqrt{2}$ 时，$(A\cup B)\cap C$ 恰有三个元素.

14 由 $A\cap B=\{a_1, a_4\}$，可知 a_1、a_4 为完全平方数，又 $a_1+a_4=10$，于是只能是 $a_1=1$，$a_4=9$. 这时，由 $a_4<a_5$，可知 $a_5>9$，但 $A\cup B$ 中所有元素之和为 224，故

$$a_5^2\leqslant 224-9^2-1^2-(1+9)-2^2-3^2-(2+3),$$

所以，$a_5<11$，故 $a_5=10$，这时 $a_2^2+a_3^2+a_2+a_3=32$，类似地，利用不等式估计，可知 $a_2=3$，$a_3=4$. 从而 $A=\{1, 3, 4, 9, 10\}$.

15 注意到，集合$\{1, 2, 3; 17\sim80; 401\sim2000\}$中没有一个数是另一个数的 5 倍，这里 $17\sim80$ 表示 17 到 80 之间的所有正整数. 于是，$|A|$的最大值不小于 1667. 另一方面，设 A 是满足条件的$\{1, 2, \cdots, 2000\}$的子集，且 $|A|\geqslant1668$. 而$\{1, 2, \cdots, 2000\}$中除去下述数对中的数外，还有 1331 个数：$(1, 5)$，$(2, 10)$，$(3, 15)$，$(k, 5k)$，$(t, 5t)$，其中 $4\leqslant k\leqslant16$，$81\leqslant t\leqslant400$，$k$、$t\in\mathbf{N}^*$. 所以，上述 336 个数对中，应有 337 个数入选 A 中，这表明 A 中有两个数满足：一个数是另一个数的 5 倍. 从而，$|A|$的最大值为 1667.

16 注意到，对 A_1 中的每个元素 a，a 至多属于除 A_1 以外的 29 个集合. 否则，设 $a\in A_1$，且 a 还在 A_2，$\cdots$，A_n 中的 30 个集合中出现，不妨设，$a\in A_i$，$i=2, 3, \cdots, 31$，由于 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\varnothing$，故存在 $j\geqslant32$，使 $a\notin A_j$，这时利用条件(2)，可知 A_1，A_2，$\cdots$，A_{31} 之间除公共元 a 外没有其他元素同时属于 A_1，A_2，$\cdots$，A_{31} 中的两个集合，再由(2) $A_i\cap A_j$ 为单元集，$1\leqslant i\leqslant31$，可知 A_j 至少应有 31 个元素. 这是一个矛盾. 利用 A_1 中的每个元素至多属于另外的 29 个集合，可知 $n\leqslant29\times30+1=871$. 下面构造 871 个满足条件的集合. 令 $A=\{a_0, a_1, \cdots, a_{29}\}$，$B_i=\{a_0, a_{i,1}, a_{i,2}, \cdots, a_{i,29}\}$，$1\leqslant i\leqslant29$；$A_{i,j}=\{a_i\}\cup\{a_{k,\, j+(k-1)(i-1)}\mid k=1, 2, \cdots, 29\}$，$1\leqslant i$，$j\leqslant29$. 这里 $a_{k,s}=a_{k,s+29}$，但其余的数，如果下标不同，则对应的数也不同. 这样，我

们构造了 $29^2+29+1=871$ 个集合. 并且容易验证 $A\cap B_i$, $A\cap A_{i,j}$, $B_i\cap B_j$, $B_r\cap A_{i,j}$, $A_{i,j}\cap A_{s,j}$ 都是单元集. 而对 $i\neq s$, $j\neq t$, 可知 $A_{i,j}\cap A_{s,t}=\{a_{k,j+(k-1)(i-1)}\}$, 这里 k 是同余方程 $(x-1)(i-s)\equiv t-j \pmod{29}$ 的唯一解.

