# Minkowski空间中的有限型理论及局部微分几何

金明浩　崔秀鹏　◎　著

科　学　出　版　社

# Minkowski空间中的有限型理论及局部微分几何

金明浩　崔秀鹏　著

科 学 出 版 社
北 京

## 内 容 简 介

目前，国内关于Minkowski空间相关的著作非常少见．本书不拘束在空洞的理论上，而是关注了微分几何局部性质在Minkowski空间中的实现．本书以Minkowski空间为背景，研究了空间几何体在该空间中的应用，分两部分进行阐述，第一部分讨论流形的有限性理论，第二部分讨论曲线或曲面在局部上的奇点理论．

本书可作为高等院校数学专业研究生教材和数学基础专业入学考试的参考书，也可供科研技术人员、科技工作者参考．

**图书在版编目（CIP）数据**

Minkowski空间中的有限型理论及局部微分几何/金明浩，崔秀鹏著．—北京：科学出版社，2017

ISBN 978-7-03-053549-8

Ⅰ．①M…　Ⅱ．①金…　②崔…　Ⅲ．①Minkowski空间．Ⅳ①O412.1

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第140408号

责任编辑：戴　薇　杨　昕／责任校对：王万红

责任印制：吕春珉／封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2017年6月第 一 版　开本：B5（720×1000）

2017年6月第一次印刷　印张：10

字数：201 000

**定价：56.00元**

（如有印装质量问题，我社负责调换〈北京教图〉）

销售部电话 010-62136230　编辑部电话 010-62135397-2032

# 前　　言

狭义相对论中由一个时间维和三个空间维组成的时空, 后为俄裔德国数学家闵可夫斯基(H.Minkowski,1864—1909)最先表述.他表述的平坦空间, 即没有重力、曲率为零的空间及表示为特殊距离量的几何学是与狭义相对论的要求相一致的. 此空间即为闵可夫斯基空间. 时至今日, Minkowski 空间在各个领域的发展取得了重大的突破. 解析几何、微分几何、黎曼几何都在 Minkowski 空间中取得了成果.

B.Y.Chen 教授提出的有限型理论在流形的研究中有了广泛的应用[4-6,8-10,12-15], 有限型高斯映射理论更是将有限型思想融入到了流形的高斯映射中. 1 型高斯映射是较特殊、讨论较多的一类有限型微分映射, 具有简单、直观等优点. 随着理论的深入, 人们发现 1 型高斯映射的演化条件也能在流形分类中起到重要作用. 本书当中用到的逐点 1 型和弱 1 型高斯映射均为 1 型高斯映射的演化概念, 结论说明它们对流形的分类效果明显好于传统的 1 型高斯映射理论.

2009 年, 几何学家 Saji、Umehara、Yamada 在美国数学年刊发表的文章[177]中系统地阐述了曲面在尖楞处的曲率函数的定义, 并且解释了高斯曲率在尖楞和燕尾处的特征. 这篇文章是研究子流形在奇点邻近微分几何性质的一个里程碑. 在这个时期, 许多数学工作者投入到了子流形在奇点邻近几何性质的研究当中[113,120,147-149,164,175-182,184,193-196].

本书以三维 Minkowski 空间的旋转曲面为研究对象, 利用逐点 1 型和弱 1 型高斯映射条件, 给出了旋转曲面的更细致的分类.

本书结构如下.

第 1 章, 阐述有限型微分映射的发展概况, 并对全文做了概况的介绍.

第 2 章, 2.1 节主要介绍三维 Minkowski 空间的基本内容, 包括伪内积和伪向量积的定义, Minkowski 空间中的向量、曲线、平面、曲面的类型及旋转曲面的构造方法, 并且构造出了在该空间上的四类旋转曲面, 进一步给出本书讲述非常重要的两个概念：高斯映射 $G$ 和 Laplace 算子$\Delta$. 2.2～2.4 节, 将旋转曲面依次分成

类时、类空、类光三种情形，分别求出具有逐点 1 型高斯映射的具体曲面. 其中，2.2 节，证明了类时轴旋转曲面当中具有逐点 1 型高斯映射的曲面有且仅有欧氏平面$\mathbb{R}^2$ 、指标为 1 的圆柱面$\mathbb{R}_1^1\times\mathbf{S}^1$、非类光时间轴圆锥面. 2.3 节，证明了类空轴旋转曲面当中具有逐点 1 型高斯映射的曲面有且仅有 Lorentzian 平面$\mathbb{R}^2$、Lorentzian 圆柱面 $\mathbf{S}_1^1\times\mathbb{R}^1$、第一类类空轴圆锥面、第二类类空轴圆锥面. 2.4 节，证明了类光轴旋转曲面当中具有逐点 1 型高斯映射的曲面有且仅有第二类 Enneper 曲面、de Sitter 伪球、Hyperbolic 伪球.

