UMSS

大学数学科学丛书 — 38

基础实分析

徐胜芝　编著

科学出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

大学数学科学丛书 38

基础实分析

徐胜芝　编著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是学习实分析课程的基础教材, 讨论了实分析的基本理论和方法. 第 1 章介绍了学习实分析的基本工具: 集合运算及其规律、计数与基数运算律以及像实轴那样的完备序集中的极限理论. 在此基础上, 第 2 章讨论了测度的基本性质及其重要的扩张理论, 接着讨论了集合与映射的可测性. 第 3 章讨论了有广泛应用的积分及其基本性质, 以及积分极限定理及其在累次积分中的应用. 利用前三章建立起来的工具, 第 4 章深入讨论了一元实函数的可微性质与微积分基本定理, 讨论了卷积和 Fourier 变换这两个基本分析工具及其应用.

本书可作为高等院校数学专业本科生的学习用书, 也可供相关专业的研究生作学习参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

基础实分析/徐胜芝编著. —北京: 科学出版社, 2019.9
(大学数学科学丛书; 38)
ISBN 978-7-03-061713-2

Ⅰ. ①基… Ⅱ. ①徐… Ⅲ. ①实分析-高等学校-教材 Ⅳ. ①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 120831 号

责任编辑: 李静科 李 萍 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2019 年 9 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16
2019 年 9 月第一次印刷 印张: 18 1/2
字数: 365 000

定价: 88.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《大学数学科学丛书》编委会

（以姓氏笔画为序）

顾　问：王　元　谷超豪　姜伯驹

主　编：李大潜

副主编：龙以明　冯克勤　张继平　袁亚湘

编　委：王维克　尹景学　叶向东　叶其孝

李安民　李克正　吴宗敏　吴喜之

张平文　范更华　郑学安　姜礼尚

徐宗本　彭实戈

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学. 从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵. 正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同.

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的. 作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱. 数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视. 数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会数学的精神实质和思想方法. 在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点.

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生(包括硕士生及博士生)走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好.

李大潜

2003 年 12 月 27 日

需要全本请访问 www.ertongbook.com

前　言

目前高等院校的数学类专业都设置了实分析 (也称为实变函数) 课程, 学习并掌握实分析的基本思想方法将为学习其他数理学科, 如函数论和泛函分析、微分方程和调和分析、概率论和随机过程打好坚实基础. 各高校对这门课程的讲授程度略有差异, 但对学习实分析的基本要求是一致的.

本书介绍了实分析的基本理论, 共四章和两个附录. 熟练应用集合运算是学习实分析的前提, 因此第 1 章介绍了和测度论有关的集合算术与关系方面的内容. 有关集合算术律就像数的四则运算那样为本书所必需, 等价关系和顺序关系也在测度论中发挥重要作用. 1.4 节将上确界和下确界及上极限与下极限概念推广于完备的偏序集中, 这也为分析与解决有关问题提供了必要工具.

第 2 章从平面点集是否可求面积的讨论中引出一般测度概念与其具有的性质和扩张方法. 计数测度在测度扩张思想的发展过程中起着桥梁作用: 它提供了一些正例和反例来使测度扩张朝着合理方向推进. 本章还特别讨论了常用的 Lebesgue 测度及其性质, 用一般测度论方法能得出有关 Lebesgue 测度的一些深刻性质, 如测度与点集拓扑的联系, 而其证明过程并不复杂. 本章还介绍了可测映射与相关可测结构的关系、可测函数及其相关收敛性, 如几乎处处收敛和依测度收敛, 讨论了这两种收敛性与近似一致收敛性的关系.

第 3 章从讨论 Riemann 积分的局限性中引出了一般积分概念及其具有的性质, 以及几种等价定义方式. 这些定义方式分别见于 3.1 节与 3.5 节附录. 它们分别是: ①对值域进行区间划分的 Lebesgue 方法; ②简单函数逼近方法; ③ 曲边梯形面积方法; ④可测分解定义域方法. 3.1 节主要用方法④引入了积分概念, 此方法改进了 Riemann 和方法, 用此方法讨论积分的诸性质显得自然且简单. 关于一般测度的积分所特有的优良性质如逐项积分和累次积分等随后逐一介绍. 相关过程表明测度与积分在本质上是一样的, 积分可视为测度的自然推广, 测度的某些性质便适用于积分. 3.5 节通过积分的定义过程自然引入了广义测度概念, 讨论了不同测度之间可能具有的连续依赖关系.

以后讨论向量值函数 (尤其取值于某些无限维拓扑向量空间的函数) 的积分时, 对于定义域进行分解的方法依然可行, 但对值域进行分解便不可行了. 原因是大多数无限维向量空间上无自然的可测结构使相应可测性满足一些基本运算律, 如两个可测函数之和仍是可测函数. 这时可测性需要换成别的条件.

当然, 讲授积分可根据初学者的不同情况选用不同方法. 用方法 ② 可使初学

者很快掌握积分的基本原理, 不足之处是其定义过程忽略了积分的几何意义, 此意义可晚至 3.3 节讨论, 对初学者而言并无损失.

