时代云图
SHI DAI YUN TU

2020

张宇 高等数学 18讲

张宇 主编

高等教育出版社

时代云图
SHI DAI YUN TU

张宇
高等数学
18讲

张宇 主编

高等教育出版社·北京

主要内容

2020《张宇高等数学 18 讲》以教育部《大学数学课程教学基本要求》、教育部考试中心考研大纲为依据，诠释考研数学中高等数学(微积分)的全部知识。本书共分 18 讲，每讲主要由内容精讲、例题精解、习题精练三部分构成。全书共有例题 425 道，习题 201 道，适合考研复习和大学数学学习与提高之用。

复习建议

本书适用于考研和大学数学学习与复习的全过程。在研读本书过程中，读者应做到以下四点：一、坚持不懈，细水长流；二、不求初速，但求加速；三、独立思考，定期检验；四、吸取教训，善于总结。

图书在版编目(CIP)数据

张宇高等数学 18 讲 / 张宇主编．--北京：高等教育出版社，2019.1

ISBN 978-7-04-051102-4

Ⅰ.①张…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 004506 号

张宇高等数学 18 讲
ZHANGYU GAODENG SHUXUE 18 JIANG

策划编辑　朱丽娜　　责任编辑　雷旭波　　封面设计　张　楠　　责任印制　韩　刚

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	北京汇林印务有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×1092mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	26		
字　　数	649 千字	版　　次	2019 年 1 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　　次	2019 年 1 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	56.80 元

物 料 号　51102-00

Preface 前言

一、"活生生"地学,学得"活生生"的

你应该知道,我们即将开始讲授的高等数学(后面我更愿意用微积分来称呼这门课程),承载了一段无与伦比的科学史.在这段历史中,充满了精彩绝妙的思想,至高无上的荣耀,也留下了泽被后世的成果、令人扼腕的遗憾.

牛顿与莱布尼茨之争

你可能知道,牛顿和莱布尼茨因各自独立的开创性工作而并列成为了"微积分的创立者".可是,你可能不知道,为了这份荣誉,牛顿会长和他的英国皇家学会不断地打压势单力薄的莱布尼茨,最后让这个不论是在内容阐述还是符号记法上都比牛顿先进的天才,含恨而死.也许去世时的莱布尼茨已经绝望,他很可能以为微积分创立者的名号根本没有他的份儿了,可是,令人却给了他公道——不仅全世界学习微积分的人都知道他是微积分的独立创造者,就连著名的"牛顿-莱布尼茨公式",都是以他们两个人的名字命名的.也许,莱布尼茨和牛顿如果活着,根本不愿意今天的我们把他们俩的名字放在一起,不过那又怎样?微积分的学习者们都在认真地写着"由 N-L公式,得"这样的话语,足以让莱布尼茨欣慰并安息,也同样让大家明白,即使是功高盖世的绝对权威,也无法阻止历史沉淀后的事实与公正.

黎曼的终生遗憾

你可能知道,德国天才数学家黎曼创造了定积分,于是人们也把定积分称为"黎曼积分".可是,你可能不知道,就是这个 19 世纪无出其右的数学分析大师,到死都没有想明白到底一个函数不连续到什么程度依然是可积的.这个问题至关重要,因为这牵涉到他倾注全力的积分理论的完整性——函数可积的充要判别法.庆幸的是,这个事情由后人勒贝格解决了(勒贝格在测度论的基础上,完成了黎曼的"遗愿",全面解决了函数可积的问题,并将黎曼积分收入其"囊中",这就是勒贝格积分).

真实的洛必达

你可能知道,初学微积分的人,都会在求函数极限时见到一个叫作"洛必达法则"的重要工具.可是,你可能不知道,法国数学家洛必达其实是一个"高富帅",在 1694 年 7 月 22 日,他给老师约翰·伯努利写了一封信,在信中直言不讳,请老师把一个重要的研究成果(就是我们今天所称的"洛必达法则")卖给他,请老师开价.没想到,伯努利竟然欣然接受,主动拿着论文找到学生洛必达,一手交钱一手交货.从此以后,洛必达将这个法则冠以自己的名字.因为这个法则,洛必达声名大噪,而这个法则的真正创造者却被大多数人所遗忘.怪不得在洛必达死后,伯努利公开了这封信,告诉所有人,这个法则是他的.可是人们不再理他——为什么当初你为了蝇头小利,就卖了那个法则?

