

超级通俗

考研数学

三大攻坚战之完爆高等数学

潘鑫◆著



考研数学的传言
麒麟才子百难见

超级无敌阅读组合
(按如下顺序进行阅读)

《超级通俗 考研数学 三大攻坚战》

《超级通俗 考研数学 习题伴侣》

《超级通俗 考研数学 绝密解题套路总结》

《超级通俗 考研数学 历年真题无敌解析》

《超级通俗 考研数学 神准押题》

中国商业出版社

超级通俗 考研数学

三大攻坚战之完爆高等数学

潘鑫◆著

常州大学图书馆
藏书章

 中国商业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

超级通俗 考研数学. 三大攻坚战之完爆高等数学 /
潘鑫著. —北京: 中国商业出版社, 2016. 4
ISBN 978-7-5044-9407-8

I. ①超… II. ①潘… III. ①高等数学-研究生-入
学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 095610 号

责任编辑: 刘毕林

中国商业出版社出版发行

010-63180647 www.c-cbook.com

(100053 北京广安门内报国寺1号)

新华书店总店北京发行所经销

北京明月印务有限责任公司印刷

*

787×1092 毫米 16 开 60 印张 1100 千字

2016 年 6 月第 1 版 2016 年 6 月第 1 次印刷

定价: 98.00 元

* * * *

(如有印装质量问题可更换)

“超级通俗”系列丛书 出版说明

本套丛书简介

本套丛书由五部分组成，它们分别是：

1. 《超级通俗 考研数学 三大攻坚战》(包括高等数学、线性代数、概率统计共三本)。
2. 《超级通俗 考研数学 习题伴侣》(按数学一、数学二、数学三分为三本)。
3. 《超级通俗 考研数学 绝密解题套路总结》(按数学一、数学二、数学三分为三本)。
4. 《超级通俗 考研数学 历年真题无敌解析》(按数学一、数学二、数学三分为三本)。
5. 《超级通俗 考研数学 神准押题》(按数学一、数学二、数学三分为三本)。

本套丛书阅读顺序

本套丛书应按照以上从“1”到“5”的顺序进行阅读。首先，《超级通俗 考研数学 三大攻坚战》三本书中给大家讲解考研数学所要求的所有知识点；其次，《超级通俗 考研数学 习题伴侣》中给大家选取了大量习题，用以巩固“攻坚战”中学到的知识点；接着，通过《超级通俗 考研数学 绝密解题套路总结》给大家总结考试的一些固定题型(和“攻坚战”的区别就在于：攻坚战讲的是考点，而本书讲的是题型，只会考点不会题型的话那么做题速度提高不了，而只会题型不会考点的话那么知识学得并不全面)；再接着，大家就要通过《超级通俗 考研数学 历年真题无敌解析》来大量地练习考研数学真题；最后，大家通过《超级通俗 考研数学 神准押题》来检测自己的学习效果。

本套丛书定位

本套丛书的定位是：一套完全适合准备研究生入学考试的读者自学的书籍(无论读者基础如何)。本套丛书与传统教材大不相同，语言非常通俗易懂，逻辑十分严谨，所涉及的每个知识点(无论多简单的知识点)几乎都有举例，这“三斧子”使得读者完全不用担心有看不懂的地方。所以，本套丛书定位为自学用书。

本套丛书特色

1. 充满趣味

本套丛书从书名到内容处处充满着趣味性，如书中大量使用了“攻坚战”“发动进攻”等词语，使得原来枯燥的数学知识变得生动形象起来。

2. 语言非常通俗易懂

大部分考研数学类书籍，都是十分规范化的，有点儿像古代的“八股文”，读者需要

一个字一个字地去琢磨到底是什么意思。而最为高级的表达方式就是：用最能让人理解的文字，去讲解最难让人理解的知识，但不需要读者再去琢磨如此规范化的语言到底是什么意思。这正是本套丛书的最大亮点。本套丛书的所有语言，从定义、定理的解释，到例题的解析，再到习题的解析，都非常地通俗易懂，让人感觉就像是在读童话故事或者武侠小说。这样一来，读者不仅能看懂本书的所有内容，更乐于去阅读，从而使得读者不仅掌握了相应的知识，也节省了学习时间。

