Japan's (Primary) Hironaka Heisuke Cup Maths Competition Test Questions and Answers from the First to the Last (Volume 1)

日本历届(初级)广中杯
数学竞赛试题及解答

第1卷

(2000～2007)

甘志国　编著

$\sum_{1}^{5} k^5 x_k = a^3$

$\sum_{1}^{5} k^3 x_k = a^2$

$\sum_{1}^{5} k x_k = a$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图片来源：《Area城》

刘培杰 数学工作室

中学生数学竞赛试题系列

- 历届美国数学奥林匹克试题集：多解推广加强
- 历届美国数学邀请赛试题集
- 保加利亚数学奥林匹克
- 历届加拿大数学奥林匹克试题集
- 历届巴尔干数学奥林匹克试题集
- 历届波兰数学奥林匹克试题集
- 历届美国中学生数学竞赛试题及解答
- 全国高中数学联赛试题及解答
- 圣彼得堡数学竞赛试题集
- 数学奥林匹克问题集
- 360 个数学竞赛问题
- 历届 IMO 试题集
- 历届 CMO 试题集
- 匈牙利奥林匹克数学竞赛题解
- 日本历届（初级）广中杯数学竞赛试题及解答

培杰数学国际文化传播中心
www.impj.cn
刘培杰数学工作室网站
http://lpj.hit.edu.cn

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　刘春雷
封面设计　孙茵艾

哈尔滨工业大学出版社　**刘培杰数学工作室**
联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街10号
邮　　编：150006
联系电话：0451-86281378　13904613167
E-mail：lpj1378@163.com
微　　信：impjpp

上架建议：数学竞赛

ISBN 978-7-5603-6016-4
9 78
定

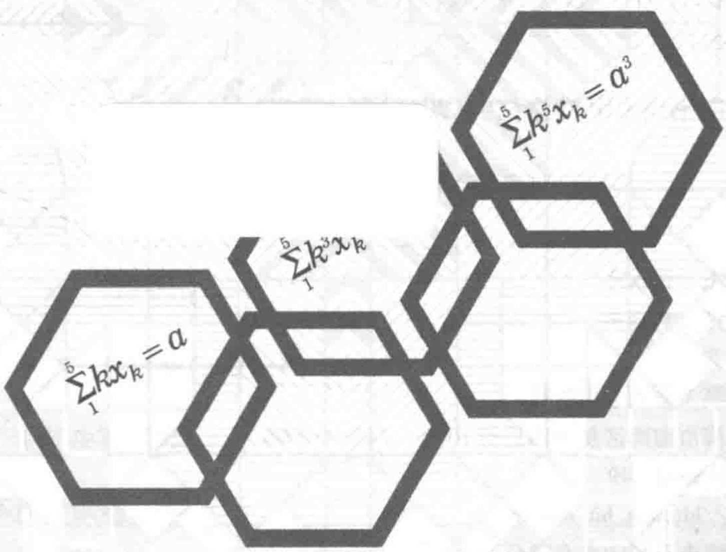
Japan's (Primary) Hironaka Heisuke Cup Maths Competition Test Questions and Answers from the First to the Last (Volume 1)

日本历届(初级)广中杯
数学竞赛试题及解答

第1卷

(2000～2007)

● 甘志国 编著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

日本广中杯数学竞赛(包括预赛和决赛,自2000年开始,每年一届)及日本初级广中杯数学竞赛(包括预赛和决赛,自2004年开始,每年一届)都是日本较高级别的初中数学竞赛,难度很大(即使对高中生来说,难度也不小).

本书汇集了第1届至第8届(2000~2007年)日本广中杯数学竞赛试题及解答和第1届至第4届(2004~2007年)日本初级广中杯数学竞赛试题及解答,解答过程均由作者给出,力求详尽.

本书适合于初中生、高中生备战各类数学竞赛时使用,也可供广大数学爱好者选用.

图书在版编目(CIP)数据

日本历届(初级)广中杯数学竞赛试题及解答.第1卷,2000~2007/甘志国编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.5

ISBN 978-7-5603-6016-4

Ⅰ.①日… Ⅱ.①甘… Ⅲ.①中学数学课-题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第102774号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘春雷
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张9.5 字数150千字
版 次 2016年5月第1版 2016年5月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-6016-4
定 价 28.00元

目 录 | Contest

日本第 1 届广中杯预赛试题(2000 年)

Ⅰ. 如图 1 所示,在 $\triangle ABC$ 中,点 D,E 是 $\angle B$ 和 $\angle C$ 对应的三等分线的两个交点. 当 $\angle A=60°$时,请求出 $\angle BDE$ 的度数.

