

彭林
◎ 编著



挑战 **IMO**




初中数学



竞赛试题集

CHUZHONG
SHUXUE

思维 拓展训练

-  **知识全面:** 结合竞赛全新试题, 解析初中阶段重点难点
-  **思维拓展:** 多角度渗透解题方法, 同一类题目详解不同解题思路
-  **培优竞赛:** 适用初中竞赛考、升学考、分班考考前复习



上海社会科学院出版社

彭林
◎ 编著



挑战

初中数学

扫码
送
视频讲解

竞赛试题集

CHUZHONG
SHUXUE

思维拓展训练



上海社会科学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

挑战 IMO:初中数学竞赛试题集. 思维拓展训练/
彭林编著. — 上海:上海社会科学院出版社,2016

ISBN 978-7-5520-0838-8

I. ①挑… II. ①彭… III. ①中学数学课-初中-习题集
IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 087326 号

挑战 IMO:初中数学竞赛试题集(思维拓展训练)

编 著:彭 林

责任编辑:李清奇

封面设计:郁心蓝

出版发行:上海社会科学院出版社

上海淮海中路 622 弄 7 号 电话 63875741 邮编 200020

<http://www.sassp.org.cn> E-mail:sassp@sassp.org.cn

照 排:上海碧悦制版有限公司

印 刷:上海信老印刷厂

开 本:787×1092 毫米 1/16 开

印 张:5.25

字 数:218 千字

版 次:2016 年 3 月第 1 版 2016 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5520-0838-8/G·402

定价:20.00 元

服务热线:021-53060606-2350(编辑室)

版权所有 翻印必究

前 言

距希腊首都雅典一百多英里的地方,在两条小河的汇合处有一条郁郁葱葱的美丽溪谷,名叫奥林匹亚.如若你站在溪谷中举目四望,透过枝叶扶疏的树林,依稀可见一排古老的石柱,它就是几千年前举行第一届世界奥林匹克竞赛的运动场遗址.

现在,奥林匹克运动已发展成为跨越五大洲、为世界亿万人民所瞩目的盛会.随着奥林匹克运动的迅猛发展,在原有的奥林匹克体育竞赛之外,更兴起了奥林匹克知识竞赛,并成为国际、国内公认的著名高水平知识竞赛.

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛,在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.近年来,我国数学竞赛水平一直在国际上居领先地位,为各国数学家与教育家所瞩目.

数学竞赛是青少年数学教育的重要组成部分.数学竞赛对于激发学生的学习兴趣、开发智力、培养数学探索能力和创新能力、开拓视野有着非常积极的作用.通过开展数学竞赛活动,可以更好地发现和培养优秀学生,让他们得到进一步发展,同时也能提高教师的教学和科研水平,促进教学改革.

多年来全国以及各省、市的数学竞赛、联赛和各种邀请赛,给我们提供了一个巨大的知识宝库,积累了大量有实际背景、具有一定挑战性的趣味问题,对发展数学爱好者的数学思维十分有益,为青少年数学培训和智力开发提供了有效途径和大量的资料.为此,作者编写了《挑战IMO:初中数学竞赛试题集(思维拓展训练)》和《挑战IMO:初中数学竞赛试题集(热点冲刺训练)》.其中,“思维拓展训练”适合学生在平时学习中使用,可以拓展数学思维,培养良好的数学逻辑思维能力.“热点冲刺训练”适合学生在参加竞赛、升学、分班等选拔性考试前,突击使用,帮助熟悉题型和解题方法,提高数学成绩.

这两本书以“小步子”为原则“爬缓坡”,重在方法渗透,真正做到循序渐进.只要有心,同学们都可以利用这两本书提高自己的解题能力.需要特别说明的是,即使不参加竞赛,对于各年级的学生,凡有余力研读这两本书的同学,都会培养起较强的解题能力.这两本书选题精良,解答详尽,每道题都是一个小小的考验,读懂了,会做了,难题也就不觉得难了.

做题,要保持浓厚的兴趣,不必赶任务.时间充裕,多做几题;时间紧迫,少做几题.全凭自己自由安排.切忌贪多,食而不化.基础要巩固,做题要总结.回顾一下解题过程(或与参考答案比较),看看有哪些步骤可以省略,哪些地方可以改进,努力找出最佳的解法.经常这样琢磨,解题能力就会有很大提高.刀磨快了,柴就好劈.对数学的感觉更敏锐,理解更透彻,解题就更加

得心应手,左右逢源,兴趣就会越来越强烈.