3. 逻辑非常清晰

本套丛书的逻辑从头到尾都是非常清晰的。具体来说，本套丛书的所有题目的解析中绝对不会出现任何一个书中没有讲到的知识点，并且几乎所有题目的每一步解答都注明了来源。另外，大家知道，做一道题可能会同时用到很多个不同章节的知识点。笔者见过的很多考研辅导书中都存在这样一种现象：讲完知识点一，然后下面有配套的例题，而此例题中不但用到了刚讲完的知识点一，而且还用到了没讲的知识点二（题中并没有注明用到了还没有讲的知识点二）。这样一来，许多读者就不明白了，思考了很长时间，以为是之前的某个知识点自己忘了，后来才知道原来用到的是后续的知识点。这样的话很浪费时间，而本套丛书对这一点高度重视，所有的习题中极少存在上述现象。

4. 例题非常丰富

本套丛书的例题非常丰富。本套丛书所涉及到的知识点（无论再简单的知识点）几乎都有配套的例题。

本套丛书读者对象

以下三类读者最适合阅读本套丛书：

1. 正在准备研究生入学考试的读者（无论读者是什么样的基础）。
2. 正在准备学校期末考试的在校大学生（无论读者是什么样的基础）。
3. 工作后需要补学或温习高等数学、线性代数、概率统计的读者（无论读者是什么样的基础）。

感谢

本套丛书能够和大家见面，是多方努力的结果。笔者做了很多努力和大量工作，参与本套丛书编写的人员还有：陈翔宇、郑祺、刘坤、王一川、王一珉、洪晓雪、李桐、和家乐、张梅艳、谢思思、潘建平、禹贞余、王剑博、赵政。

要感谢为本套丛书做出贡献的中国商业出版社的各位辛勤的工作者，没有他们的付出，就没有本套丛书的顺利出版。

另外，我还要感谢我的各位讲授考研课程的同行，他们在我写作本套丛书的过程中给了我很多的指导。

在此向所有帮助与支持我的朋友道一声：谢谢！

潘鑫

2016年1月于北京

超级无敌导读 打赢高等数学攻坚战（必看）



麒麟才子给大家的温馨提示：

本章是导读，虽不涉及具体的知识点，但地位是相当重要的，因为本章会告诉大家本书的使用方法。因此，为了打赢高等数学攻坚战，请大家一定要阅读本章。

1 背景介绍



考研数学高等数学的复习其实就是一场攻坚战。为了能够打赢这场攻坚战，我们一共需要对敌人发动十二次进攻。

第一次进攻（本书第1章）是对“极限与连续”发起的。

第二次进攻（本书第2章）是对“导数与微分”发起的。

第三次进攻（本书第3章）是对“微分中值定理及其应用”发起的。

第四次进攻（本书第4章）是对“一元函数积分学”发起的。

第五次进攻（本书第5章）是对“微分方程”发起的。

第六次进攻（本书第6章）是对“多元函数微分学”发起的。

第七次进攻（本书第7章）是对“二重积分”发起的。

第八次进攻（本书第8章）是对“三重积分”发起的。

第九次进攻（本书第9章）是对“曲线积分”发起的。

第十次进攻（本书第10章）是对“曲面积分”发起的。

第十一次进攻（本书第11章）是对“无穷级数”发起的。

第十二次进攻（本书第12章）是对“经济学问题”发起的。

这十二次进攻胜利结束后，高等数学的复习也就结束了。

2 满分攻略



本书一共有十二章，每一章分为“基础知识点”和“核心考点”两部分来给大家进行讲解。

例如，第1章的目录是这样的：

第1章 第一次进攻——极限与连续

- 1.1 基础知识点1——极限长什么样
- 1.2 基础知识点2——极限的计算方法
- 1.3 基础知识点3——三个小技巧
- 1.4 基础知识点4——极限的定义
- 1.5 基础知识点5——函数的连续性与间断点
- 1.6 基础知识点6——各种无穷小
- 1.7 核心考点1——两个常用的结论
- 1.8 核心考点2——函数的极限存在性
- 1.9 核心考点3——已知一极限求另一极限
- 1.10 核心考点4——求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式