尽管实际问题中所用积分值都是有限的, 但定义积分过程中允许积分取值正无穷或负无穷, 这使积分应用起来更灵活. 广义测度可取值正无穷或负无穷, 这样定义使积分成为广义测度的等价推广, 从而广义测度的通用性质可用于积分. 这样定义积分还使积分理论如积分极限定理与累次积分的证明得到极大简化. 2.1 节还引入了容度概念, 3.5 节附录还讨论了关于容度的积分, 这类积分适用于讨论某些领域中产生的泛函问题.

第 4 章从怎样求曲线长度出发引入了有界变差函数 (也称为囿变函数), 其几乎处处可导性质丰富了微分理论. 性质较好的绝对连续函数在 Lebesgue 积分范畴中解决了微积分基本问题: 是否可用导数的不定积分来表示原函数? 本章还介绍了卷积和 Fourier 变换及它们对变分方程和微分方程的初步应用.

感谢复旦大学数学科学学院教授陈晓漫、洪家兴、童裕孙、张荫南、郭坤宇、薛军工和姚一隽等, 他们在本书成稿过程中给予了详细的建议和修改意见. 感谢那些用此讲义学习实分析的复旦大学数学学院的学生和外系同学及旁听此课的外校学生, 他们的反馈帮助作者修改了一些错误和不足.

感谢李大潜院士, 他提议作者向科学出版社投稿出版此讲义. 感谢科学出版社的李静科同志, 她对本书提出了许多宝贵的建议并对本书的出版给予了很大帮助.

由于作者水平所限, 书中难免有不当之处. 若您对本书有什么建议, 请不吝指正. 您的宝贵建议将有助于作者和读者更好地理解实分析的理论和应用, 在此深表感激.

作　者

2018 年 9 月

目　录

《大学数学科学丛书》序
前言
第 1 章　关系与相关性……1
1.1　集合算术……1
1.1.1　集合比较与运算……1
1.1.2　集族与多元组……4
1.1.3　截口与映射……7
练习……11
1.2　二元关系……12
1.2.1　复合与逆……12
1.2.2　等价关系……16
1.2.3　顺序关系……19
练习……22
1.3　基数算术……23
1.3.1　对等集合……23
1.3.2　基数与其比较……26
1.3.3　基数运算……30
练习……33
1.4　完备序集……34
1.4.1　上确界与下确界……34
1.4.2　上极限与下极限……37
1.4.3　级数与乘积……41
练习……44
第 2 章　测度与可测性……46
2.1　可列加性……46
2.1.1　测度起源……46
2.1.2　集环……49
2.1.3　集函数……51
练习……54

2.2 集族扩张 ····· 56
2.2.1 单调环 ····· 56
2.2.2 集族归纳法 ····· 60
练习 ····· 62
2.3 测度扩张 ····· 63
2.3.1 外测度法 ····· 63
2.3.2 基本性质 ····· 66
2.3.3 唯一扩张 ····· 69
练习 ····· 70
2.4 常用测度 ····· 71
2.4.1 正则性 ····· 71
2.4.2 映射与测度计算 ····· 74
2.4.3 可乘性 ····· 78
练习 ····· 81
2.5 可测映射 ····· 82
2.5.1 可测性 ····· 82
2.5.2 带号函数 ····· 85
2.5.3 复值函数 ····· 89
练习 ····· 92
2.6 函数序列 ····· 93
2.6.1 与测度无关的收敛性 ····· 94
2.6.2 与测度有关的收敛性 ····· 97
2.6.3 阅读材料 ····· 101
2.6.4 附录 (可测性的延伸) ····· 104
练习 ····· 107

第 3 章 积分与可积性 ····· 109
3.1 微量累积 ····· 109
3.1.1 积分简史 ····· 109
3.1.2 积分运算 ····· 113
3.1.3 常用积分 ····· 119
练习 ····· 121
3.2 极限定理 ····· 122
3.2.1 单调收敛性 ····· 122
3.2.2 控制收敛性 ····· 125

3.2.3 变量代换 ····· 127
练习 ····· 131
3.3 累次积分 ····· 133
3.3.1 乘积测度 ····· 133
3.3.2 重积分的计算 ····· 136
3.3.3 阅读材料 ····· 140
练习 ····· 143
3.4 平均收敛 ····· 144
3.4.1 几个不等式 ····· 144
3.4.2 平均收敛与其特征 ····· 147
3.4.3 阅读材料 ····· 150
练习 ····· 154
3.5 广义测度 ····· 155
3.5.1 带号情形 ····· 155
3.5.2 加权测度 ····· 158
3.5.3 测度比较 ····· 161
3.5.4 附录 (积分的其他定义方式) ····· 164
练习 ····· 168

