高等院校精品课系列教材
高等院校经济数学系列教材

Exercises for Advanced Mathematics

高等数学习题集

第四版

上海财经大学数学学院　编

上海财经大学出版社

高等院校精品课系列教材
高等院校经济数学系列教材

高等数学习题集

（第四版）

上海财经大学数学学院　编

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题集/上海财经大学数学学院编. —4 版. —上海:上海财经大学出版社,2017.6

高等院校精品课系列教材

高等院校经济数学系列教材

ISBN 978-7-5642-2747-0/F·2747

Ⅰ.①高… Ⅱ.①上… Ⅲ.①高等数学-高等学校-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 125703 号

□ 责任编辑 刘光本

□ 责编电邮 lgb55@126.com

□ 责编电话 021—65904890

□ 封面设计 杨雪婷

GAODENG SHUXUE XITIJI

高 等 数 学 习 题 集

(第四版)

上海财经大学数学学院 编

上海财经大学出版社出版发行

(上海市中山北一路 369 号 邮编 200083)

网 址:http://www.sufep.com

电子邮箱:webmaster @ sufep.com

全国新华书店经销

江苏省句容市排印厂印刷装订

2017 年 6 月第 4 版 2017 年 6 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16 21.25 印张 544 千字

印数:20 801—25 000 定价:49.00 元

前言

《高等数学习题集》经过多年的使用，在《高等数学》课程分层次教学和数学竞赛辅导过程中发挥了不小的作用，深受广大师生的喜爱。从问世至今已经过三次修订，每次修订都遵从国内外其他学科对高等数学方面知识的要求。本习题集可作为高等教育出版社2017版《高等数学》(杨爱珍主编)的配套习题集使用。

本书作为高等数学的习题集，围绕着促进掌握基本概念、基本理论、基本技能和基本技巧的同时，又着重加强了训练思维、培养能力、巩固知识、加强理解、扩大视野的作用。在第三版中我们对浙江大学出版社出版的《高等数学竞赛教程》(第五版)(卢兴江、金蒙伟主编)的每一讲练习题详细地给出解答，相信对学生准备高等数学竞赛会有所帮助。

第四版主要对第三版中的一些错误进行了修正，重写了第十一章和第十二章。对竞赛题解答也进行了部分修改，给出了新的解法，使之更适合只学习过高等数学的同学参阅。对其他章节的部分题目也进行了调整。

鉴于目前高等数学学时少，通过多年的教学调研发现，学生课后做一定量的练习题是一种可行的熟练掌握所学知识的途径，因此入选习题集的题目是经过精心挑选的，尽量涵盖各个知识点，又能对解题技巧有所训练。从前三版教师和学生使用的反馈看，习题集能适应多层次学生的需求。第四版仍采用前几版风格。此次修订过程中得到了数学学院领导和老师们的支持，很多同学也提出了很好的建议，在此表示感谢!

参加此次修订的有杨爱珍副教授、殷承元教授和叶玉全教授，另外数学学院戴滨林老师、胡业新老师、刘超老师、魏枫老师、王清华老师、杨世海老师、王琪老师、张振宇老师对习题集中错误的修正也提出了一些有益的建议和方案。

编　者

2017年6月

目录

27. 求$\oint_L dx - dy + dz$，其中 L 为有向闭曲线 $ABCA$，这里 A,B,C 依次为点$(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$.

28. 一力场由沿横轴正方向的常力$\vec{F}$构成. 试求当一质量为m的质点沿圆周$x^2+y^2=R^2$按逆时针方向移过位于第一象限的那一段弧时场力所做的功.

29. 一力场中的力的大小与作用点到 z 轴的距离成正比，方向垂直向着该轴. 试求当质量为 m 的质点沿圆周 $x=\cos t, y=1, z=\sin t$ 由点$M(1,1,0)$ 依正向移动到点 $N(0,1,1)$ 时力场所做的功.

30. 求$\int_L x\,dx + y\,dy + (x+y-1)dz$，$L$ 是从点 $A(1,1,1)$ 到点 $B(2,3,4)$ 的一段直线.

31. 求 $I=\int_{(0,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$.

32. 计算$I=\int_L \frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy$，其中$L$是从点$A(-a,0)$经上半椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (y\geqslant 0)$到点$B(a,0)$的弧段.