1.11 核心考点 5——函数极限的保号性

1.12 核心考点 6——函数极限与数列极限的相互转化

考研数学高等数学部分取得满分是每位考生的心愿，那么如何使用本书才能使得高等数学达到满分呢？下面的话是满分攻略！

不管你的数学基础怎么样（或许你大学从没有学过数学、或许大学的每次数学期末考试你全都挂掉了、或许大学的每次数学期末考试你都是靠突击一两天才勉强获得及格的分数），只要你做到以下两点，就一定可以使得考研高等数学部分达到满分：

① 书中的每一个知识点都要看，不要遗漏掉任何一个细节。（放心，麒麟才子的文笔，你们可以完全看懂的！）

② 在看完每一章后，需要把每一章的“核心考点”默写下来。

比如，当你看完第一章后，你需要拿出一张白纸，白纸上这么写：

第一次进攻——极限与连续

核心考点 1——两个常用的结论

内容如下：

.....

核心考点 2——函数的极限存在性

内容如下：

.....

核心考点 3——已知一极限求另一极限

内容如下：

.....

核心考点 4——求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式

内容如下：

.....

核心考点 5——函数极限的保号性

内容如下：

.....

核心考点 6——函数极限与数列极限的相互转化

内容如下：

.....

3 战前赠言



麒麟才子给即将打响攻坚战的同学们的战前赠言：

有志者，事竟成。破釜沉舟，百二秦关终属楚
苦心人，天不负。卧薪尝胆，三千越甲可吞吴

目 录

第 1 章 第一次进攻——极限与连续	1
由于我不确定你是否看了“超级无敌导读”，所以再次提醒：每章我将按照“基础知识点+核心考点”的方法来讲解，其中“基础知识点”只要全看懂就可以了，而“核心考点”则要看懂后默写出来。只要你每章都如此，那么，不管你是什么基础，考研数学高等数学部分就一定能拿到满分。	
1.1 基础知识点 1——极限长什么样	2
极限是什么？是极限运动吗？	
1.2 基础知识点 2——极限的计算方法	3
神奇的极限，更神奇的计算方法！	
1.2.1 函数的极限的计算方法	4
1.2.2 数列的极限的计算方法	90
1.3 基础知识点 3——三个小技巧	115
大方法需要，小技巧同样需要！	
1.3.1 第一个小技巧	115
1.3.2 第二个小技巧	117
1.3.3 第三个小技巧	121
1.4 基础知识点 4——极限的定义	123
老祖宗是怎么定义极限的？	
1.4.1 数列的极限的定义	123
1.4.2 趋于无穷大时函数的极限的定义	127
1.4.3 趋于定点时函数的极限的定义	130
1.5 基础知识点 5——函数的连续性与间断点	133
世间万物，有的连续，有的间断。	
1.5.1 函数的连续性	133
1.5.2 函数的间断点	145
1.6 基础知识点 6——无穷小、同阶无穷小、等价无穷小、高阶无穷小、 低阶无穷小、 k 阶无穷小	151
无穷小是多小？	

1.6.1	无穷小	151
1.6.2	同阶无穷小	151
1.6.3	等价无穷小	152
1.6.4	高阶无穷小	154
1.6.5	低阶无穷小	156
1.6.6	k 阶无穷小	156
1.7	核心考点 1——两个常用的结论	157
	记住常用的结论，事半功倍！	
1.8	核心考点 2——函数的极限存在性	159
	极限什么时候存在？	
1.8.1	函数和差的极限存在性	159
1.8.1	函数乘积的极限存在性	161
1.9	核心考点 3——已知一极限求另外一极限	163
	学会举一反三，知一求多！	
1.10	核心考点 4——求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式	173
	利用极限来算表达式，神奇吧！	
1.11	核心考点 5——函数极限的保号性	185
1.11.1	趋于无穷型的函数极限的保号性	185
1.11.2	趋于无穷型的函数极限的保号性的推论	186
1.11.3	趋于定点型的函数极限的保号性	187
1.11.4	趋于定点型的函数极限的保号性的推论	189
1.12	核心考点 6——函数极限与数列极限的相互转化	192
1.12.1	函数极限转化为数列极限	192
1.12.2	数列极限转化为函数极限	199
第 2 章	第二次进攻——导数与微分	202
	本章将为大家介绍导数的相关知识。	
2.1	基础知识点 1——可导的定义	203
	大家不能只会高中讲过的导数的公式啊，定义也得会！	
2.1.1	函数在某一点处可导的定义	203
2.1.2	函数在某一点处左/右可导的定义	213
2.1.3	函数在某区间可导的定义	231
2.2	基础知识点 2——常用的导数公式	234
	利用导数公式计算导数，事半功倍！	