数学大师与他们的微积分

你可能知道，今天的教科书都说，微积分的创立者是牛顿和莱布尼茨.可是，正如牛顿的名言——“我之所以看得远，是因为我站在巨人的肩膀上”（此言并非牛顿谦虚，他说的是实话）——所说的那样，微积分里的巨人还有很多：伯努利家族、黎曼、费马、柯西、拉格朗日、欧拉、维尔斯特拉斯、阿贝尔、洛必达、勒贝格、贝尔，等等.这里面的人，也许有你非常熟悉的，也许有你听说过的，当然也有你闻所未闻的.不管怎样，他们都在人类的科学史上留下了名字，更重要的是，他们给生活在当今世界上的我们，留下了宝贵的财富——不仅是丰富的物质和发达的科技，更是无价的思想.

知识和历史都是活生生的人创造的，学习这门课程，就要学习知识、学习历史，而且要“**活生生**”地学，学得“**活生生**”的.

二、洛必达与泰勒之争

前面那些话是我在讲故事给读者听吗？好像很轻松.可是下面我要说的话，着实不那么让人舒服.大部分微积分的初学者，都不会接触到她丰富多彩的历史和思想，而是直入“主题”——定义、公式、定理、例题、习题……好像这些才是微积分的核心.就是这种直入主题的“功利性”，把充满求知欲的初学者拒之门外，即使他们努力“挤”了进来，“残酷”的微积分也会把他们弄得遍体鳞伤，让他们得出“珍爱生命，远离微积分”的让人苦笑的结论.也许我们真的忘了“兴趣是最好的老师”这个真理，越挫越勇的意志品质，是要有兴趣做后盾的，不是吗？

我不想说“是时候该我们做些什么了”，我本来就在努力去做，而且这并不特别，更不伟大，做一件本就该做的事，太平常不过了.

我在各种场合不遗余力地宣传**数学的文化、思想和过程性**对于学习和教授数学的重要性.下面是我写的一个数学普及讲座的稿子.我的学生给这个讲座起了个名字，叫做“洛必达与泰勒之争”，我觉得这个名字不错，就借用下吧.我坚信，你能够从我对这个问题的详细分析中悟出一些道理.

请读者认真跟着我看一道典型的数学题目，这是一道硕士研究生招生考试试题.

例 1 已知当 $x\to 0$ 时，$f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则（ ）.

(A) $k=1,c=4$ (B) $k=1,c=-4$ (C) $k=3,c=4$ (D) $k=3,c=-4$

不管你是否已经忘记了函数极限计算的方法，请先浏览一下此题的解答.该题若用洛必达法则，则求解如下：

由题意，有
$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=1,$$

则
$$\text{原式}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{ckx^{k-1}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{-3\sin x+9\sin 3x}{ck(k-1)x^{k-2}}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{-3\cos x+27\cos 3x}{ck(k-1)(k-2)x^{k-3}}=\lim_{x\to 0}\frac{24}{ck(k-1)(k-2)x^{k-3}}=1,$$

于是 $k=3,c=4$，答案选择(C).

细数一下，我们用了三次洛必达法则才得出了答案.做完这个题，是不是就可以说完成任务了呢？远远不够.且再看一题：

例 2 已知当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（ ）.

(A) $a=1,b=-\frac{1}{6}$ (B) $a=1,b=\frac{1}{6}$ (C) $a=-1,b=-\frac{1}{6}$ (D) $a=-1,b=\frac{1}{6}$

请读者对比看，这两个题目何其相似！我们能不能从这两个几乎一样的题目中去寻找数学题目背后的“规律”呢？请注意下面的分析思路.

第一件事情.读者在本科一年级学习高等数学(微积分)时,都知道一个“耳熟能详”的结论:“做乘除运算时可用等价无穷小代换,而做加减运算时则不能用等价无穷小代换.”

例如,当 $x\to 0$ 时,$x\sim\sin x$,故

$$x\cdot\sin x\sim x\cdot x=x^2,$$

完全正确;

但当 $x\to 0$ 时,$x\sim\sin x$,

$$x-\sin x\sim x-x=0,$$

却是错误的!

如果你回想起并确认了这个结论,那么,接下来的第二件事情则顺理成章.请读者想想,是“加减法”的极限难算,还是“乘除法”的极限难算?当然是“加减法”!也就是说,不管谁出数学题,“$A\cdot B$”或者“A/B”型的极限计算一般都难不倒你,因为可以用“等价无穷小代换”,但是“$A\pm B$”型的极限计算,则一般都比较棘手,因为这时候无法直接用“等价无穷小代换”这个强有力的工具了.

