高等院校“十三五”规划教材

高等数学

（医药类）



傅洪波 等 编

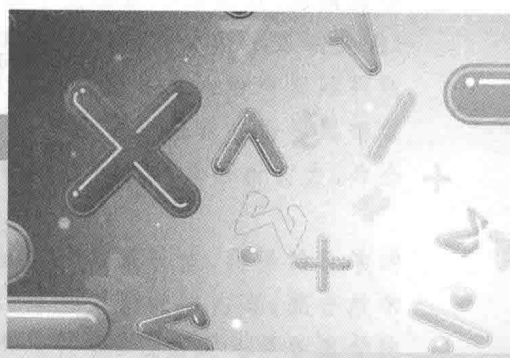
南開大學出版社
NANKAI UNIVERSITY PRESS

需要全本请访问 www.ertongbook.com

高等院校“十三五”规划教材

高等数学

（医药类）



主　编：傅洪波

副主编：盛冠楠　魏悦姿　张秀梅

汪　峰　鲁　娜　丁有得

袁　伟　薄朝升

南開大學出版社
NANKAI UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：医药类 /傅洪波等编著. -- 天津：南开大学出版社，2017.7
ISBN 978-7-310-05434-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①傅… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 180502 号

版权所有　侵权必究

南开大学出版社出版发行

出版人：刘立松

地址：天津市南开区卫津路 94 号　　邮编编码：300071

营销部电话：(022)23508339　23500755

营销部传真：(022)23508542　　邮购部电话：(022)23502200

*

三河市海新印务有限公司

全国各地新华书店经销

2017 年 8 月第 1 版　　2017 年 8 月第 1 次印刷

787×1092 毫米　16 开本　16 印张　357 千字

定价：38.80 元

如遇图书印装质量问题，请与本社营销部联系调换。电话：(022)23507125

前　言

最近几年，教育部、卫生部及其所属机构陆续颁布了关于推进21世纪教学内容和课程体系改革、加强教材建设的指导性文件，目的是提高本科的教学质量.本书正是根据这些指导原则，适应当前教学改革的新形势及现代医学发展对高等数学的需求，结合各编者及所在院校教学改革的实践经验而编写的.

数学是研究现实世界中的数量关系和空间形式的科学，高等数学是各门自然科学的共同基础.在科学技术突飞猛进的今天，数学已渗透到各个学科领域并产生强大的支撑作用.数学的原理、方法与计算机技术的结合及应用，有力地促进了生命科学的研究和现代医学的发展.高等数学(医药类)课程开设于1982年，它一直是我国高等医学院校一门必修的公共基础课，该课程的任务是：①授予学生比较系统的数学基础知识，为学习后继课程(包括基础医学和临床医学课程)打下必要的基础；②培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力和科学计算能力，这是造就具有一定科学素质和创新精神的医学人才所不可缺少的；③使学生了解数学在医药学上的应用，帮助他们树立运用数学理论和方法解决实际问题的意识，并积极进行这方面的实践与探索.总的来说，编写和出版这本教材的指导思想就是紧紧围绕新世纪医学人才的培养目标，着重培养学生的科学思维和定量分析能力，为全面提高学生的综合素质作出贡献.

在本书编写的过程中，我们注意突出基本理论、基础知识和基本技能，在保持数学的学科特点与知识体系的前提下，结合医学院校的教学实际，尽量更新教学内容，配合教学方法的改进，使教材具有思想性、科学性、先进性、启发性和实用性.根据近几年各医学院校普遍缩减理论课学时的情况，编者注意精简内容、控制难度，通过适量的典型实例进行深入浅出的讲解，力求做到“教师易教，学生易学”，并且密切结合医学应用.

本教材内容共分为8章，包括函数和极限，导数、微分及应用、不定积分，定积分，微分方程基础，多元函数微积分基础，概率论基础以及统计学初步.每章都设置一定数量的习题，包括填空题、选择题、计算与应用题等几种题型，书末还附有数学用表和习题答案.本教材适用于五年制医学院校的临床医学、检验、影像以及预防、麻醉、护理、口腔等医学相关专业的学生使用，也可作为药学专业的教科书，还可供医学工作者参考.全书的内容编排基本上按72学时设计，考虑到不同专业及不同学时的数学课程的教学需要，本书在内容选择上有较大的灵活性.例如，对于40学时左右的课程(如临床医学等专业)，建谈选择第一章到第五章，即从函数和极限讲到微分方程；对于70～80学时的课程(如药学专业)，可以增加讲授第六章至第八章的内容，包括多元函数微积分及概率与统计.我们还将编写和出版本书的配套教材《高等数学(医药类)学习指导》，拟概括总结各章的主要内容，分析重点和难点，讲解典型习题的锶颢思路和方法.并提供课本各章习题的详细解答.