第 3 章，同样分三种情形分别讨论了具有弱 1 型高斯映射的旋转曲面的具体形式. 3.1 节，证明了类时轴旋转面当中具有弱 1 型高斯映射的旋转曲面有且仅有第一类悬链面、第三类悬链面、de Sitter 伪球、Hyperbolic 伪球. 3.2 节，证明了类空轴旋转面当中具有弱 1 型高斯映射的旋转曲面有且仅有第二类悬链面、第四类悬链面、第五类悬链面、de Sitter 伪球、Hyperbolic 伪球. 3.3 节，证明了类光轴旋转面当中具有弱 1 型高斯映射的旋转曲面有且仅有第二类 Enneper 曲面、第三类 Enneper 曲面、de Sitter 伪球、Hyperbolic 伪球，并且还给出了算子$\Delta$和$\Delta^h$ 之间的关系. 3.4 节，证明了由第三基本形式诱导出的 Laplace 算子条件，无法对旋转曲面分类.

第 4 章，讨论了光滑曲线及其生成的子流形在奇点邻近的微分几何. 简要介绍了欧氏平面上奇异曲线的几何性质，进而研究了双曲平面上的奇异曲线. 在奇点处定义了曲率的概念，并进一步研究了多重渐屈线和四顶点定理.对于指标为二的四维半欧氏空间中伪类光曲线和偏类光曲线，应用 Legendrian 奇点理论解决了它们的类光超曲面的奇点分类问题.

第 5 章，研究了四维 Anti de Sitter 空间中类空曲面的拐点的识别问题. 我们知道曲面上每一点都对应着一个曲率椭圆，当曲率椭圆退化成径向线段时，对应的点被称为拐点. 依赖于退化的曲率椭圆与拐点的位置关系，可以将拐点分为三类，即实型拐点、虚型拐点和平坦型拐点.首先，用传统的办法给出了判断拐点类别的方法. 其次，从类光几何的角度分别揭示了实型拐点、虚型拐点和平坦型拐点的等价条件. 最后，给出平均方向曲线的微分方程，并且指出 H 奇点是由拐点和稳定点构成的.

第 6 章，研究了$\mathbb{R}^4$空间中的三维 Lorentzian 超曲面奇点分类问题. 6.1 节介绍

了$\mathbb{R}^4$中的三维 Lorentzian 超曲面基本理论. 6.2 节定义了三维 Lorentzian 超曲面的 Anti de Sitter 高度函数, 并分析高度函数的性质. 6.3 节介绍了切触关系, 并利用高度函数证明了几类切触等价关系. 6.4 节研究了三维 Lorentzian 超曲面的通有性.

本书是对基础数学的研究, 适合的阅读群体是基础数学专业的研究生、博士生及教师, 也可供全国各高校选作数学方面的研究生教材或参考书. 本书第 1~3 章由金明浩(长春师范大学)撰写, 第 4~6 章由崔秀鹏(长春工业大学)撰写. 全书由金明浩统稿.

由于作者水平有限, 书中的不妥之处在所难免, 恳请广大读者批评指正, 以期不断完善.

作　者

2016年9月

# 目　录

# 主要符号表

本文中使用的记号如下：

$\mathbb{R}^3$: 三维欧氏空间;

$\mathbb{R}_1^3$: 三维Minkowski空间;

$\mathbb{R}_1^2$: 洛伦兹平面;

$\mathbb{R}^2$: 欧氏平面;

$\mathbb{R}_1^1 \times \mathbf{S}^1$: 指标为1的圆柱面;

$\mathbf{S}_1^2$: de Sitter伪球;

$\mathbf{H}^2$: Hyperbolic伪球;

$\mathbf{S}_1^1 \times \mathbb{R}^1$: 洛伦兹圆柱面;

$\Delta$: 第一基本形式诱导下的Laplace算子;