于是,第三件事情出现了.看看上面两个极其类似的例题,恰恰反映出一个“不以人的意志为转移的规律”,那就是,数学的命题人非常喜欢出“$A\pm B$”型这种棘手的极限计算题来为难你.

规律被我们分析出来后,接下来就是要解决这个问题.如何应对呢?真正的好办法是用泰勒公式!别怕,别怕,也许有人看到“泰勒公式”(我称其为“太累公式”,为什么这么称呼?因为大家都觉得这个知识记起来太累,用起来也太累)就头疼,事实上,泰勒公式很亲切,关键是我们怎样把它学到手,来试试看.

首先,请你帮我记住下面这个式子:

当 $x\to 0$ 时,$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$,注意,只记此式,不记规律,不记其他,则

$$x-\sin x=\frac{1}{6}x^3+o(x^3).$$

注意:$o(x^3)$是一个记号,所以它的前面写加号即可.

于是,当 $x\to 0$ 时,$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$,看到了吗,我们把“$A\pm B$”型的极限做了整体替换!接着,将其广义化,得:

$$狗-\sin 狗\sim\frac{1}{6}(狗)^3\ (狗\to 0).$$

莫笑,莫笑,这个表达式极其重要,且只有这个公式中四个位置的“狗”“长得一模一样”时才能成立.作为命题人,“狗$-\sin$狗”中的两个“狗”,必须相等时才好出题,于是便有了如下对例2的“高级”解法:

由题意,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=1$,则 $x-\sin ax$ 中的 x 与 ax 必须相等!所以立即得到 $a=1$,于是 $x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$,$x^2\ln(1-bx)\sim -bx^3$,故 $b=-\frac{1}{6}$,这是选择题,搞定!

再看例1,你知道该怎么做了么?你能否立即看出 $k=3$ 呢?(详细答案请看后面的相关内容,最好自己先做做看.)

以上的分析至少给了我们两个重要启发.

(1)数学题是有规律可循的,且这种规律“不以人的意志为转移”,抓住这种规律,你就找到了学习数学的方向.

(2)数学题既有“基础性”的解法(比如上面的洛必达法则),也有“技术性”的解法(比如上面的泰勒公式).在把握“基础性”解法的条件下,掌握“技术性”解法,才能够技压群雄,稳操胜券.

进一步地,我以“用洛必达法则求函数的极限”为例,把读者在数学学习过程中对一个知识掌握的程度分成三种境界.

第一种境界,叫**“朦胧地感知”**,感知(feeling)往往是指当你学习到一个概念、公式或者结论时,只是形式上知道或者了解它而已.比如,你了解到的洛必达法则——在某种函数极限计算中,有一种方法,形式上是$\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f'(x)}{F'(x)}$.也就是可以通过分子分母同时求导去解决,仅此而已.举个例子,

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{e^x+\sin x}{1}=1,$$

这就解决问题了.

第二种境界,叫**“清晰地再现”**,再现(reappearance)的前提是忠实于事实本身,不可以有任何的偏差和走样.我们至少要达到这种境界,才有可能达到合格的水平.继续研究洛必达法则,看个例子,如何计算$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}$?如果我们只知道通过分子分母同时求导去解决,则

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{1}.$$

右边这个极限是不存在的,所以得出结论$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}$不存在.这显然是错误的,因为事实上,根据“无穷小量与有界量的积是无穷小量”,知

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0,$$

极限是存在的.

我们看到,如果使用洛必达法则,算出来是极限不存在;而事实上极限是存在的,怎么会出现矛盾呢?

问题的关键是,对于上面这个极限,$\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f'(x)}{F'(x)}$这个公式不能用!因为:如果$\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f'(x)}{F'(x)}$不存在也不为$\infty$,是不能推出$\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{F(x)}$不存在也不为$\infty$的.简单一点说就是,对于$\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f'(x)}{F'(x)}$,“右存在,则左存在;但左存在,并不意味着右一定存在”.这是一个很细致、很隐蔽的问题,稍不注意就可能出错(天才数学家柯西可以帮助我们更好地理解并记住这个问题,有兴趣的话,就好好研读本书中的内容吧).

看懂了这一段话,我们引入一个更为重要的问题,请回看本前言最开始例1的解法:

由$\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=1$,则

$$\text{原式}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{ckx^{k-1}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\cdots$$

这里"=1"是没有依据的，你看出来了吗？

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{24}{ck(k-1)(k-2)x^{k-3}}=1.$$

于是，我们可以明确指出，虽然答案是对的，但是这个解法是站不住脚的.