第 4 章 导数与可导性 ····· 170
4.1 囿变函数 ····· 170
4.1.1 全变差 ····· 170
4.1.2 囿变函数的性质 ····· 173
4.1.3 阅读材料 ····· 177
练习 ····· 180
4.2 不定积分 ····· 181
4.2.1 导出数 ····· 181
4.2.2 绝对连续性 ····· 184
4.2.3 阅读材料 ····· 187
练习 ····· 190
4.3 非匀测度 ····· 191
4.3.1 从单调函数到容度 ····· 191
4.3.2 凑微分与分部积分 ····· 195
4.3.3 阅读材料 ····· 198
练习 ····· 201

4.4 卷积运算 ····· 202
4.4.1 基本性质 ····· 202
4.4.2 近似幺元 ····· 206
4.4.3 光滑逼近 ····· 209
练习 ····· 212
4.5 傅氏变换 ····· 213
4.5.1 基本性质 ····· 213
4.5.2 反演和 L^2-等距性 ····· 217
4.5.3 速降函数 ····· 220
练习 ····· 223

附录 1 Perron 积分 ····· 225
上密度和下密度 ····· 225
上积函数与下积函数 ····· 226

附录 2 从零开始 ····· 232
自然数与归纳法 ····· 232
整数与带余除法 ····· 235
广义实数 ····· 239
极限与初等函数 ····· 243
复数与四元数 ····· 248
序数与超限归纳法 ····· 250
序数运算与基数 ····· 253

参考文献 ····· 257

符号列表 ····· 258

术语索引 ····· 266

中外人名 ····· 277

《大学数学科学丛书》已出版书目 ····· 281

需要全本请访问 www.ertongbook.com

第 1 章　关系与相关性

1.1　集 合 算 术

现代数学的基础是集合论, 其奠基者 Georg Cantor 认为集合是我们感觉或者思维中确定的个别对象的汇总, 其中对象就是该集合的元素或成员. 人们常将具有某种特定性质的具体或抽象对象全体归为一个集合. 为避免悖论, 本书所用集合都是基于某个恰当公理体系发展而来的, 欲知详情者可参见文献 [7].

1.1.1　集合比较与运算

以 $x \in A$ 表示 x 是集合 A 的一个元素而 $y \notin B$ 表示 y 不是 B 的一个元素. 某些集合可随场合而改变名称, 如实数全体 $\mathbb{R}$ 可称为实数系、实数域或实轴.

某些集合的元素可用枚举法逐一列出. 如 $\{0\}$ 是个单点集——仅有一个元素者. 自然数集 $\mathbb{N}$ 和整数环 $\mathbb{Z}$ 各枚举成 $\{0,1,2,\cdots\}$ 和 $\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$. 省略号的意义应明确于其环境, 否则会有歧义. 如无前文, 上述省略号可为 ♠A.

枚举的元素不分先后且重复者仅算一个, 如 $\{1,2\}$ 和 $\{2,1,2,1\}$ 是相等集合——由同样一些元素组成. 以式子 $A=B$ 表示 A 和 B 是相等集合.

集合都可用描述法写成 $\{f(x)|P(x)\}$ 或 $\{f(x):P(x)\}$ 使 $P(x)$ 和 $f(x)$ 各是 x 具有的性质和产生的元素. 如有理数域 $\mathbb{Q}:=\{b/a|a,b\in\mathbb{Z},a\neq0\}$, 符号:= 表示将右端记成左端, 而 =: 表示将左端记成右端. 以 i 代表虚数单位, 则复数域或复平面 $\mathbb{C}:=\{x+\mathrm{i}\,y|x,y\in\mathbb{R}\}$. 有时也将集合描述成 $\{x_i|i\in\alpha\}$, 其中 α 为指标集.

以 $\varnothing$ 记空集——不含任何元素者, 它可枚举成 $\{\,\}$, 也可描述成 $\{x|x\neq x\}$. 一般地, 枚举法表示的集合自然可用描述法表示. 两种方法还可混合使用. 如

$$\{x_1,x_2\in\mathbb{N}|x_1^2=4,x_2^2=9\}=\{2,3\}.$$

注记　某些 $\{f(x)|P(x)\}$ 不是集合, 例有 $\{x|x=x\}$. □

直观地, $\{0\}$ 是 $\{0,1\}$ 的一部分. 一般地, 称集合 A 是集合 B 的一个子集或 B 是 A 的一个超集指 A 的元素都属于 B(即 $x\in A\Rightarrow x\in B$), 这记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$ 并读作 "A 含于 B" 或 "B 包含 A". 以 $C\subsetneq D$ 表示 C 非 D 的子集.

常用 P⇒Q 表示 "命题 P 为真时, 命题 Q 为真". 而 "P 当且仅当 Q" 代表 "P 为真的充要条件是 Q 为真". "当" 是充分性 Q⇒P, "仅当" 是必要性 P⇒Q. 定义某个概念所用条件可视为充要条件, 如整数 x 是偶数当且仅当它可被 2 整除.

例 1　以 $\overline{\mathbb{R}}$ 记负无穷 $-\infty$ 和全体实数 x 及正无穷 $+\infty$ 组成的广义实轴, 其非空子集 A 称为广义实数集. 规定 $-\infty < x < +\infty$, 以下 $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$.