由于时间仓促，加上编者水平有限，书中难免出现一些错漏，恳请读者批评指正.本书的编写得到广州医学院和各编者单位的领导、教务部门的支持与帮助，特此表示衷心的感谢.

目　录

第一章　函数和极限 001

第一节　函数的概念 …… 001
第二节　极限的概念 …… 005
第三节　函数的连续性 …… 013
习题一 …… 017

第二章　导数、微分及应用 021

第一节　导数的概念 …… 021
第二节　基本初等函数的导数 …… 025
第三节　函数的和、差、积、商的导数 …… 028
第四节　复合函数的导数 …… 031
第五节　反函数和隐函数的导数 …… 033
第六节　高阶导数 …… 036
第七节　拉格朗日(Lagrange)中值定理 …… 037
第八节　罗必塔(L'Hospital)法则 …… 039
第九节　函数的增减性 …… 042
第十节　函数的极值、最大值和最小值 …… 044
第十一节　函数的作图 …… 048
第十二节　微分的概念与公式 …… 053
第十三节　微分的应用 …… 058
习题二 …… 060

第三章　不定积分 065

第一节　不定积分的概念 …… 065
第二节　不定积分的性质和基本公式 …… 066
第三节　三种积分法 …… 069
习题三 …… 079

需要全本请访问 www.ertongbook.com

第四章 定积分 083
第一节 定积分的概念 …… 083
第二节 定积分的性质 …… 086
第三节 定积分的方法 …… 088
第四节 定积分的应用 …… 094
第五节 定积分的近似计算 …… 100
第六节 广义积分 …… 104
习题四 …… 106

第五章 微分方程基础 110
第一节 微分方程的一般概念 …… 110
第二节 一阶微分方程 …… 112
第三节 可降阶的高阶微分方程 …… 116
第四节 二阶常系数线性齐次微分方程 …… 119
第五节 微分方程在医学上的应用 …… 124
习题五 …… 128

第六章 多元函数微积分基础 132
第一节 多元函数的一般概念 …… 132
第二节 二元函数的极根及连续性 …… 135
第三节 偏导数 …… 136
第四节 全微分 …… 139
第五节 多元复合函数的求导法则 …… 141
第六节 二元函数的极值 …… 143
第七节 二重积分的概念和性质 …… 153
第八节 二重积分的计算 …… 156
习题六 …… 163

第七章 概率论基础 167
第一节 随机事件及其运算 …… 167
第二节 概率的定义 …… 169
第三节 概率的加法和乘法公式 …… 172
第四节 全概率公式和贝叶斯公式 …… 177
第五节 独立重复试验与伯努利概型 …… 180
第六节 离散型随机变量及其分布 …… 182

第七节　连续型随机变量及其分布 …… 186
第八节　正态分布 …… 190
第九节　随机变量的数字特征 …… 193
第十节　大数定律与中心极限定理 …… 199
习题七 …… 202

第八章　统计学初步 210

第一节　总体和样本 …… 210
第二节　统计量及其抽样分布 …… 211
第三节　参数估计 …… 216
第四节　假设检验 …… 223
习题八 …… 228

习题答案 …… 231
附　录 …… 246
附表 1　泊松分布表 …… 246
附表 2　正态分布函数 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ 的数值表 …… 247
附表 3　正态分布的双侧分位数($u_{1-\frac{\alpha}{2}}$)表 …… 247
附表 4　t 分布的双侧分位数($t_{1-\frac{\alpha}{2}}$)表 …… 248

第一章 函数和极限

在现代科学技术的各个领域中，函数是被广泛应用的数学概念之一. 初等数学研究的对象主要是常量，高等数学研究的对象则是变量. 函数关系是变量之间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法. 本章着重介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的主要性质.

第一节 函数的概念

一、函数的概念

1. 常量与变量

在研究实际问题时，经常会遇到各种不同的量，如长度、面积、温度、时间、体重等. 其中有的量在变化过程中保持同一数值，称为常量(constant)；有的量在变化过程中可取不同的数值，称为变量(variable). 例如，在热胀冷缩过程中，圆盘的半径 R 和周长 C 都是变量，但周长与半径的比 $C/R = 2\pi$ 不变，是常量.