数学来源于五彩的客观世界,但数学图书却往往给人以枯燥乏味之感.为改变这种状况,作者在编写这两本书时,特别注意融基本知识、基本技能和基本方法于丰富有趣的语言材料中去,其目的是吸引更多的学生自觉自愿地从第一道习题做到最后一道习题.另外,这两本书还设置了“数学娱乐”栏目,采用雅俗共赏的形式,力图使读者感到“数学好玩”,消除数学给同学们的“冷面孔”的印象.

特别感谢童纪元、黄洋、李秀琴、吴智敏、王献利、张永飞、张冠洁、贾海燕、李世魁、张春花、郭彩霞等老师对这两本书的编写所提供的支持与帮助.

希望这两本书能真正成为广大青少年的良师益友,并诚恳地希望得到广大读者的批评指正.祝青少年朋友健康成长,快乐学习.

书中部分题目提供视频讲解.请扫描题目对应的二维码,免费下载视频,跟着老师的指导,按步骤解出题目,学会一类题的解题思路.

彭 林

目 录

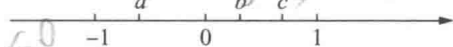
第一章 数与式	1
第一节 有理数	1
第二节 整式	5
第三节 分式	9
第四节 实数与二次根式	12
第五节 定义新运算	15
第二章 方程与不等式	17
第一节 一次方程(组)与一次不等式(组)	17
第二节 一元二次方程	21
第三节 有关方程的应用题	24
第三章 函数及其图象	29
第一节 一次函数与反比例函数	29
第二节 二次函数	35
第四章 直线形	39
第一节 简单的几何图形	39
第二节 三角形	44
第三节 全等三角形及其应用	47
第四节 等腰三角形与直角三角形	50
第五节 平行四边形	54
第六节 相似三角形	58
第七节 几何变换	60
第五章 锐角三角函数与解直角三角形	65
第六章 圆	71
参考答案与提示	76

第一章

数与式

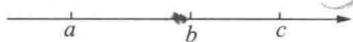
第一节 有理数

1. 如果 a, b 代表有理数, 并且 $a+b$ 的值大于 $a-b$ 的值, 那么 (D).
- A. a, b 同号 B. a, b 异号 C. $a > 0$ D. $b > 0$
2. 有理数 a, b, c 的对应点在数轴上的位置如图, 则在 $-\frac{1}{a}, -a, c-b, c+a$ 中最大的一个是 (D).
- A. $-a$ B. $c-b$ C. $c+a$ D. $-\frac{1}{a}$



第 2 题

3. 若 $|a-2|-2+a=0$, 则 a 的取值范围是 (A).
- A. $a \leq 2$ B. $a < 2$ C. $a \geq 2$ D. $a > 2$
4. 若 $a < 0$, 则 a 等于 (B).
- A. $-a$ B. $-|a|$ C. $|a|$ D. $|-a|$
5. 若 $|x|=5, |y|=3$, 且 $|x-y|=y-x$, 则 x, y 的值分别是 (C).
- A. $x = \pm 5, y = \pm 3$ B. $x = 5, y = 3$
- C. $x = -5, y = \pm 3$ D. $x = 5, y = \pm 3$
6. 已知数轴上有 A 和 B 两点, A、B 之间的距离为 1, 点 A 与原点 O 的距离为 3, 那么所有满足条件的点 B 与原点 O 的距离之和等于 (D).
- A. 2 B. 4 C. 8 D. 12
7. $abcde$ 是一个五位自然数, 其中 a, b, c, d, e 为阿拉伯数码, 且 $a < b < c < d$, 则 $|a-b| + |b-c| + |c-d| + |d-e|$ 的最大值是 (A).
- A. 8 B. 17 C. 8 或 17 D. 不存在
8. 如图, 若 $a+b+c=0$, 则下面的判断中一定成立的是 (B).



第 8 题

- A. $a < 0, c < 0$ B. $a < 0, c > 0$ C. $a > 0, c > 0$ D. $a > 0, c < 0$

9. 若 $a + a^2 = a \div (-a) + |a| = -1$, 则 (A).

- A. $a \leq 0$ B. $a \geq 0$ C. $a < 0$ D. $a > 0$

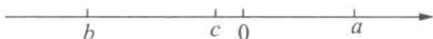
10. $|a-b| = |a| + |b|$ 成立的条件是 (A).