左开右闭区间 $(a,b] = \{t \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, a < t \leqslant b\}$, 命 $\overline{\mathbb{R}}_+ = (0,+\infty]$ 且 $A_+ = A \cap \overline{\mathbb{R}}_+$.

左闭右开区间 $[a,b) = \{t \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, a \leqslant t < b\}$, 命 $\overline{\mathbb{R}}_- = [-\infty, 0)$.

开区间 $(a,b) = \{t \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, a < t < b\}$, 如实轴 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

闭区间 $[a,b] = \{t \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, a \leqslant t \leqslant b\}$, 如广义实轴 $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

以上区间在 $b = a$ 时为退化区间: 前三者皆空, 第四者为单点集 $\{a\}$. □

当 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ 时, 称 A 是 B 的一个真子集, 并记为 $A \subset B$(即 A 真含于 B) 或 $B \supset A$(即 B 真包含 A). 如 $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ 且 $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$.

用逻辑符号可简化推理过程, 如 $\forall, \exists, \wedge, \vee$ 依次表示"任意" "有个" "并且" "或者". 它们在否定命题时应依次换成 $\exists, \forall, \vee, \wedge$. 如有以下互否命题:

$$(\exists x \in X : x = 0) \wedge (\forall x \in X : x \neq 1),$$

$$(\forall x \in X : x \neq 0) \vee (\exists x \in X : x = 1).$$

集合算术律　最小性: (空集是任何集合的子集)$\varnothing \subseteq A$.

自反性: (任何集合是自身的子集) $A \subseteq A$.

反称性: 当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 时, $A = B$.

传递性: 当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$ 时, $A \subseteq C$(待续).

提示传递性　$x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C$. □

为直观地理解集合, 可用图形示意, 这是所谓的 Venn 图法. 图形在选择上有很大随意性, 一旦选好便不能随意变化. 下面各用椭圆和矩形示意集合 A 和 B.

作并集　$A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$, 它由 A 和 B 的所有元素组成, 公共元素不必重复写. 如 $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$ 及 $(-\infty, 6] \cup [3, +\infty) = \mathbb{R}$.

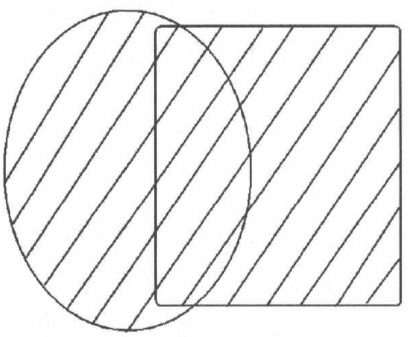

图 1　阴影部分是并集

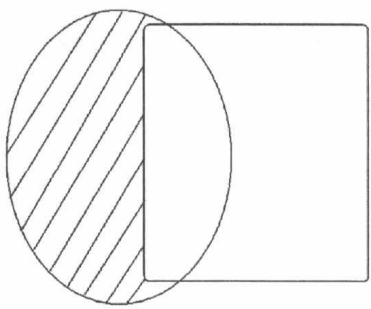

图 2　阴影部分是差集

作差集　$A \setminus B = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$, 它由不属于 B 的 A 中元素组成, 读成 "A 减 B". 如 $\{1,2\} \setminus \{2,4\} = \{1\}$ 且 $(-\infty, 6] \setminus [3, +\infty) = (-\infty, 3)$.

固定集合 X. 若 $A\subseteq X$, 以 $\complement A$ 或 A^{c} 记 A 在全集X 的补集 或余集$X\setminus A$. 补集有相对性, 如无理数集 $\mathbb{J}$ 以自身为全集时有补集 $\varnothing$, 但以实轴为全集时有补集 $\mathbb{Q}$.

作对称差 $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$, 它由只属于 A 和 B 之一的元素组成, 不含两者的公共元素. 如 $\{1,2\}\triangle\{2,3\}=\{1,3\}$.

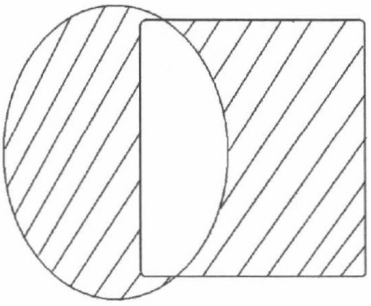

图 3 阴影部分是对称差

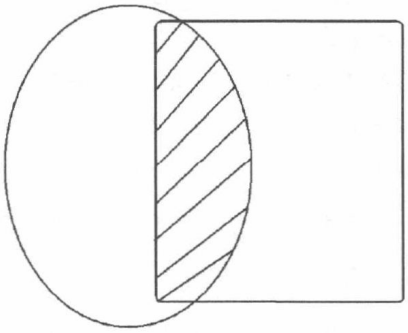

图 4 阴影部分是交集

作交集 $A\cap B=\{x|(x\in A)\wedge(x\in B)\}$, 如 $\{1,2\}\cap\{2,3\}=\{2\}$. 交集由公共元素组成. 无公共元素的集合 A 和 B 是互斥集合或不交集合, 它们之并集称为无交并且记为 $A\uplus B$ 或 $A\cup B$. 如 $(1,2]\uplus(2,3]=(1,3]$ 且 $\{0,1\}\uplus\{3,4\}=\{0,1,3,4\}$.