常量和变量是对确定过程而言的. 同一个量，在某一条件下是常量，而在另一条件下就可能是变量. 例如，人的身高在一个短暂的时间内是常量，但在较长时间内就是变量.

常量也可以看做是一个特殊的变量，即在某一过程中，取相同数值的变量.

2. 函数的概念

定义 1-1 在某一过程中有两个变量 x 和 y，如果对于变量 x 的每个允许取的值，变量 y 按照一定的规律有唯一确定的值与之对应，则变量 y 称为变量 x 的函数. 变量 x 称为自变量(independent variable)，y 称为因变量(dependent variable)，记为

$$y = f(x)$$

自变量所有允许值的集合称为函数的定义域(domain of definition). 如果 x_0 是函数 $f(x)$ 定义域中的一点，则称函数在 x_0 点有定义，与 x_0 对应的函数值记作 $f(x_0)$. 所有函数值的集合称为函数 $f(x)$ 的值域(domain of function value).

函数的定义域常用区间来表示. 设 a、b 是两个常数，而且 $a < b$. 把满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数集合叫做闭区间(closed interval)，表示为 $[a,b]$；把满足 $a < x < b$ 的实数集合叫做开区间(open interval)；把满足 $a \leqslant x < b$ 或 $a < x \leqslant b$ 的实数集合都叫做半开半闭区间，分别表示为 $[a,b)$ 或 $(a,b]$；其中实数 a 与 b 叫做相应区间的端点.

同理，把满足 $x \geqslant a$，$x > a$，$x \leqslant b$，$x < b$ 的实数 x 的集合分别表示为 $[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$.

此外,邻域是常用的一种区间概念. 设 x_0 是某一定点,δ 是大于 0 的某实数,开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域,点 x_0 称为邻域中心,δ 称为邻域半径.

例 1-1 婴儿的体重在 0 ~ 6 个月的时间内可由如下经验公式确定:

$$y = 3 + 0.6x$$

式中,x 表示婴儿的年龄(月),是自变量;y 表示其体重(kg),是因变量,函数的定义域为$[0,6]$.

例 1-2 气象台用温度自动记录仪记录了当地一段时间内温度 T 的变化曲线,如图 1-1 所示. 13 ~ 23 时内的任意时刻 t 都对应着一个 T,$T = T(t)$. 其中,t 是自变量,T 是函数.

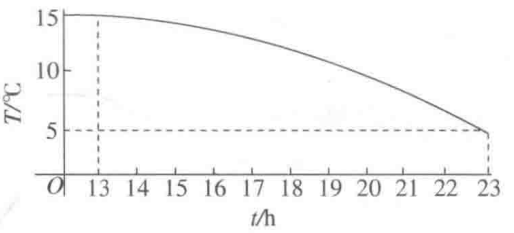


图 1-1 温度 T 随时间 t 的变化曲线

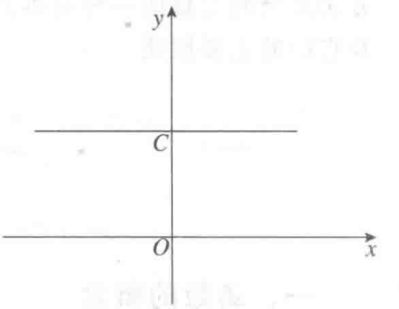


图 1-2 函数 $f(x) = C$ 的变化曲线

$y = C$ 或 $f(x) = C$ (C 是常数),也是变量 x 的函数. 因为,当变量 x 给出任何一确定值时,y 的值都是 C(图 1-2).

当所研究的函数 $y = f(x)$ 用一个式子表示时,如果不加说明,函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数 x 的全体.

二、分段函数

例 1-3 某药物的常用量 y,对 16 岁及 16 岁以上的成年人是一定的,设为 a;对于 16 岁以下的未成年人,则正比于年龄 x,设比例常数为 k,则有函数关系(图 1-3) 为

$$y = \begin{cases} kx, & \text{当 } 0 < x < 16, \\ a, & \text{当 } x \geqslant 16 \end{cases}$$

式中,药物量 y 是年龄 x 的函数,但其函数关系是用两个解析式表示的. 像这种在定义域内的不同部分用不同的解析式表示的函数称为分段函数(piecewise function).

分段函数是一个函数,而不是两个或几个函数. 应注意,求分段函数的函数值时,不同范围内的自变量的值要代入相应范围内的函数表达式进行运算.