- A. $ab > 0$ B. $ab > 1$ C. $ab \leq 0$ D. $ab \leq 1$

11. 妈妈让女儿猜一个有理数, 并告诉女儿: (a) 这个数是偶数; (b) 这个数是 15; (c) 这个数是质数; (d) 这个数是 17, 以上条件 (a)(b) 之中和 (c)(d) 之中各只有一个正确, 那么妈妈让猜的这个数是 2.

12. 当 $|x| = x + 2$ 时, 则 $19x^2 + 3x + 27 =$ 43.

13. 已知有理数 a, b, c 在数轴上的对应点如图所示, 那么代数式 $|b-a| + |a+c| + |c-b|$ 的化简结果是 $2a - 2b + 2c$.

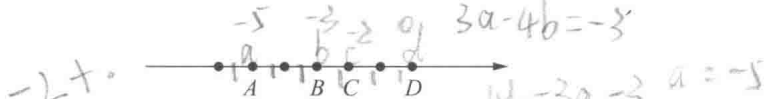


第 13 题

14. 如果不论 x 取什么数, 代数式 $\frac{ax+3}{bx+5}$ 的值都是一个定值, 那么代数式 $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ 的值为 $\frac{17}{8}$.

15. 如果代数式 $2a + |4 - 5a| + |1 - 3a|$ 的值是一个固定不变的值, 那么这个固定不变的值是 3.

16. 已知数轴上任意相邻两点间的距离是 1 个单位, 且点 A, B, C, D 在数轴上的位置如图所示, 如果点 A, B, C, D 所对应的数分别为 a, b, c, d , 当 $3a = 4b - 3$ 时, 那么 $c + 2d =$ -2.



第 16 题

17. 如果代数式 $|a+c| + |b+c| - |a+b|$ 的化简结果为 $2a$, 那么在数轴上标出 a, b, c 的对应位置一共有 12 种.

18. 已知: $(m+n)^2 + |m| = m$, $|2m-n-2| = 0$, 那么 $mn =$ 16.

19. 三个互不相等的有理数, 既可表示为 $1, a+b, a$ 的形式, 也可表示为 $0, \frac{b}{a}, b$ 的形式, 那么 $a =$ 9, $b =$ 7.

20. 在前 1999 个自然数组成的数列: $1, 2, 3, \dots, 1999$ 中每个数前任意添上“+”或“-”号, 其代数数和是 2000000 (填“偶”或“奇”)数, 其中非负数和的最小值是 0.

21. 计算: $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$.

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{9900}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{9900}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{9900}$$



22. 计算: $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{98 \times 100}$.

拆项

23. 计算: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45}$.

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{9}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{5}{2} + \frac{1}{7} \times \dots \checkmark$$

24. 计算: $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2000}$.

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n} \right)$

$\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$

25. 计算: $\frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})} + \frac{\frac{1}{4}}{(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{4})} + \dots + \frac{\frac{1}{2000}}{(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{4}) \dots (1 + \frac{1}{2000})}$.

26. 计算: $2 - 2^2 - 2^3 - 2^4 - \dots - 2^{18} - 2^{19} + 2^{20}$.

$$2(1 - 2 - 2^2 - \dots - 2^{18} + 2^{19})$$

$$= 2(1 - 2(1 - 2 - \dots - 2^{17} + 2^{18})) = 2(1 - 2(1 - 2(1 - 2(1 - 2 \dots - 2^{12} + 2^{13}))))$$

27. 计算: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2000}$.

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2000}$$

$$S = 1 + 2(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{1999}) + 2^{2000}$$

$$S - S = 2^{2000} - 2$$

$$S(S-1) = 2^{2000} - 2$$

28. 计算: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2000}}$.

29. 定义一种新运算“*”: $x * y = \frac{1}{xy} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+A}$. 已知: $2 * 1 = \frac{4}{3}$, 求 $1997 * 1998$ 的值.

(结果写成分数形式)

Handwritten solution for problem 29:

$$2 * 1 = \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{1+A} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1+A}$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{1}{1+A} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{1+A} = \frac{4}{3} - \frac{5}{6} = \frac{8}{6} - \frac{5}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$1+A = 2 \implies A = 1$$

Then for $1997 * 1998$:

$$\frac{1}{1997 \times 1998} + \frac{1}{1997+1} + \frac{1}{1998+1}$$

$$= \frac{1}{1997 \times 1998} + \frac{1}{1998} + \frac{1}{1999}$$

30. 有人编了一个程序:从 1 开始,交替地做加法或乘法,第一次可以是加法,也可以是乘法,每次加法,将上次运算结果加 2 或加 3,每次乘法,将上次运算结果乘 2 或乘 3.例如,30 可以这样得到: $1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{+2} 10 \xrightarrow{\times 3} 30$.