$\Delta^h$: 第二基本形式诱导下的Laplace算子;

$C^\infty(M)$: $M$上的光滑函数空间;

$G$: 高斯映射;

$\boldsymbol{A}$: $3 \times 3$实矩阵;

$\alpha$: 流形$M$上的函数;

$\boldsymbol{C}$: 三维向量;

$g_{ij}$: 第一基本形式;

$E$: 第一基本形式$g_{11}$;

$F$: 第一基本形式$g_{12}$;

$G$: 第一基本形式$g_{22}$;

$h_{ij}$: 第二基本形式;

$L$: 第二基本形式$h_{11}$;

$M$: 第二基本形式$h_{12}$;

$N$: 第二基本形式$h_{22}$;

# 第1章 绪　　论

## 1.1 有限型理论的发展概况

微分几何是数学的一个重要分支, 它起源于微积分在几何上的应用, 并与微分方程、复分析、代数、拓扑及理论物理等相互渗透, 成为推动这些理论发展的一项重要工具. 此外, 微分几何在机械工程、力学等领域有广泛应用, 微分几何的研究已经有了迅速的发展.

1736年, 平面曲线的内在坐标的提出开启了微分几何这一新的学科, 欧拉、蒙日、高斯等为古典微分几何的发展作出了不朽的贡献. 1854年, 黎曼几何的提出, 对于现代微分几何的发展具有划时代的意义. 此后, 微分流形成了微分几何的主要研究对象, 这也是现代微分几何的重要分支之一.

20 世纪 70 ~ 80年代, B. Y. Chen等开创了有限型流形的研究. 他们不仅提出了流形的有限型概念, 还给出了流形的分类方法[5–7, 10]. B. Y. Chen的方法是利用流形上诱导的黎曼结构[8, 9], 给出子流形的阶数概念, 进一步利用阶数对流形分类.

事实上, 对于任意闭子流形$M \subset \mathbb{R}^m$, 都有整数对$[p, q]$一一对应. 设$M$是闭黎曼流形, $\Delta$是作用在光滑函数空间$C^\infty(M)$上的Laplace-Betrami算子. 因为$\Delta$是椭圆算子, 存在非负特征值的无穷离散序列

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots \infty, \tag{1.1}$$

记$V_k = \{f \in C^\infty(M) : \Delta f = \lambda_k f\}$, 称为与特征值$\lambda_k$对应的特征空间, 则每个$V_k$均为有限维. 在空间$C^\infty(M)$上定义如下内积运算

$$(f, g) = \int_M fg\mathrm{d}V, \tag{1.2}$$

则分解式$\sum\limits_{k=0}^{\infty} V_k$正交且稠密于空间$C^\infty(M)$. 又由于$M$是闭的, 故$V_0$是只含常值函数的一维子空间.

对任意$f \in C^\infty(M)$, 令$f_t$为$f$在子空间$V_t(t=0,1,2,\cdots)$上的投影, 则有如下分解式:

$$f=\sum_{t=0}^{\infty} f_t. \tag{1.3}$$

已知$V_0$是一维空间, 对任意非常值函数$f \in C^\infty(M)$, 存在正整数$p$, 使得$f_p$是非零函数, 且

$$f-f_0=\sum_{t\geqslant p} f_t. \tag{1.4}$$

如果这样的$f_t$是无穷多个, 可以令$q=\infty$, 否则存在正整数$q \geqslant p$, 使得

$$f-f_0=\sum_{t\geqslant p}^{q} f_t,$$

此时, 称$[p,q]$为$M$的阶数. 根据$[p,q]$的不同情形, B. Y. Chen给出如下定义及相关结果[10].

**定义 1.1** 设$[p,q]$是闭子流形$M \subset \mathbb{R}^m$的阶数, 当系数$q$是有限常数时, 称$M$是有限型流形.

**定义 1.2** 设$M \subset \mathbb{R}^m$是闭子流形, 若分解式中$f_t$的个数分别是1个、2个或3个时, 相应地称$M$是mono-order、bi-order或tri-order流形. 特别地, 当$p=q$时, 称$M$是$p$ 阶流形.