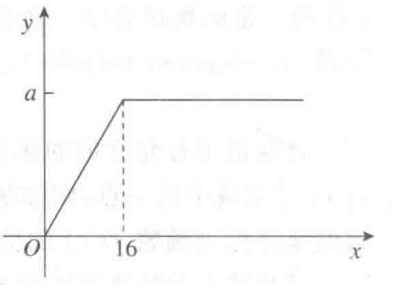


图 1-3 药物用量 y 与年龄的函数关系曲线

例 1-4 示波器上显示的三角波(图 1-4),其电压 V 与时间 t 的函数关系为

$$V = \begin{cases} 2t, & \text{当 } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 4 - 2t, & \text{当 } 1 < t \leqslant 2 \end{cases}$$

求在时间 $t = \frac{1}{2}$,$t = \frac{3}{2}$ 时电压 V 的值.

解 将自变量的值代入相应范围内的函数表示式中，得

$$V_{t=\frac{1}{2}} = 2t\big|_{t=\frac{1}{2}} = 2\times\frac{1}{2} = 1$$

$$V_{t=\frac{3}{2}} = (4-2t)\big|_{t=\frac{3}{2}} = 4-2\times\frac{3}{2} = 1$$

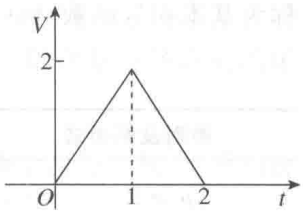


图 1-4 电压 V 与时间 t 的函数关系曲线

三、复合函数

定义 1-2 设变量 y 是变量 u 的函数，变量 u 又是变量 x 的函数，即

$$y = f(u), u = \varphi(x)$$

如果变量 x 的某些值通过中间变量 u 可以确定变量 y 的值时，则称 y 是 x 的复合函数(compound function)，记作

$$y = f[\varphi(x)]$$

例 1-5 试通过 $y = 1+u^2, u = \sin x$，求出 y 关于 x 的复合函数.

解 由 $y=1+u^2, u=\sin x$ 确定的复合函数是 $y=1+\sin^2 x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

例 1-6 试通过 $y = \ln u, u = \arctan x$，求出 y 关于 x 的复合函数.

解 $y = \ln u, u = \arctan x$ 的复合函数是 $y = \ln(\arctan x)$，其定义域为 $(0,+\infty)$.

如果由 2 个函数复合成的函数的定义域为空集时，则此复合函数无意义(或称它们不能复合). 例如，由 $y = \arcsin u, u = 2 + x^2$ 复合成的函数 $y = \arcsin(2 + x^2)$，因 $2+x^2 > 1$，其定义域为空集，即函数 $y = \arcsin(2+x^2)$ 无意义.

同理，可以将复合函数的概念推广到有限个函数构成的复合函数. 例如，3 个函数

$$y = \sqrt{u}, u = \ln v, v = 2x+3$$

构成的复合函数是

$$y = \sqrt{\ln(2x+3)}, \quad x \in [-1,+\infty)$$

在一些计算问题中，要把复合函数的中间变量找出来，把它“分解”为若干个简单函数，使计算简化.

例 1-7 将下列复合函数“分解”为简单函数：

(1) $y = a\sin(bx+c)$

(2) $y = a^{\sin(3x^2-1)}$

(3) $y = \tan\sqrt{\lg(\arcsin x)}$

解 (1) $y = a\sin(bx+c)$ 可以看成是由 $y = a\sin u$ 和 $u = bx+c$ 复合而成.

(2) $y = a^{\sin(3x^2-1)}$ 可以看成是由 $y = a^u, u = \sin v$ 和 $v = 3x^2-1$ 复合而成.

(3) $y = \tan\sqrt{\lg(\arcsin x)}$ 可以看成是由 $y = \tan u, u = \sqrt{v}, v = \lg t$ 和 $t = \arcsin x$ 复合而成.