第三种境界，叫"**灵活地融通**"，融通(communicating and grasping thoroughly)，就是能够将各个方面的知识融会贯通，做好知识的串联和总结，形成一种强大的解题能力.这才是学习数学的高境界.

根据上面的分析，我们看出，洛必达法则并不一定是求解函数极限最好的办法，尤其对于含有未知参数或者抽象函数这样的研究对象(因为你不知道求导之后极限是否会存在).事实上，我们在复习完函数极限计算后，应该形成一个好的思路：对于"$A\pm B$"型的函数极限计算，首选方法——泰勒公式！

根据前面的分析，当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3),\quad \sin 3x=3x-\frac{1}{6}(3x)^3+o(x^3),$$

于是

$$3\sin x-\sin 3x=\left[3x-3\cdot\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]-\left[3x-\frac{1}{6}(3x)^3+o(x^3)\right]=4x^3+o(x^3),$$

则

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3+o(x^3)}{cx^k}=1,$$

立即可得 $k=3,c=4$.

对比洛必达法则来看，泰勒公式完胜！

请读者一定要比照自己，"对号入座"，在今后的学习中，时刻想到我们在这里归纳的三种境界，从而检验自己对知识的掌握程度.

三、关于本书

这本著作是在我多年讲授高等数学(微积分)课程和考研数学辅导课程的讲稿基础上修改、扩充、完善而来的.

最初，讲稿编成了上课的讲义，发给学生使用；后来，讲义经过整理，在北京理工大学出版社出版了《考研数学命题人高等数学考试参考书》，又在西安交通大学出版社出版了《高等数学辅导讲义》；再后来，我又参与了同济大学《高等数学(第六版)》的《习题解答与考研指导》的编写并任主编，担任高等教育出版社《考研数学大纲解析》高等数学部分的编写人、全书统稿人，以及主审了高等教育出版社的《考研数学历年真题解析》，并在北京理工大学出版社出版了《张宇高等数学18讲》.这些工作对于本书的形成具有重要意义.

现在，在高等教育出版社的大力支持下，我将此书做了全面的修订，供考研究生的读者和有志于提高高等数学学习水平的读者们参考.

本书分为18讲，每一讲由"内容精讲""例题精解""习题精练"三部分组成，所有习题都配有详细解答过程，供读者参考.

"内容精讲"全面准确地阐述了本科《大学数学课程教学基本要求》和考研《数学考试大纲》中高等数学所有知识点的内涵和外延，读者一定要认真研读，并在做题后温故知新.

"例题精解"通过精心挑选或者命制的例题，让读者深化对数学知识的理解，并把它们内化

成自己的解题能力，这部分内容建议读者反复练习，达到炉火纯青的地步.

“习题精练”给读者留下了作业，独立完成这些优秀的试题，既检验自己的学习成果，又培养自己独立做题的能力，且能够查漏补缺、增长见识.

如何使用好本书并做好数学的学习和复习呢？我提四点建议.

1. 坚持不懈，细水长流

老一辈的京剧表演艺术家常讲：“一天不练功，只有我知道；三天不练功，同行也知道；一月不练功，观众全知道.”复习数学，我们建议读者也一定要这样，捧着这本书，每天都要看内容，每天都要做题目，坚持不懈，细水长流，便可水到渠成.

2. 不求初速，但求加速

一开始读数学书，总会吃力一些，遇到的困难多一些，这很正常，我们不要畏难，应该扎扎实实地把每一处不懂的地方弄懂，把每一个难点攻克，这样，开始复习的速度就会慢一些. 但是，只要能够坚持，复习了一定的内容之后，你便会发现，复习速度不断提高，理解能力和解题能力都会显著增强. 这符合数学学习的规律，请读者把握.

3. 独立思考，定期检验

复习一个知识，先要读基本的概念、定理和公式，然后看例题，再去做习题. 只有通过做题，才能知道自己是否真正掌握了这个知识. 一定不要翻着答案做题，稍有不会就看答案，这样效果不好. 读者先不要看答案，自己独立地去做，调动起自己所有的知识储备，看能不能做出来，做出来了，自然很好，即使做不出，时间也没有白费，其他的知识在你脑子里过了一遍，也是一种复习. 只是要注意，如果全力以赴也未做出题目，看完答案后要好好总结经验. 在复习完一节、一章和整个课程的不同阶段，都要定期地通过做题来检验自己的复习水平和效果.