17 注意到, $2000=11\times181+9$, 我们取 $A=\{x\mid x=11t+1, 11t+4, 11t+6, 11t+7, 11t+9, 0\leqslant t\leqslant 181, t\in\mathbf{Z}\}$, 则 A 中任意两个数之差不是 4 或 7. 事实上,若 $|11(t-r)+(b-a)|=4$ 或 7, 这里 $a, b\in\{1, 4, 6, 7, 9\}$, 而 $0\leqslant r\leqslant t\leqslant 181$, 则当 $t-r\geqslant 2$ 时,显然不能成立;当 $t-r=1$ 时,应有 $|11+(b-a)|=4$ 或 7, 去绝对值后,应有 $|b-a|=4$ 或 7, 这一点直接验证即知不能成立;当 $t-r=0$ 时,与上类似,也不能成立. 所以, $|A|$ 的最大值 $\geqslant 5\times182=910$. 另一方面,设 A 是满足条件的集合,且 $|A|>910$. 这时,存在 t,使得集合 $\{x\mid x=11t+r, 1\leqslant r\leqslant 11\}$ 中出现 6 个数同时入选 A. 这 6 个数都减去 $11t$ 后,说明 1, 2, …, 11 中,有 6 个数入选 A,我们证明这是不可能的. 将 1, 2, …, 11 排成一个圆圈,例如:1、5、9、2、6、10、3、7、11、4、8(这里 1 与 8 首尾相连),则此圆圈上,任意相邻两个的差的绝对值为 4 或 7. 从中任取 6 个数,必有两个数相邻,从而 1, 2, …, 11 中,不能有 6 个数同时入选 A. 综上所述, $|A|$ 的最大值为 910.

18 我们按照 T 中元素的个数进行如下讨论:

$|T|=2$, 显然这样的 T 只有 $\{\varnothing, A\}$ 一个;

$|T|=3$, 这样的 T 有 $\{\varnothing, A, \{a_1\}\}$, $\{\varnothing, A, \{a_2\}\}$, $\{\varnothing, A, \{a_3\}\}$, $\{\varnothing, A, \{a_1, a_2\}\}$, $\{\varnothing, A, \{a_1, a_3\}\}$, $\{\varnothing, A, \{a_2, a_3\}\}$ 共 6 个;

$|T|=4$, 由于任意两个元的交及并也属于 A,故除去 $\varnothing$、A 之外,另两个子集只有两种关系:一个是另一个的真子集,如: $\{\varnothing, A, \{a_1\}, \{a_1, a_3\}\}$;或另两个子集的交是空集,如 $\{\varnothing, A, \{a_1\}, \{a_2, a_3\}\}$. 所以这样的 T 共有 $2\times3+3=9$(个);

$|T|=5$, 除去 $\varnothing$、A 之外,另三个子集只有两种情况:其中一

个是另两个子集，如$\{\varnothing, A, \{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}\}$，这样的$T$有3个；或一个是另两个子集的并，如$\{\varnothing, A, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}\}$，这样的$T$也有3个，共$3+3=6$(个)；

$|T|=6$，形如：$\{\varnothing, A, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}\}$，$\{\varnothing, A, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}\}$共$2\times 3=6$(个)；

$|T|=7$，不存在；

$|T|=8$时，只有一个，$\{\varnothing, A, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}\}$.

19 (1) 下面用数学归纳法证明，存在满足要求的子集序列$A_1, A_2, \cdots, A_{2^n}$，且$A_1=\{1\}$，$A_{2^n}=\varnothing$.

当$n=2$时，序列$\{1\}, \{1, 2\}, \{2\}, \varnothing$满足要求；

假设$n=k$时，存在满足要求的子集序列$B_1, B_2, \cdots, B_{2^k}$.对于$n=k+1$，构造序列如下：$A_1=B_1=\{1\}$，$A_i=B_{i-1}\cup\{k+1\}$，$i=2, 3, \cdots, 2^k+1$，$A_j=B_{j-2^k}$，$j=2^k+2, 2^k+3, \cdots, 2^{k+1}$.

易验证序列$A_1, A_2, \cdots, A_{2^{k+1}}$满足要求.

综上所述，对任意正整数$n\geqslant 2$，存在满足要求的子集序列.

(2) 不妨设$A_1=\{1\}$，由于相邻两个子集的元素个数相差1，所以必然是一个奇数和一个偶数，因此子集的元素个数与该子集的脚标的奇偶性相同.

于是$\sum\limits_{i=1}^{2^n}(-1)^i S(A_i)=\sum\limits_{A\in P}S(A)-\sum\limits_{A\in Q}S(A)$，其中$P$是$\{1, 2, \cdots, n\}$的所有偶数元子集构成的集合，$Q$是$\{1, 2, \cdots, n\}$的所有奇数元子集构成的集合.