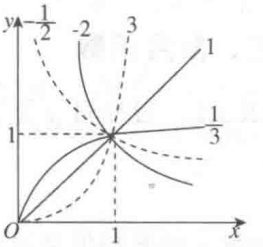
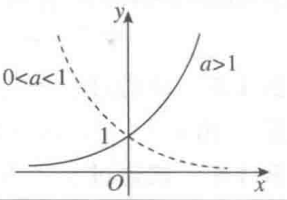
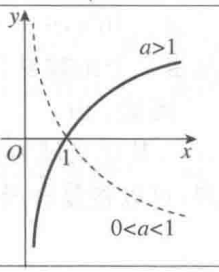
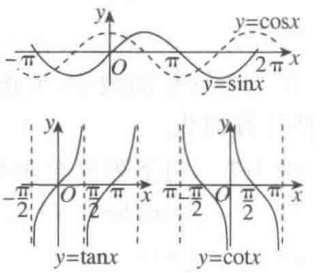
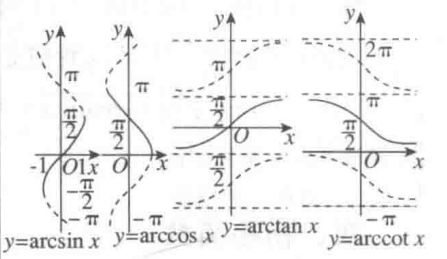
四、初等函数

1. 基本初等函数

在中学里已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，这些函数统

称为基本初等函数(basic elementary function).为复习和应用的方便,将其归纳成表1-1.

表1-1　基本初等函数表

类别及解析式	定义域	值　域	图　形
幂函数 $y=x^{\mu}$ $\mu>0$ μ次抛物线 $\mu<0$令$\mu=-m$ $(m>0)$ $y=x^{-m}=\dfrac{1}{x^{m}}$, m次双曲线	因μ而异,但$[0,+\infty)$是公共定义域 公共定义域为$(0,+\infty)$	因μ而异,但$[0,+\infty)$是公共值域 公共值域为$(0,+\infty)$	
指数函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	
对数函数 $y=\log_{a}x\ (a>0,a\neq 1)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	
三角函数 $y=\sin x$ $y=\cos x$ $y=\tan x$ $y=\cot x$	$(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$ $x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $x\neq n\pi$ $(n=0,\pm1,\cdots)$	 $[-1,1]$ $[-1,1]$ $(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$	
反三角函数 $y=\arcsin x$ $y=\arccos x$ $y=\arctan x$ $y=\operatorname{arccot}x$	 $[-1,1]$ $[-1,1]$ $(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$	 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ $[0,\pi]$ $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ $(0,\pi)$	

需要全本请访问 www.ertongbook.com

2. 初等函数

定义 1-3 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次复合所得到的函数，统称为初等函数(elementary function).

例如，$y=\ln(\cos^2 x)$，$y=\dfrac{1+a^2x}{\sqrt{1-x^2}}$，$y=\arcsin x+\dfrac{\tan x}{x}$ 等都是初等函数. 分段函数一般不是初等函数. 本教材所讨论的函数主要是初等函数.

第二节 极限的概念

极限思想、极限方法的产生，是对那些用初等数学方法不能解决的问题(如切线问题，面积、体积问题等) 进行长期探索的结果，由此形成的极限概念奠定了微积分学的理论基础. 在自然科学中有许多重要的量，要用极限方法才能做出精确的定义和计算. 本节在简要复习数列极限的基础上，引入函数极限的概念，着重介绍无穷小量和几种常用求极限的方法.

一、数列的极限

数列是定义在自然数集上的函数 $a_n=f(n)$ 的一种表示法. 把变量 a_n 按自变量 n 从小到大的顺序排成一列

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$$

称为数列，记作 $\{a_n\}$，其中 a_n 称为数列的第 n 项或通项. 作为例子，下面列出几个有通项的数列($n=1,2,3,\cdots$).

(1) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$：$1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$

(2) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$：$\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$

(3) $\left\{\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right\}$：$1,0,1,0\cdots$

(4) $\{(-1)^n n\}$：$-1,2,-3,\cdots,(-1^n)n,\cdots$

(5) $\{n!\}$：$1!,2!,3!,\cdots,n!,\cdots$

数列的几何表示是数轴上的一列点.

考察数列(1) ～ (5)，当 n 无限增大时，它们的变化趋势是不同的. 其中有些数列的项 a_n，例如(1)，(2) 的 $\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{n}{n+1}$，当 n 增大时能与某一个常数 a 无限接近，即数轴上的点 a_n 与点 a 的距离 $|a_n-a|$ 无限减小(图 1-5). 对这样的数列，$\{a_n\}$ 与数 a 的关系就用“极限”来说明.