4. 吸取教训，善于总结

人没有不犯错误的，尤其在学习数学的过程中，做错题，不会做题，是再平常不过的了. 人们常说“失败是成功之母”，就是这个意思. 我们常告诉学生：如果一位复习备考的学生遇到不会的题、做错的题，可能会有两种态度，一种态度是消极的，题目不会做，心情不好，自暴自弃，复习效率大打折扣；另一种态度是积极的，题目做不出，正是找到了自己复习的薄弱环节，找到了自己的不足之处，正是遇到了自己提高、进步的机会. 我们当然支持后面这种态度，这才是正确的态度. 所以，希望在考研复习的过程中，读者准备一个笔记本，通过不会做或者做错的题目，认真分析到底问题出在哪里，哪些知识还复习不到位，吸取教训，多做总结，这样的笔记日积月累，对提高你的数学水平，是有极大帮助的.

我无意用“水平有限”来作为遁词，诚心接受读者和同行专家的批评指正.

张宇

2018 年 12 月　于北京

Contents 目 录

第 1 讲 高等数学常用基础知识 …… 1
内容精讲 …… 1
一、函数的概念 …… 1
二、函数的四种特性 …… 8
三、常用基础知识 …… 9
例题精解 …… 14
习题精练 …… 17

第 2 讲 极限与连续 …… 21
内容精讲 …… 22
一、数列极限的概念、性质与定理 …… 22
二、函数极限的概念、性质与定理 …… 26
三、函数的连续与间断 …… 31
例题精解 …… 32
习题精练 …… 52

第 3 讲 一元函数微分学的概念与计算 …… 57
内容精讲 …… 57
一、导数与微分的概念 …… 57
二、导数与微分的计算 …… 62
例题精解 …… 66
习题精练 …… 77

第 4 讲 一元函数微分学的几何应用 …… 81
内容精讲 …… 81
一、极值与最值 …… 81
二、单调性与极值的判别 …… 83
三、凹凸性与拐点的概念 …… 83
四、凹凸性与拐点的判别 …… 84
五、渐近线 …… 85
六、最值或者取值范围问题 …… 85
七、作函数图形 …… 86
例题精解 …… 86
习题精练 …… 91

第 5 讲 中值定理 …… 95

内容精讲 …… 95

例题精解 …… 97

习题精练 …… 107

第 6 讲 零点问题、微分不等式 …… 110

内容精讲 …… 110

一、零点问题 …… 110

二、微分不等式 …… 111

例题精解 …… 115

习题精练 …… 120

第 7 讲 一元函数积分学的概念与计算 …… 122

内容精讲 …… 122

一、不定积分、定积分、变限积分与反常积分的概念 …… 122

二、一元函数积分的计算 …… 127

例题精解 …… 131

习题精练 …… 157

第 8 讲 一元函数积分学的几何应用 …… 163

内容精讲 …… 163

例题精解 …… 164

习题精练 …… 167

第 9 讲 积分等式与积分不等式 …… 172

内容精讲 …… 172

例题精解 …… 172

习题精练 …… 179

第 10 讲 多元函数微分学 …… 183

内容精讲 …… 183

一、多元函数微分学的基本概念 …… 183

二、多元函数微分法则 …… 187

三、多元函数的极值与最值问题的理论 …… 189

例题精解 …… 191

习题精练 …… 200

第 11 讲 二重积分 …… 207

内容精讲 …… 207

一、二重积分的概念、性质与对称性 …… 207

二、二重积分的计算 …… 211

例题精解 …… 212
习题精练 …… 223

第 12 讲 常微分方程 …… 226

内容精讲 …… 226
一、微分方程的概念 …… 226
二、一阶微分方程的求解 …… 227
三、二阶可降阶微分方程的求解 …… 229
四、高阶线性微分方程的求解 …… 229
例题精解 …… 231
习题精练 …… 237

第 13 讲 无穷级数(仅数学一、数学三要求) …… 241

内容精讲 …… 242
一、常数项级数的概念与性质 …… 242
二、级数敛散性的判别方法 …… 244
三、阿贝尔定理与幂级数的收敛域 …… 249
四、幂级数求和函数 …… 251
五、函数展开成幂级数 …… 253
例题精解 …… 254
习题精练 …… 271

第 14 讲 数学一、数学二专题内容 …… 277

内容精讲 …… 277
一、一元函数微分学的物理应用 …… 277
二、相关变化率 …… 278
三、一元函数微分学的几何应用 …… 278
四、一元函数积分学的物理应用 …… 278
五、一元函数积分学的几何应用 …… 279
六、微分方程的物理应用 …… 280
七、欧拉方程(仅数学一要求) …… 280
八、傅里叶级数(仅数学一要求) …… 281
例题精解 …… 289
习题精练 …… 299