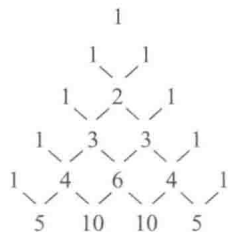
(1) 证明可以得到 22;

(2) 证明可以得到 $2^{100} + 2^{97} - 2$.

第二节 整 式

1. 下面结论中正确的是 (A).
- A. 单项式与单项式的差一定是单项式 ✓
 B. 一个 5 次多项式与一个 4 次多项式的和是 9 次多项式
 C. 两个 5 次多项式的和是不低于 5 次的多项式
 D. 两个 5 次多项式的和是不高于 5 次的整式
2. 若 $2x+5y+4z=6, 3x+y-7z=-4$, 那么 $x+y-z$ 的值是 ().
- A. -2 B. 0 C. 2 D. 4
3. 已知 m 是有理数, $|m-2|+|m-4|+|m-6|+|m-8|$ 的最小值是 ().
- A. 4 B. 6 C. 8 D. 12
4. 已知 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{1996}, a_{1997}$ 均为正数, 又 $M=(a_1+a_2+a_3+\dots+a_{1996})(a_2+a_3+\dots+a_{1997})$, $N=(a_1+a_2+a_3+\dots+a_{1997})(a_2+a_3+\dots+a_{1996})$, 则 M 与 N 的大小关系是 ().
- A. $M=N$ B. $M<N$ C. $M>N$ D. 关系不确定
5. 已知 $m=1996+1995 \times 1996+1995 \times 1996^2+\dots+1995 \times 1996^{1994}+1995 \times 1996^{1995}$, $n=1996^{1996}$, 则 m 与 n 满足的关系是 ().
- A. $m=n+1995$ B. $m=n+1996$ C. $m=n$ D. $m=n-1996$
6. 设 $P=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$, $Q=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 则 $P-Q$ 的结果是 ().
- A. $20x^3+50x$ B. $2x^3+5x$
 C. $2x^4+100x$ D. 以上答案都不对
7. 已知 $x-y=a, z-y=10$, 则代数式 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ 的最小值为 ().
- A. 75 B. 80 C. 100 D. 105
8. 已知 $a+b+c=3, a^2+b^2+c^2=3$, 则 $a^{1995}+b^{1995}+c^{1995}$ 的值是 ().
- A. 0 B. 3 C. 6 D. 3^{1995}
9. 设 $x=1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-\dots-1988^2+1989^2$, 以 1991 除 x , 所得的余数是 ().
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4
10. 已知 $a(x-5)^3+b(x-5)^2+c(x-5)+d=x^3$, 则常数 a, b, c, d 中值最大的是 ().
- A. a B. b C. c D. d
11. 在方程组 $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^3+y^3+z^3=-36 \end{cases}$ 中, x, y, z 是互不相等的整数, 则此方程组解的组数为 ().
- A. 6 组 B. 3 组 C. 多于 6 组 D. 少于 3 组