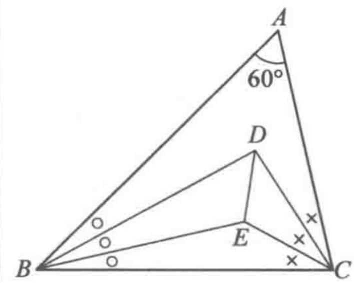


图 1

Ⅱ. 记 $M=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1\ 999}+\sqrt{2\ 000}}$, $N=1-2+3-4+5-6+\cdots+1\ 999-2\ 000$. 请求出$\frac{N}{(M+1)^2}$的值.

Ⅲ. 平太在黑板上依次写出了从 1 到 n 的自然数. 大郎从中擦去一个数,平太计算剩余的$(n-1)$个数的平均数,结果为$\frac{590}{17}$. 请求出大郎擦去的那个数.

Ⅳ. 在如图 2 所示的 3×3 的方格表中填入 9 个不同的自然数,使得每行、每列、每条对角线的 3 个数的乘积都相等,形成一个"乘法幻方".

在所有这样的"乘法幻方"中,请将使得这个相等的乘积最小的 9 个数填入方格中.

图 2

Ⅴ. 把 2^4 的计算结果的位数与 5^4 的计算结果的位数之和记作 $2^4\blacklozenge5^4$:因为 $2^4=16$,$5^4=625$,所以 $2^4\blacklozenge5^4=2+3=5$. 根据此定义,请求出 $2^{2\ 000}\blacklozenge5^{2\ 000}$的值.

注 本题应添加条件 $\lg 2=0.301\ 0\cdots$.

Ⅵ. 将一些棱长为 1 cm 的小正方体粘成一个棱长为 n cm 的大正方体,其体积是四位数(单位为 cm^3).

把其最外一层的小正方体全部拿走,用这些拿走的小正方体恰好可以组成一个长方体,其长、宽、高是互不相同的质数.

继续反复进行"把其最外一层的小正方体全部拿走"的操作,发现第三次拿走的所有小正方体恰好也可以组成一个长方体,其长、宽、高是互不相同的质数.

请求出原来的大正方体的棱长 n 的所有可能取值.

Ⅶ. 有很多边长为 1 cm 的正三角形和正方形,用它们组成一个没有空隙的尽可能小的凸 11 边形(也就是没有任何一个角是凹进去的 11 边形),请回答下面的问题:

(i)请求出该凸11边形的周长;

(ii)请求出组成该凸11边形的正三角形和正方形的数目.

Ⅷ.如图3所示,在四边形 $ABCD$ 的四条边上分别选取点 E,F,G,H,使得 $\frac{AE}{BE}=\frac{CF}{BF}=\frac{CG}{DG}=\frac{AH}{DH}$. 请证明:$S_{\text{四边形}KLMN}=S_{\triangle AEK}+S_{\triangle BFL}+S_{\triangle CGM}+S_{\triangle DHN}$.

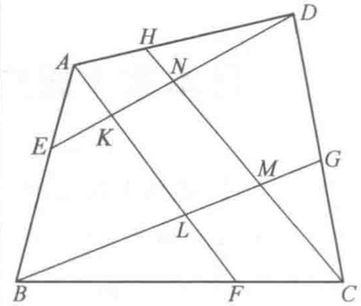


图3

日本第 1 届广中杯决赛试题(2000 年)

Ⅰ. 当直线 $(3a+2)x-(a-1)y-1=0$ 不通过第二象限(即坐标平面上 $x<0,y>0$ 的部分)时,请求出 a 的取值范围.

Ⅱ. 用 $|a|$ 表示 a 的绝对值:当 $a\geqslant 0$ 时,$|a|=a$;当 $a<0$ 时,$|a|=-a$. 请求出方程 $|2|2|2x-1|-1|-1|=x^2$ 在 $0<x<1$ 的范围内解的个数.

Ⅲ. 请证明下面的等式成立

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+1\,998^2+1\,999^2+2\,000^2$$
$$=2\,000\times 1+1\,999\times 3+1\,998\times 5+\cdots+3\times 3\,995+2\times 3\,997+1\times 3\,999$$

证明不需要非常严密,除了用算式推导外,还可以用图.