第 15 讲 数学三专题内容 …… 305

内容精讲 …… 305
一、复利与连续复利 …… 305
二、导数的经济意义 …… 305
三、一阶常系数线性差分方程 …… 307
例题精解 …… 309
习题精练 …… 316

第 16 讲 多元函数积分学的基础知识(仅数学一要求) …… 320

内容精讲 …… 320
一、向量代数 …… 320
二、空间平面与直线 …… 321
三、空间曲线与曲面 …… 324
四、多元函数微分学的几何应用 …… 326
五、方向导数与梯度 …… 328
例题精解 …… 329
习题精练 …… 337

第 17 讲 三重积分、第一型曲线曲面积分(仅数学一要求) …… 341

内容精讲 …… 341
一、三重积分的概念、性质与对称性 …… 341
二、三重积分的计算 …… 343
三、第一型曲线积分的概念、性质与对称性 …… 348
四、第一型曲线积分的计算 …… 349
五、第一型曲面积分的概念、性质与对称性 …… 350
六、第一型曲面积分的计算 …… 351
七、重积分与第一型线面积分的应用 …… 352
例题精解 …… 355
习题精练 …… 363

第 18 讲 第二型曲线曲面积分(仅数学一要求) …… 370

内容精讲 …… 370
一、第二型曲线积分的概念、性质与对称性 …… 370
二、平面第二型曲线积分的计算 …… 371
三、第二型曲面积分的概念、性质与对称性 …… 374
四、第二型曲面积分的计算 …… 375
五、空间第二型曲线积分的计算 …… 379
六、散度与旋度的计算 …… 379
例题精解 …… 380
习题精练 …… 386

附录Ⅰ:几种常用的曲线 …… 390

附录Ⅱ:几种常用的曲面 …… 396

参考文献 …… 401

第1讲

高等数学常用基础知识

考试要求	科目	考试内容
了解	数学一	函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 反函数及隐函数的概念　初等函数的概念
	数学二	
	数学三	
理解	数学一	函数的概念　复合函数及分段函数的概念
	数学二	
	数学三	
会	数学一	建立应用问题的函数关系
	数学二	
	数学三	
掌握	数学一	函数的表示法　基本初等函数的性质及其图形
	数学二	
	数学三	

内容精讲

一、函数的概念

1. 一个有趣的例子

大多数读者是从中学开始接触函数概念的. 事实上，人们所谈及的万事万物，都有着直接或者间接的因果联系，比如你可以把貌似没有关系的两个事物放在一起思考：**女生的心情好坏和男生钱包的厚度**. 假如女生的心情不好，男生钱包的厚度就要减小，显然是因为男生要花钱去哄女孩开心；倘若女生的心情大好，男生钱包的厚度依然要减小（甚至钱包厚度的变化率更大），恐怕是因为女生开心时更爱购物吧. 如果你在生活中是一个“理性”的有心人，善于观察，勤于思考，你会建立很多有趣的函数关系，你会发现生活的乐趣，你更会看到函数不是一个冷冰冰的数学概念，它就藏在人们真实而丰满的现实生活中，而且无处不在. 我们说，**当一件事情的变化会引起另一件事情的变化时，便称这两件事情构成了一个函数关系，两件事情之间如何相互影响，就是一个对应法则**.

2. 函数的概念

设 x 与 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，若对于每个值 $x\in D$，按照一定的法则，有一个确定的值 y 与之对应，则称 y 为 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 称 x 为**自变量**，y 为**因变量**. 称数集 D 为此函数的**定义域**，定义域一般由实际背景中变量的具体意义或者函数对应法则的要求确定. 比如你可以把上述例子数量化：女生的心情指数作为自变量，记为 x，并设定其范围为$[1,10]$，规定 $1\leqslant x<4$ 表示心情很不好，$4\leqslant x\leqslant 7$ 表示心情一般，$7<x\leqslant 10$ 表示心情很好. 称相应的函数值的全体 $R=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 为函数的**值域**，比如男生钱包的厚度可以记为 y，作为因变量. 如果问这个 y 的取值范围，抽象来说，为$[0,+\infty)$（虽然事实上不可能是$+\infty$，但这种数学抽象未尝不可，同时这种数学抽象也会给讨论问题带来方便）. 称 f 为**对应法则**，对于上述这个例子，女生心情好坏与男生花多少钱之间如何相互"作用"、相互"影响"，这确实复杂了，其原因至少有如下两个：第一，男生的经济条件怎样；第二，男生和女生的感情基础如何. 前者是客观的，后者是主观的. 在高等数学这门课程里说不清、也不要求读者懂得如何建立这种对应法则，这涉及数学建模的专门知识，读者若感兴趣，可研习相关知识，另做研究.