2.2.1	基本初等函数的导数公式	235
2.2.2	导数的四则运算法则	236
2.2.3	复合函数的导数公式	237
2.2.4	幂指数函数求导	239
2.3	基础知识点 3——可微的定义	240
	可微就是可导，可导就是可微！	
2.4	基础知识点 4——可微、可导、连续三者的关系	243
2.5	核心考点 1——很重要的四个知识点	247
	变上限积分求导公式是什么？	
2.5.1	第一个知识点	247
2.5.2	第二个知识点	247
2.5.3	第三个知识点	260
2.5.4	第四个知识点	267
2.6	核心考点 2——高阶导推低阶导	268
	怎么利用公式求？	
2.7	核心考点 3——求某函数的高阶导数的方法	269
	求高阶导难道真要一阶一阶地来求吗？不！	
2.8	核心考点 4——求曲线的渐近线	275
	渐近渐近，越来越近！	
2.9	核心考点 5——分段函数求导	283
	分段函数也能求导？	
第 3 章	第三次进攻——微分中值定理及其应用	293
	导数讲完了，我们来看看导数的应用吧！	
3.1	基础知识点 1——求函数在给定区间的单调性	294
	越来越大，越来越小，这就是单调性！	
3.2	基础知识点 2——求函数的单调区间	295
	不同的区间有不同的单调性！	
3.3	基础知识点 3——求函数的极值点与极值	297
	极值是什么值？	
3.4	基础知识点 4——求函数在给定区间的凹凸性	302
	何为凹？何为凸？	
3.5	基础知识点 5——求函数的凹凸区间	304
	凹区间，凸区间，凹凸区间！	

3.6	基础知识点 6——求函数的拐点	306
	走路会拐弯，函数有拐点！	
3.7	基础知识点 7——与极值点和拐点有关的一个重要结论	313
	掌握重要结论必然能事半功倍！	
3.8	核心考点 1——求函数在给定区间的最值	315
	最值比极值还“极”！	
3.9	核心考点 2——求两个函数的交点个数或求一个方程的实根个数	324
	有几个交点呢？不用头疼，请看本节！	
3.10	核心考点 3——证明恒等式	330
	总感觉这两个家伙一样耶，怎么证明呢！	
3.11	核心考点 4——证明不等式	341
	不！它们肯定不相等！看我来证明！	
3.12	核心考点 5——证明零点问题	355
	零点乐队听说过吗？听说过就会证明零点问题！	
第 4 章	第四次进攻——一元函数积分学	381
	何为积分？请看本章。	
4.1	基础知识点 1——原函数与不定积分	382
	原函数是函数，不定积分是积分，它们有关吗？	
4.1.1	原函数	382
4.1.2	不定积分	382
4.2	基础知识点 2——不定积分长什么样	383
	不定积分长什么样？恐怖吗？	
4.3	基础知识点 3——定积分和反常积分长什么样	384
	定积分和反常积分这对兄弟又长什么样呢？	
4.4	核心考点 1——不定积分和定积分的计算方法	386
	不会计算哪行！	
4.4.1	不定积分的计算方法	386
4.4.2	定积分的计算方法	446
4.5	核心考点 2——反常积分的计算方法	453
	反常积分，计算方法也反常吗？	
4.6	核心考点 3——定积分的应用	469
	定积分有什么应用？	
4.6.1	利用定积分求面积	469