Ⅳ. 如图 1 所示,有一块边长为 15 的正六边形木板和足够多的半径为 1 的圆形木板. 把正六边形木板放在桌子上,并按照下列规则在它周围放上一些圆形木板:

(1)木板之间不能重叠;

(2)每块圆形木板都必须和正六边形木板接触于一点(可以是正六边形的顶点);

(3)相邻的两块圆形木板可以接触也可以不接触.

请问此时最多可以放多少块圆形木板?

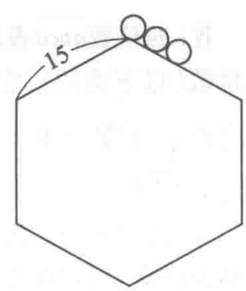


图 1

Ⅴ. 如图 2 所示,一些大小各不相同的正方体堆成塔状. 上面的正方体的底面的各个顶点分别在下面的正方体的上表面的各边的中点处.

按照这样的方式,当正方体的个数增加时,塔的总表面积(不包括最底层正方体下底面的面积)趋近于某个数. 已知最下层那个正方体的棱长为 1,请求出趋近的那个数(已知它是一个整数).

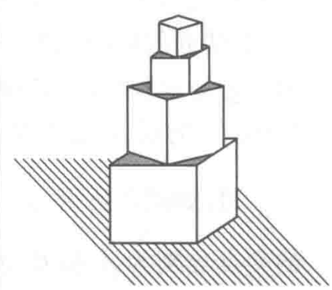


图 2

Ⅵ. 如图 3 所示,$\triangle OBC$ 和 $\triangle ODA$ 是正三角形,$AD\,/\!/\,BC$. 在线段 OA,OB,CD 上分别取点 S,P,Q,使得 $\dfrac{SA}{OS}=\dfrac{PO}{BP}=\dfrac{QD}{CQ}$. 请证明:$\triangle PQS$ 为正三角形.

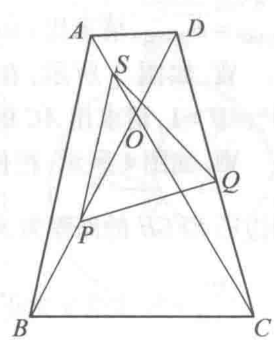


图 3

日本第2届广中杯预赛试题(2001年)

Ⅰ. 请比较(a)~(d)四个数的大小,按照从小到大的顺序,写出相应的字母　　(　　)

(a)2^{55}　　(b)3^{44}　　(c)4^{33}　　(d)5^{22}

Ⅱ. 请计算下面的表达式的值

$$\sqrt{2\,001\sqrt{2\,000\sqrt{1\,999\sqrt{1\,998\sqrt{1\,997\sqrt{1\,996\sqrt{1\,995\sqrt{1\,994\times1\,992+1}+1}+1}+1}+1}+1}+1}+1}$$

Ⅲ. 用$[x]$表示不超过x的最大整数,请求出下面的表达式的值

$$\left[\frac{13\times1}{2\,001}\right]+\left[\frac{13\times2}{2\,001}\right]+\left[\frac{13\times3}{2\,001}\right]+\cdots+\left[\frac{13\times2\,000}{2\,001}\right]$$

Ⅳ. 四位数$\overline{abcd}$表示千位为a,百位为b,十位为c,个位为d的四位数(以下类似),它是一个完全平方数(即自然数的平方). 除此之外,一位数a和三位数$\overline{bcd}$也都是完全平方数. 请求出原来的四位数$\overline{abcd}$.

Ⅴ. 太郎和一郎做游戏,两人轮流在图1的3×3网格中任意一格内填数,所填的数只能是1,3,4,5,6,7,8,9,10这9个数. 每个数只能用一次. 全部填完后,上、下两行的数的和为太郎的得分,左、右两列的数的和为一郎的得分,得分高的人获胜. 太郎先填,如果一定要取胜的话,最初要在哪一方格中填哪个数? 如果答案有1个以上的话,填出1个即可.

	左列		右列
上行	a	b	c
	d	e	f
下行	g	h	i

图1

Ⅵ. 如图2所示,记直线$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$与$x$轴和$y$轴的交点分别为$A$和$B$. 现在,在第四象限及其边界上作$\angle BAC=90°$的等腰Rt$\triangle ABC$,然后在第三象限内取点$P(t,-1)$使得$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABC}$,请求出$t$的值.