像 $\{1,2\}$ 这样不借助于省略号可枚举者应是有限的. 称空集是 0 元有限集, 递归地, 称 F 是一个 n 元有限集指某个 $a\in F$ 使 $F\setminus\{a\}$ 为 $n-1$ 元有限集. 此 n 为 F 的计数 且记为 $|F|_0$. 这些概念与 a 的取法无关: 无关性在 $n=1$ 时为真, 归纳地设无关性在 $n=k$ 时为真. 当 $n=k+1$ 且 b 属于 $F\setminus\{a\}$ 时, $(F\setminus\{a\})\setminus\{b\}$ 为 $k-1$ 元有限集且等于 $(F\setminus\{b\})\setminus\{a\}$. 故 $F\setminus\{b\}$ 是 k 元有限集.

以 2^X 记 X 的子集全体 $\{A|A\subseteq X\}$ 且称为幂集, 其中有限者全体记为 $\operatorname{fin}X$.

命题 1 (有限集的遗传性) 有限集 E 的真子集 D 是有限的且 $|D|_0<|E|_0$.

证明 当 $|E|_0=1$ 时, $D=\varnothing$; 归纳地设 $|E|_0=k$ 时结论对. 当 $|E|_0=k+1$ 时, 有个 $a\in E$ 使 D 为 $E\setminus\{a\}$ 或其真子集. 故 D 是有限的且 $|D|_0\leqslant k$. □

自然数集是一例无限集 ——非有限者, 否则得谬式 $1+\max\mathbb{N}\notin\mathbb{N}$. 结合以上命题知 $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 都是无限集. 无限集 G 的计数 $|G|_0$ 都是 $+\infty$.

计数可参与广义实数的算术 (见于 1.4 节), 但不能细分无限集 (见于 1.3 节).

集合算术律 (续) 三角不等式: $A\triangle C\subseteq(A\triangle B)\cup(B\triangle C)$.

下定向性: A 和 B 有个公共子集 C(可命 $C=A\cap B$).

上定向性: A 和 B 有个公共超集 D(可命 $D=A\cup B$).

零元律: $A\cup\varnothing=A\setminus\varnothing=A$ 且 $A\cap\varnothing=A\triangle A=\varnothing$.

结合律: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$(这因此可写成 $A\cup B\cup C$).

结合律: $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$(这因此可写成 $A\cap B\cap C$).

结合律: $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$(这因此可写成 $A\triangle B\triangle C$).

交换律: $A\cup B = B\cup A$ 且 $A\cap B = B\cap A$ 及 $A\triangle B = B\triangle A$.

分配律: $(A\setminus B)\cap C = (A\cap C)\setminus(B\cap C)$ 且 $(A\triangle B)\cap C = (A\cap C)\triangle(B\cap C)$.

消去律: $A = B$ 当且仅当 $A\triangle C = B\triangle C$.

单调性: $A_1\subseteq A_2$ 且 $B_2\subseteq B_1$ 时, $A_1\setminus B_1\subseteq A_2\setminus B_2$.

无交律: $A = (A\cap C)\uplus(A\setminus C)$ 且 $A\cup B = (A\triangle B)\uplus(A\cap B)$.

补集律: $(A^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} = A$(此处全集为 X, 下同), $A\cap A^{\mathsf{c}} = \varnothing$ 且 $A\cup A^{\mathsf{c}} = X$.

吸收律: $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B = B\Leftrightarrow A\cap B = A\Leftrightarrow A\setminus B = \varnothing\Leftrightarrow B^{\mathsf{c}}\subseteq A^{\mathsf{c}}$.

恒等律: $A = B\Leftrightarrow A\cup B = A\cap B\Leftrightarrow A\triangle B = \varnothing\Leftrightarrow B^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}}$(待续).

提示消去律　由零元律得 $A\triangle(C\triangle C) = A$, 用结合律即可. □

1.1.2　集族与多元组

像幂集那样, 成员都为集合的非空集合 $\mathcal{E}$ 称为集族, 将其写成 $\{A_i|i\in\alpha\}$ 使 α 非空. 作交集 $\bigcap\mathcal{E} = \bigcap\limits_{i\in\alpha}A_i = \{x|\forall i\in\alpha : x\in A_i\}$, 它由 $\mathcal{E}$ 中诸成员的公共元素组成. 如 $\bigcap\{(-r,r]|r\in\mathbb{R},r>0\} = \{0\}$. 定义表明 $(x\in\bigcap\mathcal{E}\Leftrightarrow\forall A\in\mathcal{E} : x\in A)$.