对于任意$x\in\{1, 2, \cdots, n\}$，它在所有的k元子集中出现了C_{n-1}^{k-1}次，因此它在$\sum\limits_{A\in P}S(A)-\sum\limits_{A\in Q}S(A)$中的贡献为

$$-C_{n-1}^0+C_{n-1}^1-C_{n-1}^2+\cdots+(-1)^n C_{n-1}^{n-1}=-(1-1)^{n-1}=0.$$

所以$\sum\limits_{i=1}^{2^n}(-1)^i S(A_i)=0$.

第 2 讲

有限集元素的数目

1 (1) $f: a_1 \mapsto b_1, a_2 \mapsto b_2, a_3 \mapsto b_3$ 是 A 到 B 的一个单射. 这种映射的个数为 $4 \times 3 \times 2 = 24$.

(2) 映射 $f: a_1 \mapsto b_1, a_2 \mapsto b_1, a_3 \mapsto b_1$ 即为所求,这种映射的个数为 $4^3 - 4 \times 3 \times 2 = 40$.

(3) 因 $|A| = 3$, $|B| = 4$, 故不存在 A 到 B 上的满射.

2 $3^3 = 27$.

3 1006. 提示:若 a、b、c 既是调和的,又是等差的,则 $\begin{cases} \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{c}, \\ a + c = 2b, \end{cases}$ $a = -2b$, $c = 4b$.

即"好集"为形如 $\{-2b, b, 4b\}(b \neq 0)$ 的集合.

由"好集"是集合 M 的三元子集知, $-2013 \leqslant 4b \leqslant 2013$, $b \in \mathbf{Z}$,且 $b \neq 0$.

所以 $-503 \leqslant b \leqslant 503$, $b \in \mathbf{Z}$,且 $b \neq 0$. 符合条件的 b 可取 1006 个值.

所以"好集"的个数为 1006.

4 点集 A 是由顶点为$(a, 0)$, $(0, a)$, $(-a, 0)$, $(0, -a)$ 的正方形的四条边构成,点集 B 是由四条直线 $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ 构成. 所以 $1 < a < 2$ 或 $a > 2$.

(1) 当 $a > 2$ 时,正八边形的边长只能为 2,所以 $\sqrt{2}a - 2\sqrt{2} = 2$, $a = 2 + \sqrt{2}$.

(2) 当 $1 < a < 2$ 时, $a = \sqrt{2}$. 综上, $a = \sqrt{2}$ 或 $2 + \sqrt{2}$.

5 由题设知 k 与 $19k$ ($k = 6, 7, \cdots, 105$) 这两个数中至少

有一个不属于 A，所以

$$|A| \leqslant 1995-(105-6+1)=1895,$$

另一方面，设 $B=\{1, 2, \cdots, 5\}$，$C=\{106, 107, \cdots, 1995\}$，令 $A=B \cup C=\{1, 2, \cdots, 5\} \cup \{106, 107, \cdots, 1995\}$，则 $|A|=1895$，且 A 中没有一个数是另一个数的 19 倍.

事实上，设 $k \in A$，若 $k \in B$，则

$$19 \leqslant 19k \leqslant 105, \ 19k \notin A.$$

若 $k \in C$，则 $19k \geqslant 106 \times 19 > 1995$，故 $19k \notin A$.

综上所述，$|A|$的最大值为 1895.

6 设 $A_1=\{3k+1 \mid 0 \leqslant k \leqslant 33\}$，$A_2=\{3k+2 \mid 0 \leqslant k \leqslant 32\}$，令 $A=A_1 \cup A_2 \cup \{9, 18, 36, 45, 63, 72, 90, 99, 81\}$. 则 $|A|=76$，且集 A 中没有一个数是另一个的 3 倍. 若从 1，2，…，100 中选出 77 个数，考虑如下 24 个数对：$(k, 3k)$，$k=1, 2, 12, 13, \cdots, 33$，其中 48 个数互不相同. 1 至 100 中剩下的 52 个数每一个数一组，连同上面 24 组共 $52+24=76$ 组. 从中任取 77 个数，一定有两个数取自同一组，则大数是小数的 3 倍. 综上所述，最多只能选 76 个数.