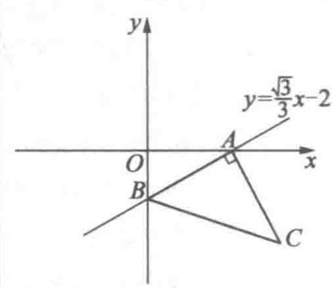


图2

Ⅶ. 如图3所示,在$\triangle ABC$中,$\angle A=96°$,$\angle B=54°$,$\angle C=30°$,$AB=1$,请求出AC的长度.

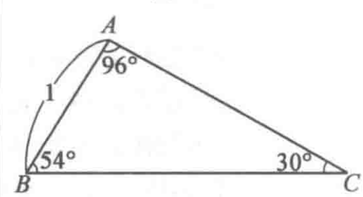


图3

Ⅷ. 如图4所示,在长方形$ABCD$中,$DE=BG$,$\angle BEC=90°$. 记四边形$EFGH$的面积为S_1,长方形$ABCD$的面积为S_2,有$\frac{S_2}{S_1}=n$. 现在,记$\frac{BC}{AB}=k$. 如果n为正整数,且k为有理数,请证明k为正整数.

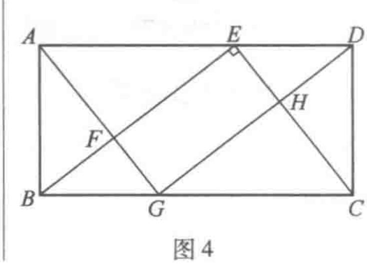


图4

日本第 2 届广中杯决赛试题(2001 年)

Ⅰ. 当 $x\neq 0$ 时,请求出 $\dfrac{\sqrt{1+x^2+x^4}-\sqrt{1+x^4}}{x}$ 的最大值.

Ⅱ. 请解下面的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{4} & (1)\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z+x}=\dfrac{1}{5} & (2)\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{6} & (3)\end{cases}$$

Ⅲ. 请证明下面的等式成立

$$2(1+2+\cdots+n)^4=(1^5+2^5+\cdots+n^5)+(1^7+2^7+\cdots+n^7)$$

Ⅳ. 如图 1 所示,在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$AD\perp BC$,$AD=5$,$MD=1$,$\angle BMC=3\angle BAC$. 请求出$\triangle ABC$ 的周长. 如果需要的话,可以使用下面的勾股定理:

如图 2 所示,在$\triangle PQR$ 中,$\angle QRP=90°$,$QR=a$,$RP=b$,$PQ=c$,则有 $a^2+b^2=c^2$.

Ⅴ. 如图 3 所示,在半径为 2 的圆盘 O'上,有一个定点 P,它与圆心 O'的距离为 1,圆盘 O'与半径为 4 的圆 O 内切,并绕着它无滑动地转动,请求出点 P 的运动轨迹所围成的图形的面积.

Ⅵ. 在长方体 $ABCD-EFGH$ 中,长 $AB=a$,宽 $BC=b$,高 $CG=c$ $(a>b>c)$. 将其沿平面切成两部分,且切面包含对角线 DF. 设切面的面积为 S,请用 a,b,c 来表示 S 的最小值.

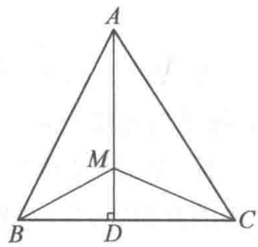


图 1

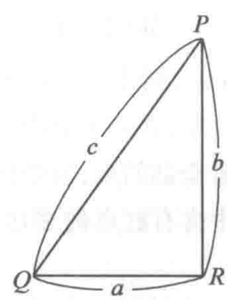


图 2

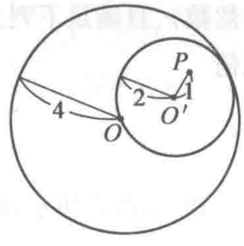


图 3

日本第3届广中杯预赛试题(2002年)

Ⅰ. 图1是2002年7月的日历. 太郎在这个月里每周要去参加一次足球比赛,共去5次. 其中去1次的是星期一、星期六、星期日,去2次的是星期三. 请问太郎参加比赛的日期的和是多少?

7月

日	一	二	三	四	五	六	
	1	2	3	4	5	6	第1周
7	8	9	10	11	12	13	第2周
14	15	16	17	18	19	20	第3周
21	22	23	24	25	26	27	第4周
28	29	30	31				第5周

图1

Ⅱ. 如图2所示,在每个空格中填入一个整数,使得每行、每列、每条对角线上的三个整数之和都相等,形成3阶幻方.