33. 求$\oint_L \frac{(x-1)dy-y\,dx}{(x-1)^2+y^2}$，其中 L 为含有点$(1,0)$ 的区域 D 的边界曲线，沿逆时针方向.

34. 求$\oint_L \frac{x\cos y\,dy-\sin y\,dx}{x^2+\sin^2 y}$，其中 L 为单位圆 $x^2+y^2=1$ 的正向.

35. 计算曲线积分$\oint_L \frac{y\,dx-x\,dy}{2(x^2+y^2)}$，其中 L 为圆周$(x-1)^2+y^2=2$，L 的方向为逆时针方向.

36. 证明曲线积分$\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$ 在整个 xOy 面内与路径无关，并计算积分值.

37. 验证 $\sin x\sin 3y\,dx-3\cos 3y\cos x\,dy$ 在整个 xOy 平面内是某一个函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求一个这样的函数.

38. 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$有连续导函数，求$\int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$，其中 L 是从点 $A\left(3,\frac{2}{3}\right)$到点 $B(1,2)$ 的直线段.

39. 确定常数 n，使得$\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{(x^2+y^2)^n}$为某函数 $u=u(x,y)$ 的全微分，并求 $u(x,y)$.

40. 设 D 是由 $y=x, y=4x, xy=1$ 及 $xy=4$ 所围成的区域，L 是它的正向边界，$F(u)$ 具有连续导数，求证$\oint_L \frac{F(xy)}{y}dy=\ln 2\int_1^4 f(u)du$，其中 $F'(u)=f(u)$.

41. 计算$\iint_\Sigma (x+y+z)dS$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

42. 计算 $I=\iint_\Sigma |xyz|\,dS$，其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 介于两平面 $z=0, z=1$ 之间的部分.

43. 计算$\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域的整个边界曲面.

44. 求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的质量，此壳的面密度的大小为 $\rho=z$.

45. 求面密度为 ρ_0 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$ 对于 z 轴的转动惯量.

46. 计算 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S$,其中 Σ 为四面体 $x+y+z\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 及 $z\geqslant 0$ 的边界面.

47. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

48. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截部分的外侧.

49. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(1+z)(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为半球面 $x^2+y^2+z^2=1(y\geqslant 0)$ 朝 y 轴正向的一侧.

50. 求矢量场 $\vec{F}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}$ 穿过在第一卦限中的球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧的通量.

51. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧.

52. 把对坐标的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为对面积的曲面积分,其中 Σ 是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧.

53. 利用高斯公式计算下列曲面积分：

(1) $\oiint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为平面 $x=0,y=0,z=0,x=a,y=a,z=a$ 所围的立体的表面的外侧.

(2) $\oiint\limits_{\Sigma}xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(yx^2-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(xy+zy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为上半球体 $x^2+y^2\leqslant a^2$, $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的表面外侧.

(3) $\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

(4) $\oiint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

54. 利用高斯公式计算椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围区域的体积.

55. 设某种流体的速度为 $\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$,求单位时间内流体流过曲面 Σ∶$y=x^2+z^2$ $(0\leqslant y\leqslant h^2)$ 的流量，其中 Σ 取左侧.

56. 应用高斯公式计算三重积分 $\iiint\limits_{V}(xy+yz+zx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 V 是由 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$, $0\leqslant z\leqslant 1$ 与 $x^2+y^2\leqslant 1$ 所确定的空间区域.

57. 计算 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$,其中 Σ 为一封闭曲面的外侧(曲面不经过坐标原点).

58. 应用 Stokes 公式计算下列积分：

(1)$\oint_L (2y+z)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-z)\mathrm{d}z$,其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 与各坐标面的交线，取逆时针方向为正向.

(2)$\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$,其中 L 为 $x+y+z=1$ 与三个坐标面的交线，它的走向是所围平面区域上侧在曲线的左侧.

(3)$\oint_L (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-z)\mathrm{d}z$,其中 L 为以 $A(a,0,0)$,$B(0,a,0)$,$C(0,0,a)$ 为顶点的三角形沿 $ABCA$ 的方向.

(4)$\oint_L x^2y^3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$,其中 L 为圆:$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=0\end{cases}$,且从 z 轴正向看去取逆时针方向.