**定理 1.1** $M$是有限型流形, 当且仅当存在非平凡多项式$P(t)$, 使得$P(\Delta)H=0$. 其中, $H$是$M$的平均曲率向量.

**定理 1.2** $M$是bi-order流形, 当且仅当存在拥有不同实根的二阶多项式$P(t)$, 使得$P(\Delta)H=0$.

**定理 1.3** 假设$\dim M=1$, 则$M$是有限型流形, 当且仅当$M$上任意坐标函数的傅里叶展开式都有唯一的有限非零项.

20世纪80年代后期, B. Y. Chen和P. Piccinni将流形上的有限型理论推广到了子流形的光滑映射上. 其中, 高斯映射是处理子流形问题当中非常实用且应用广泛的微分映射. 大致想法是, 将微分映射$\varPhi: M \to \mathbb{R}^m$($M$是子流形)分解为类似于式(1.4)的形式:

$$\varPhi=\varPhi_0+\sum_{t\geqslant p}^{q} \varPhi_t. \tag{1.5}$$

若非零映射$\Phi_t(t \geqslant 1)$是$k$个, 则称$\Phi$是$k$型微分映射. 关于有限型高斯映射的相关结果如下[12, 14].

**定理 1.4** 设$\Phi: M \to \mathbb{R}^m$是紧致、有向的黎曼流形$M$到空间$\mathbb{R}^m$的等距浸入, 则高斯映射$G: M \to \Lambda^m\mathbb{R}^m$是1型的, 当且仅当$M$有常值伪曲率或者平坦的标准联络和平行平均曲率向量.

**定理 1.5** 设紧致超曲面$M \subset \mathbb{R}^{m+1}$具有1型高斯映射, 当且仅当$M$是$\mathbb{R}^{m+1}$的超球面.

**定理 1.6** 设$\Phi: \mathbf{S}^2(r) \to \mathbf{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^M$是极小等距浸入. 若$\Phi$不是全测地映射, 则二维球$\mathbf{S}^2(r)$具有2型高斯映射.

与此同时, 大家希望看到具有有限型高斯映射的具体曲面. 作为最简单的形式, 有如下1型高斯映射条件

$$\Delta \boldsymbol{G} = \lambda \boldsymbol{G}. \tag{1.6}$$

当流形满足式(1.6)时, 称该流形具有1型高斯映射. 其中, $\boldsymbol{G}$是高斯映射; $\Delta$是Laplace算子; $\boldsymbol{G}$的分量函数$G_1, G_2, G_3$均是$\Delta$的特征函数, 它们拥有相同的特征根. B. Y. Chen已证明了$\mathbb{R}^3$中的平面和球面满足式(1.6).

从式(1.6)看有限型高斯映射问题貌似是特征值问题, 实则不然. 1990年, F. Dillen、J. Pas 及L. Verstralen 等给出了式(1.6)的弱化条件, 即

$$\Delta \boldsymbol{G} = \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{G}, \quad \boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \tag{1.7}$$

并且证明了$\mathbb{R}^3$中的旋转曲面满足条件式(1.7), 当且仅当该曲面为平面、球面或圆柱面[29]. 有人注意到, 上面结果中平面和圆柱面都属于直纹面, 那么是不是直纹面中考虑条件式(1.7)呢? 1992年, C. Baikoussis和D. E. Blair把条件式(1.7)应用到了$\mathbb{R}^3$中的直纹面上, 并且证明了$\mathbb{R}^3$中的直纹面满足条件式(1.7), 当且仅当该曲面为平面或是圆柱面[17].

1995年, S. M. Choi把条件式(1.7)应用到三维Mikowski空间$\mathbb{R}^3_1$中, 得到关于旋转曲面和直纹面的如下结果[57, 58].

**定理 1.7** $\mathbb{R}^3_1$中的类空或类时直纹面$M$的高斯映射满足式(1.7), 当且仅当$M$局部上等价于如下曲面: (1) 当$\varepsilon = 1$时, $\mathbb{R}^2_1$, $\mathbf{S}^1_1 \times \mathbb{R}^1$或$\mathbb{R}^1_1 \times \mathbf{S}^1$; (2) 当$\varepsilon = -1$时, $\mathbb{R}^2$或$\mathbf{H}^1 \times \mathbb{R}^1$.

**定理1.8** $\mathbb{R}_1^3$中的类空或类时旋转曲面$M$的高斯映射满足式(1.7), 当且仅当$M$局部上等价于如下曲面: (1) 当$\varepsilon=1$时, $\mathbb{R}_1^2, \mathbf{S}_1^2, \mathbf{S}_1^1\times\mathbb{R}^1$或$\mathbb{R}_1^1\times\mathbf{S}^1$; (2) 当$\varepsilon=-1$时, $\mathbb{R}^2, \mathbf{H}^2$或$\mathbf{H}^1\times\mathbb{R}^1$.