4.6.2	利用定积分求旋转体的体积	479
4.7	核心考点 4——求被积函数中含绝对值的定积分与反常积分	504
	绝对值, 绝对简单!	
4.8	核心考点 5——两个重要知识点	506
	掌握重要知识点, 事半功倍!	
4.8.1	原函数的存在性	507
4.8.2	对称区间上奇偶函数的定积分与反常积分	514
第 5 章	第五次进攻——微分方程	521
	微分方程是一种特殊的方程, 本章将为大家介绍微分方程的相关知识。	
5.1	基础知识点 1——微分方程长什么样	522
	微分方程到底是何方神圣?	
5.2	基础知识点 2——微分方程的阶	523
	微分方程分一阶、二阶.....	
5.3	基础知识点 3——微分方程的解	525
	微分方程的解是什么意思呢?	
5.4	基础知识点 4——微分方程的通解	527
	通解也是解!	
5.5	基础知识点 5——微分方程的初始条件与微分方程的特解	527
	特解也是解!	
5.6	核心考点 1——求一阶微分方程的通解的方法	528
	一阶微分方程应该如何去求解呢?	
5.6.1	可分离变量法	528
5.6.2	换元法	531
5.6.3	公式法	537
5.6.4	伯努利法	542
5.6.5	变量代换法	546
5.7	核心考点 2——求二阶常系数线性微分方程的通解的方法	547
	一阶都会了, 二阶还会远吗!?	
5.7.1	求二阶常系数齐次线性微分方程的通解的方法	548
5.7.2	求二阶常系数非齐次线性微分方程的通解的方法	550
5.8	核心考点 3——求二阶变系数微分方程的通解的方法	555
	变就变, 怕什么! 万变不离其宗!	

5.9	核心考点 4——线性微分方程解的性质与结构	558
	解还有性质? 还有结构?	
第 6 章	第六次进攻——多元函数微分学	561
	一元函数都会了, 多元还会远吗?	
6.1	基础知识点 1——什么叫多元函数	562
	多元多元, 就是多个自变量!	
6.2	基础知识点 2——二元函数的极限计算方法	562
	二元函数的极限的计算方法与一元函数的极限的计算方法一样吗?	
6.3	基础知识点 3——二元函数的连续性	574
	极限值等于函数值, 就是连续!	
6.4	基础知识点 4——可偏导的定义	578
	可偏导和可导一样吗?	
6.4.1	函数在某一点处可偏导的定义	578
6.4.2	函数在某区间可偏导的定义	586
6.5	核心考点 1——利用公式求 $\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$	587
	求偏导这么简单, 你敢说你不会?	
6.5.1	当“ Δ ”是单一的字母时 $\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$ 的求法	588
6.5.2	当“ Δ ”不是单一的字母时 $\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$ 的求法	613
6.6	核心考点 2——分段函数求偏导	621
	不分段会, 分段你就不会了? 真是笑话!	
6.7	核心考点 3——抽象函数求偏导	632
	抽象函数求偏导, 有意思!	
6.8	核心考点 4——二元函数的极值、最值、条件极值	647
	这三种值都很特殊, 但求起来都很简单!	
6.8.1	二元函数的极值	647
6.8.2	二元函数的最值	651
6.8.3	条件极值	653
6.9	核心考点 5——求空间曲线的切线与法平面以及求曲面的法线与切平面	656
	曲线曲面, 切线法线!	
6.9.1	求空间曲线的切线与法平面	656

6.9.2 求曲面的法线与切平面	661
第7章 第七次进攻——二重积分	666
本章将为大家介绍二重积分的相关知识。	
7.1 基础知识点1——二重积分长什么样	667
二重积分是何方神圣?	
7.2 基础知识点2——当被积函数为1时二重积分的意义	668
被积函数是1?	
7.3 基础知识点3——二重积分的计算方法	672
二重积分应该怎样去计算呢?	
7.4 基础知识点4——二重积分的三条性质	714
掌握性质,便能快速解题!	
7.5 核心考点1——二重积分是一个数	721
什么?二重积分是一个数?	
7.6 核心考点2——求解被积函数中含绝对值的二重积分	723
含不含绝对值都一样简单!	
7.7 核心考点3——二重积分的对称性	738
对称性是自然界的一种奇妙现象!	
7.8 核心考点4——二重积分的轮换对称性	746
轮换对称!听起来多么霸气!	
7.9 核心考点5——“先 x 后 y 型”二重积分与“先 y 后 x 型”二重积分的 相互转化	749
随时注意转化的思想!	
7.10 核心考点6——计算二重积分时的小技巧	753
小技巧,大作用!	
7.11 核心考点7——均匀薄片的形心	755
形心?这和二重积分有什么关系?	
第8章 第八次进攻——三重积分	759
本章将为大家介绍三重积分的相关知识。	
8.1 基础知识点1——三重积分长什么样	760
三重积分是何方神圣?	
8.2 基础知识点2——当被积函数为1时三重积分的意义	761