(5)$\oint_L zy\mathrm{d}x+3xz\mathrm{d}y-xy\mathrm{d}z$,其中 L 是曲线$\begin{cases}x^2+y^2=4y\\ 3y-z+1=0\end{cases}$,且从 z 轴正向看去取逆时针方向.

59. 证明沿曲线 AB 的曲线积分$\int_{AB}(3x^2-y+z^2)\mathrm{d}x+(-x+4y^3)\mathrm{d}y+2xz\,\mathrm{d}z$ 与路径无关，只与起点 A 和终点 B 有关,并求原函数.

60. 计算$\int_L (x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$,其中 L 为由点 $A(a,0,0)$ 至点 $B(a,o,h)$ 的螺线 $x=a\cos\varphi,y=a\sin\varphi,z=\dfrac{h}{2\pi}\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$.

61. 证明：由曲面 Σ 所围成的立体的体积 $V=\dfrac{1}{3}\oiint_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S$,其中 $\cos\alpha$,$\cos\beta$,$\cos\gamma$ 为曲面 Σ 的外法线方向余弦.

四、参考答案

(一) 选择题

1. B.　2. C.　3. C.　4. B.　5. D.　6. C.　7. B.　8. B.
9. C.　10. B.　11. C.　12. D.　13. D.　14. A.　15. C.

(二) 填空题

1. $1-\cos 1$.　　2. $\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{5}{3}\sqrt{5}+\dfrac{1}{15}\right)$.

3. $\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{4}y^4+x^2y+C$.　　4. 0.

5. 516.　　6. $\dfrac{\pi}{3}$.

7. 定积分的积分区间是数轴的区间,是有特定的由左端点到右端点的.

8. 二重积分是第一类曲面积分的特殊情况,只是积分曲面是 xOy 的平面区域而已,而二重积分在积分区域认为是方向向上时,才可以认为是第二类曲面积分的特殊形式.

9. 如果积分曲线 L 在 xOy 平面中的单连通区域 D 时,$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与积分路径无关,$U(x,y)$ 是 D 上的函数,满足 $\mathrm{d}U(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$. 如果 L 的起点为 (x_a,y_a),终点为 (x_b,y_b) 时,$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=U(x_b,x_b)-U(x_a,y_a)$.

10. 如果积分曲线 L 在 xOy 平面中的单连通区域 D 时，$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与积分路径无关，如果 L 的起点为 (x_0,y_0)、终点为 (x,y) 时，$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y$.

11. 0.　　12. 0.

13. 相同点是都是对积分曲面分割求和的极限，不同点是第一类曲面积分的积分曲面没有方向，而第二类曲面积分的积分曲面有方向——法线的方向，并且方向余弦在和式中出现.

14. 相同点是都是积分曲线分割求和的极限，不同点是第一类曲线积分的积分曲线没有方向，而第二类曲线积分的积分曲线有方向——切线的方向，并且方向余弦在和式中出现.

15. 符号.　　16. 符号.

(三) 计算证明题

1. $\int_L \frac{6xyz}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}\mathrm{d}s$.　　2. 0.　　3. $a=b=2, 2\cos 1$.　　4. $(b_1-a_2)\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\right)+2c_1$.

5. $-\frac{3}{2}\pi$.　　6. $\pi\ln 2$.　　7. $-2a^2\pi$.　　8. $\frac{a^4}{8}\pi^2$.　　9. $R^3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)$.

10. $\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2)$.　　11. $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3}{4}\pi$.

12. $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$.　　13. $4\int_{-\pi}^{0}|\sin\theta|\,\mathrm{d}\theta=-4\int_{-\pi}^{0}\sin\theta\mathrm{d}\theta=8$.

14. $\frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\sqrt{2}}\frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]\Big|_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\sqrt{2}}$.　　15. $\sqrt{2}$.

16. $\mathrm{e}^a\left(2+\frac{\pi}{4}a\right)-2$.　　17. 9.　　18. $2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$.

19. $2a^2(2-\sqrt{2})$.　　20. $12a$.　　21. $-\frac{\pi}{2}a^4$.　　22. $2R^3$.

23. $\pi-\frac{1}{3}$.　　24. 32.　　25. $\frac{4}{3}$.

26. $\int_2^0 f(1,y)\mathrm{d}y+\int_0^{-1}f(1,-y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^{0}f(y+2,-y)\mathrm{d}y+\int_0^2 f\left(2-\frac{y}{2},y\right)\mathrm{d}y$.