−6		−9
	−1	

图2

Ⅲ. 像525,2 002,97 479这样,把个位数字的顺序颠倒之后和原来的数相等的自然数称为"回文数". 请求出所有10位回文数的最大公约数.

Ⅳ. 如图3所示,$\angle ABC=\angle CDA=90°$,$DA=DC$,$S_{四边形ABCD}=12\ \text{cm}^2$,请求出顶点$D$到边$BC$的距离.

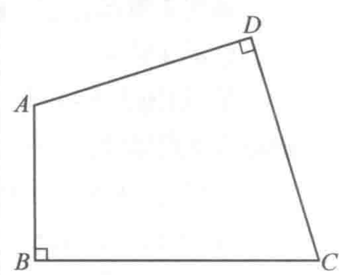


图3

Ⅴ. 在一个圆周上有2 002个黑点和1个红点,从中选取部分或者全部的点,使得这些点能够用线段依次连成多边形. 请求出顶点中含有红点的多边形与顶点中只含有黑点的多边形的数目之差.

Ⅵ. 如图4所示,设一个长方体的长、宽、高分别为x,y,z(都是自然数),且满足下列关系式. 请求出该长方体的体积的所有可能取值

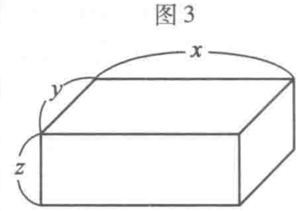


图4

$$\begin{cases}xz=yz+2 & (1)\\ xy=xz+yz+2 & (2)\end{cases}$$

Ⅶ. 如图5所示,四边形$ABCD$的对角线的交点为O,且有下列关系成立:$\angle BAD+\angle ACD=180°$;$AB=6$,$AC=8$,$AD=10$;$\dfrac{OD}{BO}=$

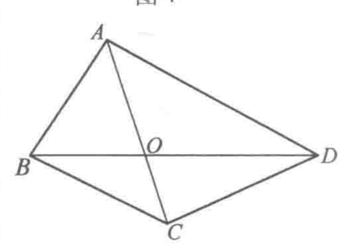


图5

$\frac{7}{6}$. 请求出 CD 的长度.(图5不一定准确)

Ⅷ. a,b,c 都是实数(数轴上实际存在的数),未知数 x 和 y 满足 $x+y=c$. 此时,请用 a,b,c 来表示 $\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{y^2+b^2}$ 的最小值.

另外,如果有必要的话,可以使用绝对值符号"| |"(例如 a 的绝对值为 $|a|$);在图6中的直角三角形中,$p^2+q^2=r^2$(勾股定理)也可以使用.

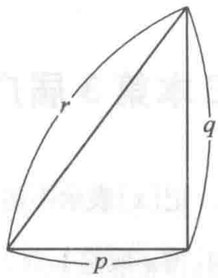


图6

日本第3届广中杯决赛试题(2002年)

Ⅰ.记$[x]$表示不超过x的最大整数,例如$[2.5]=2$,$[0.2]=0$.请问:当x取遍1到2 002的整数时,$f(x)=\left[\frac{x^2}{20}\right]$可以取到多少种不同的值?

Ⅱ.在正m边形里面画一个小的正n边形,用一些不相交的线段联结它们的顶点,得到的三角形总数记为$f(m,n)$.

例如,根据图1,有$f(5,4)=11$.

请求出$f(2\ 002,7)$的值.

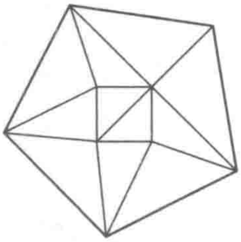


图1

Ⅲ.皮特和太郎玩"四子连珠"游戏.棋盘是6×6的方格,皮特持黑棋,太郎持白棋.皮特最初同时摆放了若干颗黑棋,然后太郎按自己喜欢的方式摆.皮特的目的是,不管太郎怎样摆都不让他摆成"四子连珠",也就是4颗白棋不能连在一起(横、竖、斜).请问:

(i)皮特最少要在棋盘里放多少颗黑棋?

(ii)在满足(i)的条件的所有摆放方法中,请你找出黑棋自己摆成"四子连珠"的摆放方法.答案不只一种,但是如果答案中的图经过翻转或旋转能够使得全部的黑棋重合的话,只能算是同一种答案.

Ⅳ.在$\triangle ABC$中,$AB=48$,$BC=35$,$CA=27$.请求出$\angle B$与$\angle C$的大小的比值,并写出思考过程.