1998年, 作为S. M. Choi工作的补充, L. J. Alías等得到了$\mathbb{R}_1^3$中满足式(1.7)的零母线直纹面. 至此, 三维Minkowski空间中满足条件式(1.7)的直纹面全部找到. 2000~2005年间, Y. H. Kim等人又将旋转曲面和直纹面在条件式(1.7)之下的研究推广到了更一般的伪欧氏空间上$\mathbb{R}_s^m$[23, 24, 68–70].

2005年, B. Y. Chen发现了很有意思的现象[4], 即$\mathbb{R}^3$中的螺旋面、悬链面及圆锥面满足如下条件:

$$\Delta \boldsymbol{G}=\alpha(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{C}), \tag{1.8}$$

式中, $\alpha$为$M$上的光滑函数; $\Delta$为Laplace算子; $\boldsymbol{C}$为向量.

根据条件(1.8), B. Y. Chen给出了下面的新概念. 如果流形$M$的高斯映射满足条件(1.8), 则称$M$具有逐点1型高斯映射. Y. H. Kim和D. W. Yoon陆续给出了不同空间中具有逐点1型高斯映射的直纹面的分类[71–73].

条件(1.6)~(1.8)中给出的$\Delta$都是由曲面的第一基本形式诱导出的算子, 那么为什么不尝试第二、第三形式呢? 最近Y. H. Kim尝试了新的条件[67]:

$$\Delta^h \boldsymbol{G}=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{G}, \quad \boldsymbol{\Lambda}\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3. \tag{1.9}$$

其中, $\Delta^h$为第二基本形式诱导下的Laplace算子. Y. H. Kim在$\mathbb{R}^3$中讨论了满足条件(1.9)的旋转曲面. 而本书主要内容之一是, 将$\mathbb{R}_1^3$中的旋转曲面在逐点1型条件和条件(1.9)下进行分类, 这将补充和完善Y. H. Kim的相关研究.

## 1.2 奇点理论应用研究的发展概况

奇点通常是指与周围的点有差异的点. 它很容易被发现并且普遍存在. 例如, 一幅人像素描, 首先出现在画布上的是人脸的轮廓和五官, 这就是奇点.

奇点理论是微积分学的一个直接的并且内容丰富的继承者, 也是现代数学中得到蓬勃发展的领域之一, 它在诸多学科中有广泛的应用, 如微分几何、微分拓扑、分歧理论、动力系统、微分方程、几何光学等. 特别地, 应用奇点理论也可以解决半黎曼流形中一些奇点的分类和识别的问题. 1915 年 11 月, 爱因斯坦在普

鲁士科学院做了一次关于引力场方程的重要发言, 并将引力描述为时空的一种几何属性——曲率, 这预示着广义相对论的诞生. 当引力场方程的真空解分别为正数、负数和零时, 对应的时空模型被分别称为 de Sitter 时空、Anti de Sitter 时空和 Minkowski 时空. 此后, 半欧氏空间中子流形的研究吸引着很多数学和物理学者[85, 107, 112, 116, 124–126, 130, 139–141, 167]. 在本书中, 我们将用奇点理论的知识研究半欧氏空间中一些与光滑曲线和光滑曲面相关的子流形在奇点邻近的微分几何性质.

实际上, 奇点对于科学家和数学家而言并不陌生. 起初, 他们只能用相对模糊的语言解释奇点所具有的特殊性质, 后来逐渐形成了理论体系, 如20 世纪 30 年代美国数学家 Morse 的临界点理论[163], 以及20 世纪 40 年代 Whitney 研究的微分流形的浸入、嵌入及示性类的工作中有关奇异现象的部分[203–205]. 这一时期是成果积累的阶段, 也是奇点理论的萌芽时期. 直到 20 世纪 50 年代 Whitney 的奠基性工作——《平面到平面的映射的奇点》[202] 一文发表之后, 奇点理论才作为一门新的理论体系登上了数学舞台. 1960 年, 费尔兹奖获得者法国数学家 Thom 从奇点理论的角度重新审视了古典微分几何[191, 192], 这一想法的提出为许多伟大的几何学家丰富自己在奇点处的想象力提供了可能. 1971 年, 英国数学家 Porteous 把他的思想具体实施到欧氏几何学研究中[172]. 此后, 奇点理论在几何学中的研究得以迅猛发展[81–84, 160, 165, 183, 187–190].