27. $\frac{1}{2}$.　　28. $-|\vec{F}|mR$.　　29. $\frac{k}{2}$.　　30. 13.　　31. $\frac{238}{5}$.

32. $-\pi$.　　33. 2π.　　34. 2π.　　35. $-\pi$.

36. 236.　　37. $u(x,y)=-\sin 3y\cos x$.　　38. -4.

39. $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{y}{x}+C$.　　40. 提示：作变换 $u=xy, v=\frac{y}{x}$.

41. πa^3.　　42. $\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$.　　43. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}\pi$.　　44. $\frac{2}{15}\pi(6\sqrt{3}+1)$.

45. $\frac{4}{3}\pi\rho_0a^4$.　　46. $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$.　　47. $\frac{2}{15}\pi R^5$.

48. 6π.　　49. $\frac{4}{15}\pi$.　　50. $\frac{3}{16}\pi$.　　51. $\frac{2\pi}{105}R^7$.　　52. $\iint_\Sigma \frac{2xP+2yQ+R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S$.

53. (1) $3a^4$.　　(2) $\frac{2}{5}\pi a^5$.　　(3) $\frac{12}{5}\pi$.　　(4) 0.

54. $\frac{4}{3}\pi abc$.　55. $\frac{\pi}{2}h^4$.　56. $\frac{11}{24}$.

57. 当曲面 Σ 不包围含坐标原点时，积分 0；当曲面 Σ 包围坐标原点时，积分为 4π.

58. (1) $\frac{3}{2}$.　(2)0.　(3)$3a^2$.　(4)$-\frac{1}{8}\pi a^6$.　(5)8π.

59. $u(x,y,z)=x^3-xy+y^4+xz^2+C$.

60. 提示：此积分与路径无关，积分值为$\frac{1}{3}h^3$.

61. 略.

第十一章

级　数

一、内容提要

(一) 级数的基本概念

1. 级数的定义

数列$\{u_n\}$的各项依次相加

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

称为无穷级数,简称级数,其中第 n 项 u_n 称为级数的一般项(或通项).

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

称为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项和或部分和.

2. 级数的收敛与发散

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$有极限 S,即$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 存在,则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,并称极限值 S 为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和. 记为 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

若$\{S_n\}$没有极限(即$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在),则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(二) 级数的基本性质

1. 对任一非零常数 k ,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 的敛散性相同,且收敛时有$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

2. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛,且有$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

注:$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 中一个收敛,一个发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 发散;若两个级数都发散,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 的敛散性不能确定.

3. 级数增加或去掉有限项,不改变级数的敛散性. 但级数收敛时,其和会发生变化.

4. 收敛级数在不改变其各项顺序的情况下任意加括号后所得的级数仍收敛,且收敛于原级数的和.

注:若加括号所得的级数发散,则原级数必发散;若加括号所得的级数收敛,则原级数的敛散性不能确定.

5. 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的必要条件是$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. 即若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$；若$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$必发散.

(三) 两个基本级数

1. 几何级数$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$：当$|q|<1$时，收敛，其和为$\frac{a}{1-q}$；当$|q|\geqslant 1$时，发散.

2. p－级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$：当$p>1$时，收敛；当$p\leqslant 1$时，发散.

调和级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$是$p$－级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$在$p=1$时的一种特殊情形.

(四) 常数项级数

1. 正项级数

(1) 正项级数的定义

若$u_n \geqslant 0 (n=1,2,\cdots)$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数.

(2) 正项级数收敛的基本定理

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充分必要条件是其部分和数列$\{S_n\}$有上界.

(3) 正项级数敛散性的判别法

I. 比较判别法

① 不等式形式

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$均为正项级数，若有$0\leqslant u_n \leqslant v_n (n=1,2,\cdots)$，那么

(i) 若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；

(ii) 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散.

② 极限形式

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$均为正项级数，且$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l (v_n \neq 0)$，那么

(i) 当$0<l<+\infty$时，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$敛散性相同；

(ii) 当$l=0$时，若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；

(iii) 当$l=+\infty$时，若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

II. 比值(达朗贝尔)判别法

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数，且$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho (u_n \neq 0)$，则

(i) 当$0\leqslant \rho <1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；

(ii) 当 $\rho > 1$ 或 $\rho = +\infty$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(iii) 当 $\rho = 1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛也可能发散.