Ⅴ.设关于x的一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两个根分别为p和q.

(i)请用a,b,c表示$p+q$;

(ii)请用a,b,c表示p^2+q^2;

(iii)请用a,b,c表示p^3+q^3.

Ⅵ.如图2所示,四边形$ABCD$,$EFGH$均为正方形,且它们所在的平面平行,距离为2.侧面$AEFB$,$BFGC$,$CGHD$,$DHEA$都是等腰梯形.

若$AB=x$,$EF=10$,请求出梯形$AEFB$的面积S(用含有x的表达式来表示).

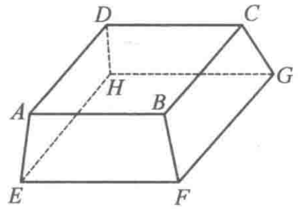


图2

Ⅶ. 请求出满足

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{3}{4} & (1)\\ a\leqslant b\leqslant c & (2)\end{cases}$$

的所有正整数组(a,b,c).

(i)请求出a可能取到的所有值,并写出思考过程;

(ii)请求出满足原式的所有正整数组(a,b,c).

Ⅷ. 如图3所示,在菱形$ABCD$的边BC的延长线上取点E,AE分别与CD和BD交于点F和G. 现在,有$\angle BGA:\angle BAG=1:2$,$EF=21$,$FG=4$. 请求出菱形$ABCD$的边长.(图3不一定准确)

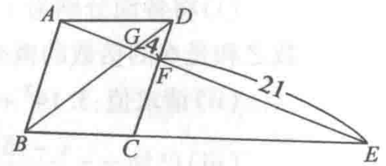


图3

日本第4届广中杯预赛试题(2003年)

Ⅰ.只写出答案即可.

(i)将各面分别为1~6的骰子掷两次,请求出两次掷出的点数之和是6的倍数的概率.

(ii)请求值:$3.14^2+4.36^2-11.5^2+3.14\times 8.72$.

(iii)已知$\pi=\dfrac{x-15}{y-12}=\dfrac{y+2\,003}{x+2\,000}$,请求出$x+y$的值.其中$\pi(=3.141\,5\cdots)$为圆周率.

(iv)如图1所示,一个凸多面体的展开图由正方形和等腰三角形组成,请求出该多面体的体积.其中正方形的边长为2,等腰三角形的腰长为$\sqrt{3}$.

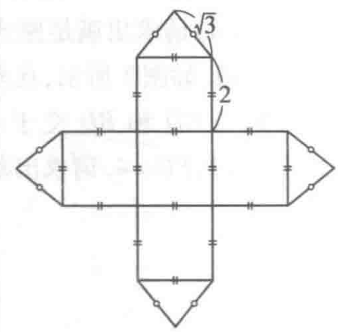


图1

(v)如图2所示,请求出四边形$ABCD$的面积.其中,扇形的半径为6,圆心角为90°.

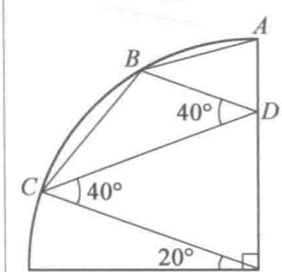


图2

Ⅱ.只写出答案即可.

(i)如图3所示,圆和正$\triangle ABC$重叠在一起.

已知$AP=AS=7$,$QR=5$,请求出正三角形的边长.

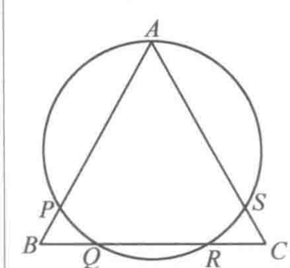


图3

(ii)某城镇有6支棒球队互相进行比赛.这6支球队分别称为A队、B队、C队、D队、E队、F队.

在一年期间,各队的比赛成绩如下(没有平局):

A队:60胜29败;

B队:42胜30败;

C队:10胜10败;

D队:28胜37败;

E队:3胜4败.

请问:在这一年里,F队至少进行过多少场比赛?

说明:以上成绩仅限于这6支球队之间的比赛,不包括与A~F以外的球队的比赛.

(iii)"某国"使用的货币和日本相同,都是日元.增值税率也是5%,但和日本不同的是,计算增值税后的金额如果不满1日元,不是舍去不计,而是四舍五入.

例如:在日本购买110日元的物品,增加5%的增值税后为115.5日元,小数点后的部分舍去后为115日元,所以附加增值税