奇点理论的基本问题之一是分类问题, 即指出光滑映射芽在给定的等价关系下的分类. 最常见的等价关系是通过以下5类微分同胚群定义的, 即切触等价群 $\mathcal{K}$、左等价群 $\mathcal{L}$、右等价群 $\mathcal{R}$、左右等价群 $\mathcal{A}$ 及 $\mathcal{C}$ 等价群. Mather 给出了光滑映射芽在这5类微分同胚群作用下的有限决定性的充要条件[154–159]. Thom 给出了著名的分类定理——7种突变模型[191], 分别是折叠点、尖点、燕尾、蝴蝶、椭圆形脐点、抛物形脐点和双曲形脐点. 这是我们研究奇点分类的主要工具. 英国的数学家 Bruce、Giblin 和 Porteous 等对欧氏空间中子流形的奇点分类、奇点稳定性及奇点与几何不变量之间的关系进行了系统的研究[89–102, 172, 173]. 1996 年, 日本北海道大学数学系 Izumiya 教授和中国东北师范大学裴东河教授首次将奇点理论应用到了非欧几何学中子流形的研究中, 并应用 Lagrangian 和 Legendrian 奇点理论广泛研究了 Minkowski 空间、双曲空间、Anti de Sitter 空间和光锥上子流形的奇点分类问题, 并取得了丰硕的成

果[103–106, 108–111, 127–138, 150, 151, 168–170, 185, 186, 198–200].

识别问题也是奇点理论的基本问题之一. 顾名思义, 识别问题就是找出能够判断一个光滑映射芽类别的方法或准则. 将光滑的映射芽具体化之后, 对应的最简单的几何对象是曲线和曲面. 它们是古典微分几何学的研究对象, 其上的尖点或尖楞是最简单的奇点模型. 要识别奇点首先就要了解几何对象在奇点处的几何性质. 长期以来, 几何学家的研究回避了奇异的情况. 近些年来, 识别问题才受到了许多数学家的关注. 1987 年, Rieger 教授研究了在规范了的坐标系上光滑映射芽的奇点的识别问题[174], 形如 $(u, v) \mapsto (u, f_2(u, v))$. 2010 年, 几何学家 Umehara、Saji、Yamada 优化了这一识别方法, 给出了不需要规范坐标系的判别准则[175]. 之后, 他们系统地研究了子流形在奇点处的局部微分几何性质, 并做了一系列有关奇点识别的工作[113, 120, 147–149, 164, 175–182, 184, 193–196], 如波前的 $A_k$ 型奇点的识别问题[178]、双曲空间中平坦 fronts 的奇点的识别问题[149] 等. 可见, 奇点理论是研究几何学的一个新的重要的工具, 它在奇异部分的几何学的研究中发挥了很大的作用.

# 第2章 旋转曲面的逐点1型高斯映射

## 2.1 预备知识

设$\mathbb{R}^3=\{(x_0,x_1,x_2)|x_i\in\mathbb{R},(i=0,1,2)\}$是三维实向量空间. 对于$\mathbb{R}^3$空间中的任意两个向量$\boldsymbol{x}=(x_0,x_1,x_2),\boldsymbol{y}=(y_0,y_1,y_2)$, $\boldsymbol{x}$ 和$\boldsymbol{y}$ 的伪内积和伪向量积定义如下:

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=-x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2,$$

$$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=(x_2y_1-x_1y_2,x_2y_0-x_0y_2,x_0y_1-x_1y_0).$$

我们称$(\mathbb{R}^3,\langle,\rangle)$为三维Minkowski空间或三维伪欧氏空间, 并将$(\mathbb{R}^3,\langle,\rangle)$简记为$\mathbb{R}^3_1$.