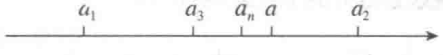


图 1-5 数轴上点 a_n 与 a 的距离变化趋势

定义 1-4 对于数列$\{a_n\}$,若当n无限增大时,a_n无限趋近一个常数a,则称a是数列$\{a_n\}$的极限,记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \text{或 } a_n \to a \ (n \to \infty)$$

也可简记为 $\lim a_n = a$,或$a_n \to a$.

从定义直接得到,若$a_n \to a$,则$(a_n - a) \to 0$;反之也成立.

以上列举的几个数列中,数列(1),(2)分别以0,1为极限,即有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

数列(3)没有极限,即$\lim_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{2}$不存在或没有意义.

数列(4),(5)也没有极限.这种数列的变化同自然数列$\{n\}$一样,当n无限增大时,各项的绝对值$|a_n|$无限增大,记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ 或 } a_n \to \infty$$

例如 $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} n! = \infty$

当$a_n \to 0$ $(a_n \neq 0)$时,由$\frac{1}{a_n}$组成的数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$,由于分子为1,分母的绝对值无限减小,分式的绝对值$\left|\frac{1}{a_n}\right|$就要无限增大,故有$\frac{1}{a_n} \to \infty$.反之,如$a_n \to \infty$,则$\frac{1}{a_n} \to 0$.

二、函数的极限

对于函数$y = f(x)$,自变量x的变化有两种情形,其中一种是x的绝对值无限增大(记作$x \to \infty$);另一种是自变量x的值无限趋近于定值x_0(记作$x \to x_0$).研究这两种情形的函数值的变化趋势,就是研究相应的函数的极限.

1. $x \to \infty$ 时函数的极限

考察函数$f(x) = \frac{1}{x}$,当$x \to \infty$,即x取正值并无限增大(记作$x \to +\infty$)及x取负值且它的绝对值无限增大(记作$x \to -\infty$)时,函数$f(x) = \frac{1}{x}$的变化趋势(表1-2).

表 1-2 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的变化趋势

x	± 1	± 10	± 100	$\pm 1\,000$	$\pm 10\,000$	$\pm 100\,000$	$\cdots$	$\to \infty$
$f(x)$	± 1	± 0.1	± 0.01	± 0.001	$\pm 0.000\,1$	$\pm 0.000\,01$	$\cdots$	$\to 0$

由此可见,不论$x \to +\infty$,还是$x \to -\infty$,函数$f(x) = \frac{1}{x}$都趋近于0.亦即函数的图像趋近于x轴,且$|x|$越大,就越趋近于0(图1-6),于是把0作为函数$f(x) = \frac{1}{x}$,当$x \to \infty$时的极限.

定义 1-5 当自变量x的绝对值无限增大时,如果函数$f(x)$无限趋近于一个常数a,就说当x趋向无穷大时,函数$f(x)$的极限是a,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \text{ 或 } f(x) \to a \ (x \to \infty)$$

例如,函数$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$,当$x \to \infty$时,$f(x) \to 1$.

这时 $y=1$ 为曲线 $y=1+\frac{1}{x^2}$ 的水平渐近线.

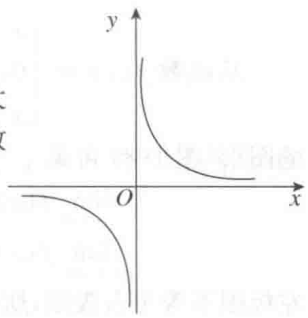


图 1-6　函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的关系曲线

定义 1-6　若自变量取正值(或负值)沿 x 轴正方向无限增大(或沿 x 轴负方向绝对值无限增大)时,函数 $f(x)$ 无限趋近一常数 a,则称 a 为函数 $f(x)$ 的单侧极限,记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=a \text{ 或 } f(x)\to a\ (x\to+\infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=a \text{ 或 } f(x)\to a\ (x\to-\infty)$$

例如,当 $x\to+\infty$ 时,函数 $f(x)=\arctan x\to\frac{\pi}{2}$;当 $x\to-\infty$ 时,函数 $f(x)=\arctan x\to-\frac{\pi}{2}$,也可表示为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$,$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$.

一般情况下,若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ [或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$] 存在时,$y=a$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

考察函数 $f(x)=x^2$,当自变量从 x 轴上 $x=2$ 的左右趋近 2(记作 $x\to 2$)时,函数 $f(x)=x^2$ 的变化趋势,见表 1-3 及图 1-7 所示.