作并集 $\bigcup\mathcal{E} = \bigcup\limits_{i\in\alpha}A_i = \{x|\exists i\in\alpha : x\in A_i\}$, 它由 $\mathcal{E}$ 中诸成员的所有元素组成. 如 $\bigcup\{(-r,r]|r\in\mathbb{R},r>0\} = \mathbb{R}$. 定义表明 $(x\in\bigcup\mathcal{E}\Leftrightarrow\exists A\in\mathcal{E} : x\in A)$.

在讨论集合运算时, 注意到 $\bigcup$ 和 $\bigcap$ 各对应 $\exists$ 和 $\forall$ 会简化一些过程.

集合算术律 (续)　在全集 X 中, 约定 $\bigcup\limits_{i\in\varnothing}A_i = \varnothing$ 且 $\bigcap\limits_{i\in\varnothing}A_i = X$.

结合律: 当 $\alpha = \bigcup\limits_{j\in\beta}\alpha_j$ 时, $\bigcup\limits_{i\in\alpha}A_i = \bigcup\limits_{j\in\beta}\bigcup\limits_{i\in\alpha_j}A_i$ 且 $\bigcap\limits_{i\in\alpha}A_i = \bigcap\limits_{j\in\beta}\bigcap\limits_{i\in\alpha_j}A_i$.

幂等律: 诸 $A_i = A$ 且 α 不空时, $\bigcup\limits_{i\in\alpha}A_i = \bigcap\limits_{i\in\alpha}A_i = A$.

单调性: 诸 $A_i\subseteq B_i$ 时, $\bigcup\limits_{i\in\alpha}A_i\subseteq\bigcup\limits_{i\in\alpha}B_i$ 且 $\bigcap\limits_{i\in\alpha}A_i\subseteq\bigcap\limits_{i\in\alpha}B_i$.

分配律: $\Big(\bigcup\limits_{i\in\alpha}A_i\Big)\cap B = \bigcup\limits_{i\in\alpha}(A_i\cap B)$ 且 $\Big(\bigcap\limits_{i\in\alpha}A_i\Big)\cap B = \bigcap\limits_{i\in\alpha}(A_i\cap B)$.

分配律: $\Big(\bigcup\limits_{i\in\alpha}A_i\Big)\setminus B = \bigcup\limits_{i\in\alpha}(A_i\setminus B)$ 且 $\Big(\bigcap\limits_{i\in\alpha}A_i\Big)\setminus B = \bigcap\limits_{i\in\alpha}(A_i\setminus B)$.

分配律: $\Big(\bigcup\limits_{i\in\alpha}A_i\Big)\cup B = \bigcup\limits_{i\in\alpha}(A_i\cup B)$ 且 $\Big(\bigcap\limits_{i\in\alpha}A_i\Big)\cup B = \bigcap\limits_{i\in\alpha}(A_i\cup B)$.

De Morgan 律: $\Big(\bigcup\limits_{i\in\alpha}A_i\Big)^{\mathsf{c}} = \bigcap\limits_{i\in\alpha}A_i^{\mathsf{c}}$. 进而, $B\Big\setminus\bigcup\limits_{i\in\alpha}A_i = \bigcap\limits_{i\in\alpha}(B\setminus A_i)$.

De Morgan 律: $\Big(\bigcap\limits_{i\in\alpha}A_i\Big)^{\mathsf{c}} = \bigcup\limits_{i\in\alpha}A_i^{\mathsf{c}}$. 进而, $B\Big\setminus\bigcap\limits_{i\in\alpha}A_i = \bigcup\limits_{i\in\alpha}(B\setminus A_i)$(待续).

提示第一 De Morgan 律　元素 x 属于左端当且仅当 $(\forall i\in\alpha : x\notin A_i)$ 当且仅当 $(\forall i\in\alpha : x\in A_i^{\mathsf{c}})$ 当且仅当 x 属于右端. 该式两端与 B 相交后得后式. □

在实轴上构造集合可用 p 进制表示, 这见于附录 2 命题 29 至命题 31.

例 2 用 3 进制, 根据附录 2 命题 30 和命题 31, 数字 1 首现于第 n 位的标准小数全体为互斥区间族 $\{[0.a_1\cdots a_{n-1}1, 0.a_1\cdots a_{n-1}2)|a_i=0,2\}$ 之并, 相应无限小数全体为互斥区间族 $\{(0.a_1\cdots a_{n-1}1, 0.a_1\cdots a_{n-1}2]|a_i=0,2\}$ 之并. □

一般地, 成员互斥的集族 $\mathcal{D}$ 之并 E 称为**无交并**且记为 $\biguplus\mathcal{D}$ 或 $\coprod\mathcal{D}$, 同时称 $\mathcal{D}$ 分解 E 或为 E 的一个**分解**. 以 $\exists!$ 表示 "有唯一", 则 $x\in E\Leftrightarrow\exists!A\in\mathcal{D}:x\in A$.

成员非空的分解称为**划分**; 成员数有限的分解称为**简单分解**.