3. 反函数的概念

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 R. 如果对于每一个 $y\in R$，必存在 $x\in D$ 使得$y=f(x)$成立，则由此定义了一个新的函数 $x=\varphi(y)$. 这个函数就称为函数 $y=f(x)$的**反函数**，一般记作$x=f^{-1}(y)$，它的定义域为 R，值域为 D. 相对于反函数来说，原来的函数也称为**直接函数**. 以下两点需要说明.

第一，直接函数的单值性无法保证其反函数的单值性. 比如直接函数 $y=x^2$ 的反函数是多值函数 $x=\pm\sqrt{y}$，但如果直接函数是单值单调函数，就能保证反函数的单值性了，比如函数 $y=x^2(x\in[0,+\infty))$ 是单值单调函数，故它有反函数 $x=\sqrt{y}$.

第二，若把 $x=f^{-1}(y)$与 $y=f(x)$的图形画在同一坐标系中，则它们完全重合. 只有把 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$写成 $y=f^{-1}(x)$后，它们的图形才关于 $y=x$ 对称，事实上这也是字母 x 与 y 互换的结果.

注例 求证 $y=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$的反函数是 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

证明 由 $y=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$得到关于 x 的方程 $\mathrm{e}^{2x}-2y\mathrm{e}^x-1=0$，解出

$$\mathrm{e}^x=y+\sqrt{y^2+1}>0,$$

得

$$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}),$$

所以 $y=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$的反函数是 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，定义域是 $\mathbf{R}$.

4. 复合函数的概念

设 $y=f(u)$的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$在 D 上有定义，且 $g(D)\subset D_1$，则由

$$y=f[g(x)](x\in D)$$

确定的函数，称为由函数 $u=g(x)$和函数 $y=f(u)$构成的**复合函数**，它的定义域为 D，u 称为**中间变量**. 对于复合函数，重要的是熟练掌握分解与复合的技巧，这是考研的一个重要考点. 后面结合实际的例子详述.

5. 基本初等函数

以下 5 类函数称为基本初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

(1)幂函数

①$y=x^{\mu}$（μ 是实数）.

②$y=x^{\mu}$ 的定义域和值域取决于 μ 的值. 当 $x>0$ 时，$y=x^{\mu}$ 都有定义.

③常用的幂函数(如图 1-1(a)—(c)).

$$y=x,\quad y=x^2,\quad y=\sqrt{x},\quad y=x^3,\quad y=\sqrt[3]{x},\quad y=\frac{1}{x}.$$

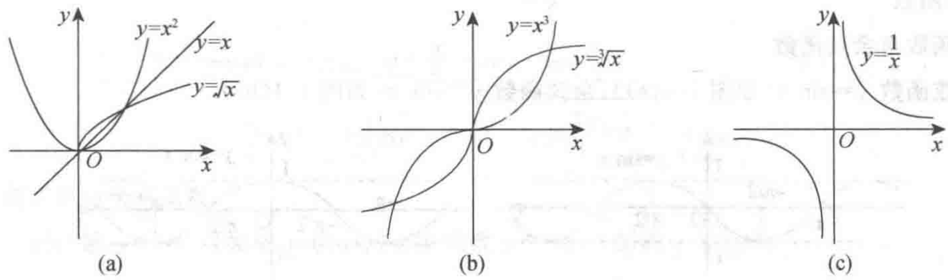

图 1-1

(2)指数函数

①$y=a^x(a>0,a\neq1)$(如图 1-2(a)).

②定义域:$(-\infty,+\infty)$.值域:$(0,+\infty)$.

③单调性:当 $a>1$ 时,$y=a^x$ 单调增加;当 $0<a<1$ 时,$y=a^x$ 单调减少.

④常用的指数函数:$y=e^x$(如图 1-2(b)).

⑤极限:$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

⑥特殊函数值:$a^0=1$,$e^0=1$.

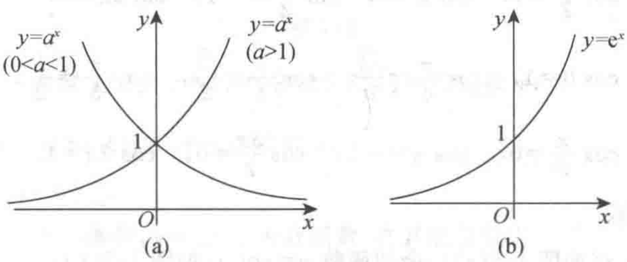

图 1-2

(3)对数函数

①$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$(如图 1-3(a))是 $y=a^x$ 的反函数.