表 1-3　$f(x)=x^2$ 的变化趋势

x	1.5	1.9	1.99	1.999	1.999 9	…	$\to 2$
$f(x)$	2.25	3.61	3.96	3.996	3.999 6	…	$\to 4$
x	2.5	2.1	2.01	2.001	2.000 1	…	$\to 2$
$f(x)$	6.25	4.41	4.04	4.004	4.000 4	…	$\to 4$

由此可见,当 $x\to 2$ 时,不论从右边还是从左边趋近 2,函数 $f(x)$ 趋近 4,且自变量 x 越趋近 2,函数 $f(x)$ 也越趋近 4,因此就说 4 是当 $x\to 2$ 时函数 $f(x)$ 的极限.

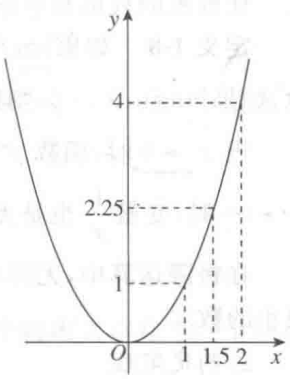


图 1-7　函数 $f(x)=x^2$ 的关系曲线

定义 1-7　当自变量 x 无限趋近常数 x_0 时,若函数 $f(x)$ 无限趋近一个常数 a,就说当 x 趋近 x_0 时,函数 $f(x)$ 的极限是 a,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \text{ 或 } f(x)\to a\ (x\to x_0)$$

在上述定义中,若自变量 x 趋近于定值 x_0,仅限于 $x<x_0$(或 $x>x_0$),即从 x_0 的左侧(或从 x_0 的右侧)趋近于 x_0 时,函数 $f(x)$ 趋近于一个常数 a,则 a 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限(或右极限),记作

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=a \text{ 或 } f(x_0-0)=a$$

或

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=a \text{ 或 } f(x_0+0)=a$$

定理 1-1　当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限存在的充分必要条件是左、右极限都存在并且相等.

从函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x>0\end{cases}$ (1-1)

的图形(图 1-8)可见

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x+1)=1$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x-1)=-1$$

左极限不等于右极限,所以当 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限不存在.

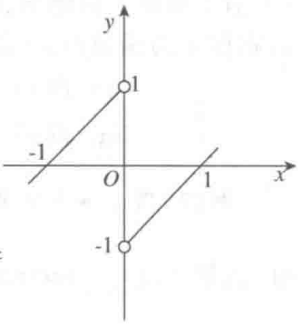


图 1-8 函数式(1-1)的关系曲线

下面我们不加证明的给出关于极限的几个定理:

极限的保号性定理 1: 如果 $x\in\{x\mid\mid x-x_0\mid<\delta\}$,$f(x)\geqslant 0$[或 $f(x)\leqslant 0$] 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ 存在,则 $a\geqslant 0$(或 $a\leqslant 0$).

极限的保号性定理 2: 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a>0$,(或 $a<0$) 则必存在 $\delta>0$. 使得当 $\mid x-x_0\mid<\delta$ 时有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)

单调有界原理:如果数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\leqslant a_{n+1}$,$a_n\leqslant l$,(l 为常数) 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 必存在. 或 $a_n\geqslant a_{n+1}$,$a_n\geqslant l$,(l 为常数) 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 必存在.

夹挤原理:如果数列 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$ 满足对任意的 n,$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,而且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$,$\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ 存在且相等,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

这些定理在两个重要极限证明的过程中起着非常重要的作用. 并且可以作为极限存在的判定定理.

三、无穷小量及其性质

1. 无穷小量

在极限的理论和应用中,以 0 为极限的变量起着重要作用,这种变量就是无穷小量.

定义 1-8 如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$,则称当 $x\to a$ 时函数 $f(x)$ 是无穷小量,简称无穷小. 类似地,如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$,则称当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 是无穷小.

当 $x\to 0$ 时,函数 x^n,$\sin x$,$1-\cos x$ 的极限都是 0,这些变量当 $x\to 0$ 时是无穷小,当 $x\to\infty$ 时,变量 $\dfrac{1}{x}$ 也是无穷小.

在极限运算中,无穷小具有与 0 相同的一些性质. 但是无穷小是变量不是常数 0,也不是很小的数.

2. 判定定理

定理 1-2 $\lim f(x)=A$ 成立的充分必要条件是 $\lim[f(x)-A]=0$. 即,若函数 $f(x)$ 以 A 为极限,则函数 $f(x)-A$ 是无穷小;反之,若 $f(x)-A$ 是无穷小,则 $f(x)$ 的极限是 A.