命题 2 设 $\mathcal{F}$ 是集族 $\{E_i|i\in\beta\}$, 则其并集 E 有分解 $\{F_\alpha|\alpha\subseteq\beta\}$(称为 $\mathcal{F}$ 的**无交化**) 使 F_α 为 $\{E_i, E\setminus E_j|i\in\alpha, j\in\beta\setminus\alpha\}$ 之交集, 进而诸 E_i 有分解 $\{F_\alpha|F_\alpha\subseteq E_i\}$.

证明 首先, $F_\alpha\subseteq E$ 且诸 $x\in E$ 落于 F_{α_x} 使 $\alpha_x=\{i\in\beta|x\in E_i\}$. 其次, F_α 和 F_γ 不等时互斥. 为此设 $\alpha\setminus\gamma$ 含元素 k, 则 F_α 和 F_γ 各含于 E_k 和 $E\setminus E_k$, 后两者之交为空集. 最后, 诸 E_i 有分解 $\{F_\alpha\cap E_i|\alpha\subseteq\beta\}$, 又知 $F_\alpha\cap E_i$ 是 F_α 或空集. □

集合运算中交运算可由差运算与并运算来实现, 这见于以下结论.

命题 3 设 X 是以下集合的全集.

(1) $B\setminus A=B\setminus(B\cap A)=B\cap A^{\mathsf{c}}$ 且 $A^{\mathsf{c}}\triangle B^{\mathsf{c}}=A\triangle B$.

(2) $(D\setminus A)\setminus B=D\setminus(A\cup B)$ 且 $B\setminus(B\setminus A)=B\cap A$.

(3) $\bigcap\limits_{i\in\alpha}A_i\subseteq B$ 当且仅当 $B\setminus\Big(\bigcup\limits_{i\in\alpha}(B\setminus A_i)\Big)=\bigcap\limits_{i\in\alpha}A_i$.

证明 (1) 第一式: 全集中元素 x 属于左端当且仅当 x 属于 B 且不属于 A(便不属于 $B\cap A$ 但属于 A^{c}) 当且仅当 x 属于中间项当且仅当 x 属于右端. 由此知第二式两端同为 $(B\cap A^{\mathsf{c}})\cup(A\cap B^{\mathsf{c}})$. 以下要结合集合算术律.

(2) 第一式左端等于 $(D\cap A^{\mathsf{c}})\cap B^{\mathsf{c}}=D\cap(A\cup B)^{\mathsf{c}}$ 等于右端. 第二式左端等于 $B\cap(B\cap A^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}}=B\cap(B^{\mathsf{c}}\cup A)=B\cap A$.

(3) 由 De Morgan 律和 (2) 知 $B\setminus\Big(\bigcup\limits_{i\in\alpha}(B\setminus A_i)\Big)=B\cap\Big(\bigcap\limits_{i\in\alpha}A_i\Big)$, 用吸收律即可. □

枚举法对元素无顺序要求, 有时需要将某些元素按某个顺序排列得到一个 n **元组** $(x_1,\cdots,x_n)$. 将它简记为 $(x_i)_{i=1}^n$, 称 x_i 是其第 i 个分量. 例有二元组 (红, 黑) 和 (黑, 红) 及三元组 (红, 黑, 蓝). 一般以 $(x_i)_{i\in\alpha}$ 表示第 i 分量为 x_i 的 α-**组**[①], 它异于其**值域** $\{x_i|i\in\alpha\}$. 这里 α 非空且对其元素无顺序要求, "第" 字只是形式写法.

两个 α-组 $(x_i)_{i=1}^n$ 和 $(x'_i)_{i=1}^n$ 相等指其对应分量相等: 诸 $x_i=x'_i$.

作集组 $(A_i)_{i\in\alpha}$ 的 **Descartes 积** $\prod\limits_{i\in\alpha}A_i=\{(x_i)_{i\in\alpha}|\forall i\in\alpha:x_i\in A_i\}$, 这也记为 $\prod(A_i|i\in\alpha)$. 它在诸 A_i 为 A 时记为**幂指集** A^α, 其**对角线** $\{(x)_{i\in\alpha}|x\in A\}$ 写成 $\mathrm{diag}_\alpha A$. 当 $\alpha=\{1,\cdots,n\}$ 时, 相应集合记为 $A_1\times\cdots\times A_n$ 和 A^n 及 $\mathrm{diag}_n A$. 如 $[0,1]\times[2,4]$ 是例长方形, 而 $[0,1]\times[2,3]\times[4,5]$ 是例正方体.

① 规定 $(a,b)=\{a,\{a,b\}\}$ 且 $(a,b,c)=((a,b),c)$ 及 $(x_i)_{i\in\alpha}=\{(i,x_i)|i\in\alpha\}$.

实数域 $\mathbb{R}$ 和复数域 $\mathbb{C}$ 统记为 $\mathbb{E}$, 实 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 和复 Euclid 空间 $\mathbb{C}^n$ 便统记为 $\mathbb{E}^n$, 其中向量 x 有长度 $|x| := \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$. 命 $\mathbb{E}^\times = \{x \in \mathbb{E} | x \neq 0\}$.