12. 若 $a^2+a+1=0$, 则 $a^{2000}+a^{1998}+a^{1996}+3$ 的值为().
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
13. 已知 $x+y-2$ 是二元二次方程 $x^2+axy+by^2-5x+y+6=0$ 的一个因式, 则 ab 为().
 A. -2 B. 2 C. 4 D. 8
14. 乘积 $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{9^2})(1-\frac{1}{10^2})$ 等于().
 A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{11}{20}$ D. $\frac{2}{3}$
15. 5 个连续自然数的平方和满足().
 A. 能被 10 整除 B. 能被 3 整除 C. 能被 5 整除 D. 能被 6 整除
16. 在多项式 $1993u^m v^n + 3x^m y^n + u^{3m} v^{2n} - 4x^{n-1} y^{2m-4}$ (其中 m, n 为正整数) 中, 恰有两项是同类型项, 则 $mn =$ _____.
17. 当 $a = -0.2, b = 0.04$ 时, 多项式 $\frac{72}{73}(a^2 - b) - \frac{71}{72}(b + a + 0.16) - \frac{1}{4}(a + b)$ 的值是 _____.
18. 若 $3x+2y+4z=4, x-y+z=2$, 那么 $x+4y+2z =$ _____.
19. 如果 $y = |x+1| - 2|x| + |x-2|$, 且 $-1 \leq x \leq 2$, 那么 y 的最大值是 _____.
20. 已知:
$$\begin{cases} -a+b+c+d=x, \\ a-b+c+d=y, \\ a+b-c+d=z, \\ a+b+c-d=w, \end{cases}$$
 且 $b \neq 0$, 若 $x-y+z+w=kb$, 则 k 的值是 _____.
21. 将 $1, 2, 3, \dots, 100$ 这 100 个自然数任意分成 50 组, 每组两个数, 现将每组的两个数中的一个数记作 a , 另一个记作 b , 代入代数式 $\frac{1}{2}(|a-b| + a + b)$ 中进行计算, 求出其结果, 50 组都代入后可求得 50 个值, 这 50 个值的和的最大值是 _____.
22. 若 a, c, d 是整数, b 是正整数, 且满足 $a+b=c, b+c=d, c+d=a$, 则 $a+b+c+d$ 的最大值是 _____.
23. 已知 $A = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)+1$, 那么 A 的个位数字是 _____.
24. 若多项式 $x^4+mx^3+nx-16$ 含有因式 $x-1$ 和 $x-2$, 则 $mn =$ _____.
25. $(a+b)^n$ 的展开式中各项的系数, 当 $n=1, 2, 3, \dots$ 时可以写成“杨辉三角”的形式(如图). 请借助“杨辉三角”, 求出 1.01^9 的值为 _____ (结果保留四位有效数字).
26. 若 $(a-c)^2 - 4(a-b)(b-c) = 0$, 则 $a-2b+c =$ _____.
27. 若 $a^2+b^2=1, c^2+d^2=1, ad+bc=0$, 则 $ab+cd =$ _____.
28. 已知 $x^2+x-1=0$, 则 x^8-7x^4+11 的值为 _____.



第 25 题

29. 设 a, b, c, d 都是整数, 且 $m = a^2 + b^2, n = c^2 + d^2$, 则 mn 也可以表示成两个整数的平方和, 其形式是_____.
30. 已知 $a + b + 2c = 1, a^2 + b^2 - 8c^2 + 6c = 5$, 那么 $ab - bc - ca$ 的值是_____.
31. 若 $M = \frac{(|a+1| + |b-1|)^2 - (a+b)^2}{(a+1)(b-1)}$, 则 $M(M+4) =$ _____.
32. 已知 $\frac{1}{a} - |a| = 1$, 一个正方形的边长为 $\frac{1}{a} + |a|$, 那么, 这个正方形的面积为_____.
33. 设 $M = 24 \times 25 \times 26 \times 27 + 1$, 则 M 是_____的平方.
34. 分解因式: $x^2 - 2xy - 8y^2 - 2x + 14y - 3 =$ _____.
35. 分解因式: $(x+1)(x+2)(x+3) - 6 \times 7 \times 8 =$ _____.
36. 若 $a - b = -1, c - b = 1$, 则 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc =$ _____.
37. 分解因式: $(a+b-2ab)(a+b-2) + (1-ab)^2 =$ _____.
38. 若 $x + y + z = 0$, 则分解因式 $x^3 + y^3 + z^3 =$ _____.
39. 若 m, n 是整数, 且 $n^2 + 3m^2n^2 - 30m^2 = 517$, 则 $3m^2n^2$ 的值为_____.
40. 证明: 四个连续整数的积加上 1 是一个整数的平方.

41. 已知 $a + b + c = 1, a^2 + b^2 + c^2 = 2, a^3 + b^3 + c^3 = 3$, 求代数式 $ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c)$ 的值.



42. 已知 a, b, c, d 满足 $a + b = c + d, a^3 + b^3 = c^3 + d^3$. 求证: 对于任意正奇数 n , 都有 $a^n + b^n = c^n + d^n$.

43. 已知 $2x-3$ 和 $3x+1$ 是 $ax^3+bx^2+32x+15$ 的因式, 求 a, b 的值.

44. 已知 a, b, c 为三角形的三边长, 且满足: $a^3+b^3+c^3=3abc$, 试判断三角形的形状.

45. 已知 a, b 均是自然数, 且 $a^2-b^2=63$, 求 a, b 的值.