定理 1-3 若 $|\beta(x)|\leqslant|\alpha(x)|$,$\alpha(x)$ 是无穷小,则 $\beta(x)$ 也是无穷小.

定理 1-4 常数与无穷小的积仍是无穷小.

定理 1-5 有限个无穷小的代数和或积仍是无穷小.

例 1-8 证明当 $x\to 2$ 时,$2x-1\to 3$.

证 因为 $(2x-1)-3=2(x-2)\to 0$(当 $x\to 2$ 时),所以

$$\lim_{x\to 2}(2x-1)=3$$

例 1-9 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解 因为 $|\sin x|\leqslant 1$,所以 $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqslant\left|\dfrac{1}{x}\right|$,当 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小,$\dfrac{\sin x}{x}$ 也是无穷小,即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

例 1-10 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

证 因为对任何实数 x,有

$$|\sin x|\leqslant|x| \tag{1-2}$$

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\leqslant 2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\leqslant|x|$$

$$|\cos x-1|=|1-\cos x|\leqslant|x| \tag{1-3}$$

由式(1-2)、(1-3)及判定定理知 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

四、极限的四则运算

定理 1-6 若 $\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

(3) 当 $B\neq 0$ 时,$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

证 极限式(1)、(2)、(3)的证法相同,这里以(2)为例加以证明.

设 $f(x)-A=\alpha(x)$,$g(x)-B=\beta(x)$,则 $\alpha(x)$,$\beta(x)$ 都是无穷小.因为

$$\begin{aligned}f(x)\cdot g(x)-A\cdot B&=[A+\alpha(x)]\cdot[B+\beta(x)]-A\cdot B\\&=A\cdot\beta(x)+B\cdot\alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)\end{aligned}$$

$A\cdot\beta(x)$,$B\cdot\alpha(x)$,$\alpha(x)\cdot\beta(x)$ 都是无穷小,其和也是无穷小,故 $f(x)\cdot g(x)-A\cdot B$ 是无穷小,所以

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$$

推论 1 若 $\lim f(x)$ 存在,则 $\lim[C\cdot f(x)]=C\cdot\lim f(x)$.

推论 2 $\lim\limits_{x\to x_0}x^n=x_0^n$ (n 是正整数).

如果函数 x^a (a 是实数)在 x_0 有定义,则 $\lim\limits_{x\to x_0}x^a=x_0^a$ 也成立,这个极限式将在下一节中得到证明.特别当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时,得到

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$$

例 1-11 求 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x-1}{x^2-1}$.

解 当 $x\to-2$ 时,分母的极限

$$\lim_{x\to-2}(x^2-1)=\lim_{x\to-2}x^2-\lim_{x\to-2}1=4-1=3$$

所以 $$\lim_{x\to -2}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}(x-1)}{\lim\limits_{x\to -2}(x^2-1)}=\frac{-3}{3}=-1$$

例 1-12 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$.

解 因为分母的极限$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$,不能对分子、分母求极限再相除.但$x\to 1$时,总有$x\neq 1$,即$x-1\neq 0$,

所以 $$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

例 1-13 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.

解 当$x\to\infty$时,分子、分母都没有极限,可以令它们同时除以x的最高次幂,即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+4\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^3}}{7+5\frac{1}{x}-3\frac{1}{x^3}}=\frac{3+4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+2\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)^3}{7+5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-3\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)^3}=\frac{3}{7}$$

五、两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

作半径为1的圆($OA=1$),过A做圆的切线与OB的延长线交于P(图1-9).设$\angle AOB=x$(弧度),$0<x<\dfrac{\pi}{2}$,则$AP=\tan x$,$\overset{\frown}{AB}=x$,由于扇形AOB的面积$<\triangle AOP$的面积,所以$x<\tan x$,即

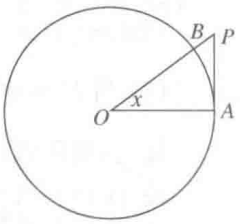


图 1-9 辅助解题示意图

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}$$

$$1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x$$

$$\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<|1-\cos x|$$

当$x\to 0+0$时,$1-\cos x$是无穷小,$1-\dfrac{\sin x}{x}$也是无穷小,故有

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{1-4}$$

当$x<0$时,$-x>0$,所以

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin(-x)}{-x}=1 \tag{1-5}$$

由式(1-4)和(1-5)得 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

例 1-14 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

需要全本请访问 www.ertongbook.com