在伪内积运算下, 对于任意非零向量$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3_1$, 当$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle>0$, $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle<0$或$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=0$ 时, 分别称向量$\boldsymbol{x}$ 为类空向量、类时向量或类光向量. 设$I$ 是$\mathbb{R}$ 中的开区间, 我们定义$\mathbb{R}^3_1$中的光滑曲线$\gamma:I\to\mathbb{R}^3_1$, 并且当$\boldsymbol{\gamma}'$ 是类空向量、类时向量或类光向量时, 分别称$\gamma$ 为类空曲线、类时曲线或类光曲线. 设$\Pi$是$\mathbb{R}^3_1$中的一平面, 当该平面的法向量是类空向量、类时向量或类光向量时, 分别称$\Pi$ 为类空平面、类时平面或类光平面. 对于$\mathbb{R}^3_1$中的曲面$M$, 我们则根据切平面的类型来定义该曲面的类空、类时或类光性.

关于Minkowski空间, 我们有如下显然的结果.

$$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}\text{当且仅当}\boldsymbol{x}\text{和}\boldsymbol{y}\text{线性无关},\tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{x},\tag{2.2}$$

$$\langle\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle=\langle\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle=0,\tag{2.3}$$

$$\langle\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle=\langle\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}\rangle,\tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{x}\text{或}\boldsymbol{y}\text{是类时向量,则}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\text{是类空向量}.\tag{2.5}$$

下面介绍$\mathbb{R}^3_1$中的旋转曲面及它的类型. 设$\Pi$是$\mathbb{R}^3_1$中的一平面, 现有光滑曲线$\gamma:I\to\Pi$和直线$l$在同一平面$\Pi$内, 要求$\gamma$ 和$l$不相交. 当$\gamma$围绕着$l$旋转一周时, 得到$\mathbb{R}^3_1$中的旋转曲面$M$, 此时称$l$为旋转轴, $\gamma$为母线. 根据$l$和$\Pi$的类空、类时及类

光性, $\mathbb{R}_1^3$中的旋转曲面可分为如下4类: 当$l$是类时直线时, 平面$\Pi$只能为类空平面, 此时通过Lorentz变换将$l$变换到$x_0$轴上, 不失一般性, 我们直接选取$x_0$轴为旋转轴, $x_0x_1$坐标面看作$\Pi$, 构造类时轴旋转曲面; 当$l$为类空直线时, 因为$M$是非退化曲面, 因此平面$\Pi$可能为类时平面, 也可能为类空平面, 不失一般性, 我们选取$x_2$轴为旋转轴, $x_1x_2$坐标面或$x_0x_2$坐标面看作$\Pi$, 构造类空轴旋转曲面; 当$l$为类光直线时, 选取向量$(1,1,0)$生成的直线$l$为旋转轴, $x_0x_1$坐标面看作$\Pi$, 构造类光轴旋转曲面[57]. 旋转曲面的具体表达式可分成如下3种情况.

情况1：类时轴旋转曲面.

选取$x_0$轴为旋转轴, 母线$\gamma$取自于$x_0x_1$坐标面, 且具有表达式

$$\boldsymbol{\gamma}(u)=(g(u),f(u),0), \tag{2.6}$$

其中, $f(u),g(u)$均为光滑函数, 且满足$f(u)>0$. 此时$x_0$轴为旋转轴, 以$\gamma$为母线的旋转曲面方程为

$$\boldsymbol{x}(u,v)=(g(u),f(u)\cos v,f(u)\sin v). \tag{2.7}$$

情况2：类空轴旋转曲面.

选取$x_2$轴为旋转轴, 母线$\gamma$取自于$x_1x_2$坐标面或是$x_0x_2$坐标面, 且表达式分别为

$$\boldsymbol{\gamma}(u)=(0,f(u),g(u))\ \text{或}\ \boldsymbol{\gamma}(u)=(f(u),0,g(u)), \tag{2.8}$$

其中, $f(u),g(u)$均为光滑函数, 且满足$f(u)>0$. 此时$x_2$轴为旋转轴, 以$\gamma$为母线的旋转曲面方程为

$$\boldsymbol{x}(u,v)=(f(u)\sinh v,f(u)\cosh v,g(u)) \tag{2.9}$$

或

$$\boldsymbol{x}(u,v)=(f(u)\cosh v,f(u)\sinh v,g(u)). \tag{2.10}$$

情况3：类光轴旋转曲面.

选取向量$(1,1,0)$生成的直线$l$为旋转轴, 母线$\gamma$取自于$x_0x_1$坐标面, 且具有表达式

$$\boldsymbol{\gamma}(u)=(f(u),g(u),0), \tag{2.11}$$