III. 根值(柯西)判别法

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$,则

(i) 当 $0 \leqslant \rho < 1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(ii) 当 $\rho > 1$ 或 $\rho = +\infty$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(iii) 当 $\rho = 1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛也可能发散.

注:比值与根值判别法中的条件是充分条件而不是必要条件. 当 $\rho = 1$ 时,需用其他方法判别.

IV. 积分判别法

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,且 $f(n) = u_n$,若 $f(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 上单调下降的连续函数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

2. 任意项级数

(1) 交错级数

I. 交错级数的定义

若 $u_n \geqslant 0 (n = 1,2,\cdots)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 称为交错级数.

II. 莱布尼兹判别法

若交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, u_n \geqslant 0 (n = 1,2,\cdots)$ 满足条件:① $u_n \geqslant u_{n+1} (n = 1,2,\cdots)$; ② $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛,且其和 $S \leqslant u_1$.

(2) 绝对收敛与条件收敛

I. 绝对收敛与条件收敛的定义

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数,

① 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;

② 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散,称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

II. 绝对收敛的定理

如果任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛.

(3) 任意项级数敛散性判别法

Ⅰ. 若$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

Ⅱ. 若$|u_n|\leqslant|v_n|$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|v_n|$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛.

Ⅲ. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_n}{v_n}\right|=l(0\leqslant l<+\infty)$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|v_n|$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛.

Ⅳ. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho(u_n\neq 0)$或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho$，那么

(ⅰ) 当$0\leqslant\rho<1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛；

(ⅱ) 当$\rho>1$或$\rho=+\infty$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散；

(ⅲ) 当$\rho=1$时，无法判定.

注：若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则应考虑$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性，再确定$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是发散还是条件收敛.

(五) 幂级数

1. 幂级数的定义

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

称为$x-x_0$的幂级数.

当$x_0=0$时，

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

称为x的幂级数. 其中，$a_0,a_1,\cdots,a_n\cdots$均为常数，称为幂级数的系数.

2. 幂级数的收敛域

(1) 幂级数收敛域的定义

当$x=x_0$时，若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$收敛，则称点$x_0$为幂级数的收敛点；若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$发散，则称点$x_0$为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的发散点. 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$所有收敛点的集合，称为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛域，记作$I$.

(2) 幂级数收敛半径的求法

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$，则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho},0<\rho<+\infty\\+\infty,\rho=0\\0,\rho=+\infty\end{cases}.$$

(3) 幂级数收敛域的求法

设正常数R为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径，则区间$(-R,R)$为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛区间，

由 $x=\pm R$ 处级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的敛散性可以确定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域是 $(-R,R)$、$(-R,R]$、$[-R,R)$ 或 $[-R,R]$.

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 只有在 $x=0$ 处收敛，则规定收敛半径 $R=0$，这时收敛域只有一个点 $x=0$；如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在整个实数轴上都收敛，则规定收敛半径 $R=+\infty$，这时收敛域是 $(-\infty,+\infty)$.

3. 幂级数的性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，其和函数为 $S(x)$，则

(1) $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内连续，即

$$\lim_{x\to x_0}S(x)=S(x_0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n,x\in(-R,R).$$

(2) $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内可导，且幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内可逐项求导，即

$$S'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

(3) $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内可积，且幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内可逐项积分，即

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

逐项求导和逐项积分后得到的新的幂级数的收敛半径仍为 R，但收敛域可能变化.

利用公式 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}(|x|<1)$ 及以上性质可以求幂级数的和函数.

4. 初等函数的幂级数展开式

(1) 展开定理

Ⅰ. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处能展开的存在性定理

设函数 $f(x)$ 在含 x_0 的某区间 (a,b) 内有任意阶导数，则函数 $f(x)$ 在该区间能展开为泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 的充要条件是 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式的余项 $R_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时趋于零，即 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

Ⅱ. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处能展开的唯一性定理

设 $f(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在其收敛域内的和函数，则

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},(n=0,1,2,\cdots),$$

即函数 $f(x)$ 在收敛域内能展开成幂级数，则必为泰勒级数.

(2) 常见函数的幂级数展开式