46. 证明:

(1) 若 n 为整数, 则 $(2n+1)^2-(2n-1)^2$ 一定是 8 的倍数;

(2) 若 n 为整数, 则 n^3-n 的值必是 6 的倍数;

第三节 分 式

1. 若 $a + \frac{9}{b} = 3, b + \frac{1}{c} = 3$, 则 $c + \frac{1}{a}$ 的值是().
 A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. 6 D. $\frac{10}{3}$
2. 已知 $abc = 1$, 则 $m = \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1}$ 的值为().
 A. 1 B. $\frac{1}{3}$ C. -6 D. $-\frac{1}{6}$
3. 如果 $\frac{x+3}{x(2x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{2x-1} + \frac{c}{(2x-1)^2}$, 则 b 的值是().
 A. 6 B. $\frac{1}{3}$ C. -6 D. $-\frac{1}{6}$
4. 当 $a < b < c$ 时, $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$ 的值是().
 A. 正数 B. 负数 C. 0 D. 无法确定
5. 若 $a + b + c = 0, abc \neq 0$, 则 $a(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}) + b(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}) + c(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) + 3$ 的值为().
 A. 0 B. 1 C. -1 D. 不确定
6. 已知 $\frac{xy}{x+y} = 1, \frac{yz}{y+z} = 2, \frac{zx}{z+x} = 3$, 则 x 的值为().
 A. 1 B. $\frac{12}{5}$ C. $\frac{5}{12}$ D. -1
7. 要使分式 $\frac{1}{\frac{1-|x|}{|x|}}$ 有意义, 则 x 的取值范围是().
 A. $x \neq 0$ B. $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$ C. $x \neq 1$ 或 $x \neq \pm 1$ D. $x \neq 0$ 且 $x \neq \pm 1$
8. 若对于 ± 3 以外的一切数, $\frac{m}{x+3} - \frac{n}{x-3} = \frac{8x}{x^2-9}$ 均成立, 则 mn 的值是().
 A. 8 B. -8 C. 16 D. -16
9. 若 $abc \neq 0$, 且 $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$, 那么 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ 的值是_____.
10. 若 $\frac{a+b+c}{d} = \frac{a+b+d}{c} = \frac{a+c+d}{b} = \frac{b+c+d}{a} = k$, 则 $k =$ _____, $\frac{a+b+c+d}{a+b+c-d} =$ _____.
11. 若 $a^2 + 4a + 1 = 0$, 且 $\frac{a^4 + ma^2 + 1}{2a^3 + ma^2 + 2a} = 3$, 则 m 的值是_____.

12. 若 $\frac{y+z}{x} = \frac{x+z}{y} = \frac{x+y}{z}$, 则 $\frac{y+z}{x}$ 的值为_____.

13. 若关于 x 的恒等式 $\frac{Mx+N}{x^2+x-2} = \frac{2}{x+a} - \frac{c}{x+b}$ 中, $\frac{Mx+N}{x^2+x-2}$ 为最简分式, 且有 $a > b, a+b=c$, 则 $N =$ _____.

14. 若 $a \neq 0, b \neq 0$, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2(a+b)}{a^2+b^2} = 0$, 则 $\frac{a}{b}$ 的值是_____.

15. 已知 $a^2 - 3a + 1 = 0$, 则代数式 $\frac{a^3}{a^6+1}$ 的值为_____.

16. 化简 $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{4x^3}{x^4+1} =$ _____.

17. 设 x, y, z 是三个互不相等的数, 且 $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$, 则 $xyz =$ _____.

18. 已知: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$, 求: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ 的值.



19. 已知 $a+b+c=0$, 试求 $\frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ac} + \frac{c^2}{2c^2+ab}$ 的值.

20. 已知 $xyz=1, x+y+z=2, x^2+y^2+z^2=3$, 求 $\frac{1}{xy+z-1} + \frac{1}{yz+x-1} + \frac{1}{zx+y-1}$ 的值.

21. 已知 $\frac{x+y-z}{z} = \frac{x-y+z}{y} = \frac{-x+y+z}{x}$, 且 $xyz \neq 0$, 求分式 $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$ 的值.

22. 设 a, b, c 都是正实数, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$, 求证: $a = b = c$.

23. 设 a, b, c 都不为零, 且 $a + b + c = 2$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$, 证明: a, b, c 中至少有一个等于 2.

24. 若 $\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0$, 求证: $\frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0$.

25. 已知: $a_1 = x, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$,

(1) 求 a_2, a_3, a_4, a_5 ;

(2) 求 a_{2008} .