7 集$\{1, 2, \cdots, 7\}$的非空子集共有 $2^7-1=127$ 个. 而$\{1, 2, \cdots, 7\}$中每个元素在子集中均出现 $2^6=64$ 次. 由于 1，2，…，6 在交替和中有 32 次在奇数位，32 次在偶数位，因此这些数的总和为 0. 而 7 也出现 64 次，且均取正值. 故所有子集的交替和的总和为 $7 \times 64=448$.

8 若 $T \subseteq \{1, 2, \cdots, 9\}$，$|T| \geqslant 6$，由于 T 中任意两数之和在 3 与 17 之间，即 T 中任意两数之和至多可以组成 15 个不同的和. 而 T 中至少有 $C_6^2=15$ 个二元子集，所以，3 和 17 必定同时出现，即 $1, 2, 8, 9 \in T$，但此时 $1+9=2+8$，不合题意. 又当 $S=\{1, 2, 3, 5, 8\}$ 时，S 满足题意. 故 S 中最多有 5 个元素.

9 $|A \cap B|=167$.

10 M 的子集共有 2^{100} 个，其中 M 中的每一个元素各出现 2^{99} 次，所以，所有子集的元素和为

$$2^{99}(1+2+\cdots+100)=5050\cdot 2^{99}.$$

11 由题设，k 与 $15k\ (k=9,\ 10,\ \cdots,\ 133)$ 这两个数中至少有一个不属于 A，所以 $|A|\leqslant 1995-(133-9+1)=1870$. 另一方面，取 $A=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 8\}\cup\{134,\ 135,\ \cdots,\ 1995\}$，则 A 满足题设要求. 此时 $|A|=1870$. 所以，$|A|$ 的最大值为 1870.

12 设 I 是某中学全体教师的集合，A、B、C 分别表示能教语文、数学、外语的教师的集合，则 $|I|=120$，$|A|=40$，$|B|=50$，$|C|=45$，且 $|A\cap B|=10$，$|B\cap C|=15$，$|C\cap A|=8$，$|A\cap B\cap C|=4$. 所以 $|\complement_I A\cap\complement_I B\cap\complement_I C|=|I|-(|A|+|B|+|C|)+|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|-|A\cap B\cap C|=120-(40+50+45)+10+15+8-4=14$.

13 将 E 中元素分成如下 100 个子集：$E_1=\{1,\ 200\}$，$E_2=\{2,\ 199\}$，$\cdots$，$E_{100}=\{100,\ 101\}$. 由题设知，$E_i(1\leqslant i\leqslant 100)$ 中的两个元素不能同时属于 G，所以每个 E_i 中必包含且只包含 G 中的一个元素. 由于 $2+4+\cdots+200=10\,100\neq 10\,080$，所以 G 中元素不可能全是偶数. 于是 G 可以看成将 $\{2,\ 4,\ \cdots,\ 200\}$ 中的若干个数 a_1，$\cdots$，a_k 换成 $201-a_1$，$\cdots$，$201-a_k$，并且这 k 个偶数的和减去相应的 k 个奇数的和等于 $10\,100-10\,080=20$，所以 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2=2^2+4^2+\cdots+200^2-(a_1^2+\cdots+a_k^2)+(201-a_1)^2+\cdots+(201-a_k)^2=2^2+4^2+\cdots+200^2+201((201-a_1)+\cdots+(201-a_k)-a_1-\cdots-a_k)=4(1^2+2^2+\cdots+100^2)-201\times 20$ 是常数. 由于 $a_1^2+\cdots+a_{100}^2\equiv 0(\bmod 4)$，且奇数的平方 $\equiv 1(\bmod 4)$，偶数的平方 $\equiv 0(\bmod 4)$，故 a_1，a_2，$\cdots$，a_{100} 中奇数的个数是 4 的倍数.

14 首先，我们来估计 $|A|$ 的下界. 因为 1、3、6、8 这四个数中的任意两个数的差的绝对值均为质数，于是 $f(1)$、$f(3)$、$f(6)$、$f(8)$ 两两不等，从而 $|A|\geqslant 4$.