因 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 不等, Descartes 积无交换律: $\{0\} \times \{1\} \neq \{1\} \times \{0\}$.

集合算术律 (续)　约定 $((x, y), z) = (x, (y, z)) = (x, y, z)$.

结合律: $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$.

结合律: k 和 l 是正整数时, $A^k \times A^l = A^{k+l}$ 且 $(A^k)^l = A^{kl}$.

单调性: $A_i \subseteq B_i (i \in \alpha)$ 时, $\prod(A_i | i \in \alpha) \subseteq \prod(B_i | i \in \alpha)$.

分配律: $(A \setminus C) \times B = (A \times B) \setminus (C \times B)$ 且 $B \times (A \setminus C) = (B \times A) \setminus (B \times C)$.

分配律: $\left(\bigcup\limits_{i\in\alpha} A_i\right) \times B = \bigcup\limits_{i\in\alpha} (A_i \times B)$ 且 $B \times \left(\bigcup\limits_{i\in\alpha} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in\alpha} (B \times A_i)$.

分配律: $\left(\bigcap\limits_{i\in\alpha} A_i\right) \times B = \bigcap\limits_{i\in\alpha} (A_i \times B)$ 且 $B \times \left(\bigcap\limits_{i\in\alpha} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\alpha} (B \times A_i)$.

交积律: $\prod(A_i \cap B_i | i \in \alpha) = \prod(A_i | i \in \alpha) \cap \prod(B_i | i \in \alpha)$.

分离性: A_i 和 B_i 都非空时, $\prod\limits_{i\in\alpha} A_i = \prod\limits_{i\in\alpha} B_i$ 当且仅当诸 $A_i = B_i$. □

约定 $(x) = (x)_{i\in\{k\}} = x$, 则 Descartes 积 $A^1 = A$. 可将空组 $(x_i)_{i\in\varnothing}$ 写成 ( ).

命题 4　有限个有限集 $E_1, \cdots, E_m$ 之并 E 是有限集且 $|E|_0 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} |E_i|_0$(此谓有限次加性). 这是等式 (所谓加法公式) 当且仅当 $E_1, \cdots, E_m$ 互斥.

(1) 乘法公式　当 $D = \prod\limits_{i=1}^{m} E_i$ 时, D 是有限集且 $|D|_0 = \prod\limits_{i=1}^{m} |E_i|_0$.

(2) 幂指公式　有限集 A 和 B 的幂指集 B^A 是有限集且 $|B^A|_0 = |B|_0^{|A|_0}$.

(3) n 元有限集 A 共有 2^n 个子集和 $\binom{n}{k}$ 个 k 元有限子集.

证明　由归纳法可设 $m = 2$ 且 E_1 有个元素 a. 当 E_1 和 E_2 互斥时, $E \setminus \{a\}$ 有分解 $\{E_1 \setminus \{a\}, E_2\}$. 归纳地知 $|E|_0 = |E_1|_0 + |E_2|_0$. 在 E_1 和 E_2 有交点时, 命 $G = E_2 \setminus E_1$. 由 $E = E_1 \uplus G$ 和互斥情形知 $|E|_0 = |E_1|_0 + |G|_0$, 又根据命题 1 知 $|G|_0 < |E_2|_0$.

(1) 集族 $\{\{x\} \times E_2 | x \in E_1\}$ 分解 D 且 $\big|\{x\} \times E_2\big|_0 = |E_2|_0$, 用主结论即可.

(2) 命 $B_a = B$, 对于 $B^A = \prod(B_a | a \in A)$ 用 (1) 即可.

(3) 用归纳法: $A = A_1 \uplus \{b\}$ 时, 其子集形如 C 或 $C \uplus \{b\}$ 使 $C \subseteq A_1$. □

称 $(x_i)_{i\in\alpha}$ 是一个序列指 α 是某些整数构成的集合, 它依 α 的有限性和无限性是个有限序列和无限序列. 如序列 $(3, 4, 5, 6)$ 和 $(1, 2, 1, 2, \cdots)$ 各是有限的和无限的. 无限序列的值域可能是有限集, 从某项开始的无限序列可写成 $(x_n)_{n\geqslant k}$.

以后常用数列——各项为数的序列, 也常用集列——各项为集合的序列.

命题 5　设 $\alpha = \mathbb{N}$ 或 $\alpha = \{i \in \mathbb{N} | i < n\}$, 则 $\bigcup\limits_{i=0}^{k} E_i = \biguplus\limits_{i=0}^{k} F_i (k \in \alpha)$ 当且仅当集列 $(F_i)_{i\in\alpha}$ 是集列 $(E_i)_{i\in\alpha}$ 的首入分解: $F_0 = E_0$ 及 $F_k = E_k \Big\setminus \bigcup\limits_{i<k} E_i (0 < k \in \alpha)$.

需要全本请访问 www.ertongbook.com