②定义域:$(0,+\infty)$.值域:$(-\infty,+\infty)$.

③单调性:当 $a>1$ 时,$y=\log_a x$ 单调增加;当 $0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 单调减少.

④常用的对数函数:$y=\ln x$(自然对数:$\ln x=\log_e x$,$e=2.71828\cdots$)(如图 1-3(b)).

⑤特殊函数值:$\log_a 1=0$,$\log_a a=1$,$\ln 1=0$,$\ln e=1$.

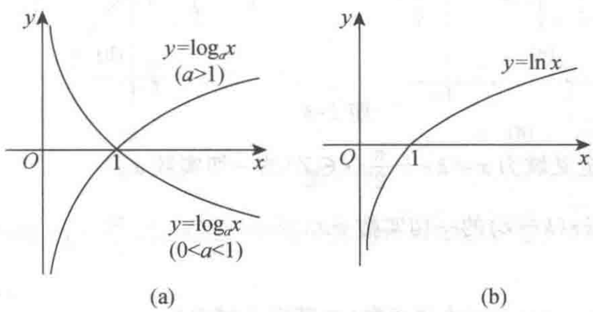

图 1-3

⑥极限：$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

⑦常用公式：$x=e^{\ln x}$，$u^v=e^{\ln u^v}=e^{v\ln u}(x>0,u>0)$.

(4)三角函数

①正弦函数与余弦函数.

(ⅰ)正弦函数 $y=\sin x$(如图 1-4(a))，余弦函数 $y=\cos x$(如图 1-4(b)).

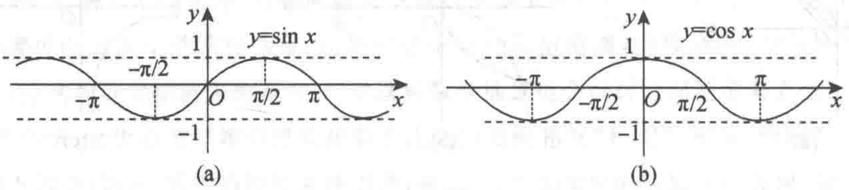

图 1-4

(ⅱ)定义域：$(-\infty,+\infty)$. 值域：$[-1,1]$.

(ⅲ)奇偶性：$y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数，$x\in(-\infty,+\infty)$.

(ⅳ)周期性：$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 均以 2π 为最小正周期，$x\in(-\infty,+\infty)$.

(ⅴ)有界性：$|\sin x|\leqslant1$，$|\cos x|\leqslant1$.

(ⅵ)特殊函数值： $\sin 0=0$，$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\sin\frac{\pi}{2}=1$，$\sin\pi=0$，$\sin\frac{3\pi}{2}=-1$，$\sin 2\pi=0$，

$\cos 0=1$，$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，

$\cos\frac{\pi}{2}=0$，$\cos\pi=-1$，$\cos\frac{3\pi}{2}=0$，$\cos 2\pi=1$.

②正切函数与余切函数.

(ⅰ)正切函数 $y=\tan x$(如图 1-5(a))，余切函数 $y=\cot x$(如图 1-5(b)).

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\tan x}.$$

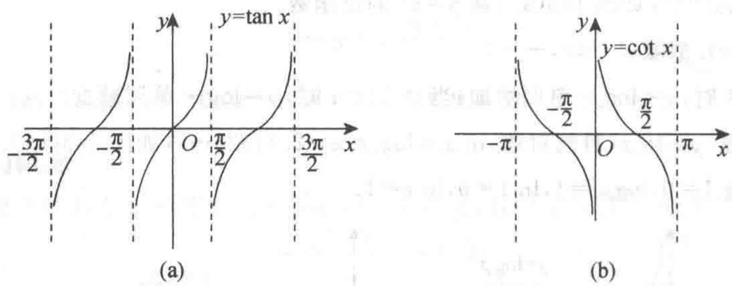

图 1-5

(ⅱ)定义域：$y=\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$的一切实数 x；

$y=\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$的一切实数 x.

值域：$(-\infty,+\infty)$.

(ⅲ)奇偶性：$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 均为奇函数(在其定义域内).

(ⅳ)周期性：$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 均以 π 为最小正周期(在其定义域内).