为经济类、管理类各专业的全国硕士研究生入学考试而编写
针对考试大纲对典型试题进行考点分析，详细解答，方法点击
结合阅卷经验着重分析考试中出现的典型错误

考研数学试题

典型错误辨析

数学三

张天德 吕洪波 叶 宏 张德瑜 编著

清华大学出版社

考研数学试题典型错误辨析

数学三

张天德 吕洪波 叶 宏 张德瑜 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书结合作者数十年的阅卷经验，归纳、分析了在近十多年全国硕士研究生入学统一考试数学试题的解答过程中考生所出现的典型错误，以帮助备考的考生有意识地发现自己在对知识点的理解和考点的表现方式方面所存在的缺陷.此书是针对经济、管理类各专业的考生(选择数学三试卷)而编写的，共安排三个部分：微积分、线性代数、概率论与数理统计.为了便于考生与自己的解答相对照并且能够达到知其所以然的目的，对于所选择的真题，在给出题目后，首先进行"考点分析"，然后给出详细解答，再通过"方法点击"加以提炼，最后列出"典型错误"并给出出错的原因分析.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售.
版权所有，侵权必究. 侵权举报电话：010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

考研数学试题典型错误辨析. 数学三/张天德等编著. —北京：清华大学出版社，2017
ISBN 978-7-302-47555-2

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 140674 号

责任编辑：刘 颖
封面设计：常雪影
责任校对：赵丽敏
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦A座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市金元印装有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm **印 张**：14 **字 数**：335千字
版 次：2017年7月第1版 **印 次**：2017年7月第1次印刷
定 价：45.00元

产品编号：075084-01

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前言

Foreword

为了帮助广大考生能够在较短的时间内,准确理解和熟练把握考研数学的命题方式和解题规律,全面提高解题能力和应考能力,在最短的时间内轻松夺取考研数学高分,我们严格依据教育部制定的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》,邀请到众多有着丰富命题、阅卷和辅导经验的一线名师精心编写了这本《考研数学试题典型错误辨析》.

历年的考研真题完全反映了考研命题的指导思想、基本原则和出题趋势,是教育部考试中心一届又一届命题组老师们精挑细选出极具典型性和代表性的题目.历年来,研究生入学考试数学各学科知识点没有太大的变化,而且各学科考查的重点、难点比较稳定,在以往考试中会反复考查.通过反复研究真题,考生可以从中发现规律,归纳出考查的重点、难点及常考题型,准确把脉定位自己的薄弱环节,进一步明确复习方向.而辨析以往试卷中的典型错误,能够最有效地暴露自己的不足和复习时的误区,提供更有效的复习思路和策略.本书包含十几年的考研真题,答案解析扼要翔实,方法指导高屋建瓴,考点总结提纲挈领,典型错误辨析全面,能极大地提高考生的解题技巧和思维方式,全面提升考生的数学素养和能力.

本书主要特点是:

1. 全面归纳总结:既有对考点分布的汇总和常考知识点的归纳,也有对重要题型的解题思路、解题方法和答题技巧的深层次总结.据此考生不仅可以从全局上对考试要点有整体性的把握,更可以纲举目张,系统地把握数学知识的内在逻辑性.

2. 互动能力提升:每套试卷的每个题目,从知识点到思路再到方法都给出了翔实的点拨,部分难题、大题给出了多种解法,真正把每一个题目研究透.通过对本书真题的研习,考生可以切实掌握考研数学的重点、难点以及深度,真正吃透题目解法,达到考试时胸有成竹的境界.

3. 深入剖析错误:根据编者多年的研究生入学考试数学阅卷经验,本书将各种典型错误解法放在相应的题目解答后面,培养思考错题、分析错题、善待错题的态度和习惯.这样考生可避免再犯同类的错误,杜绝失分现象,有效减少失分.

4. 栏目实用生动:每道题目分为【考点分析】【解】【方法点击】【典型错误】几个特色板块:

【考点分析】从命题人的角度给出了想要考查的知识点,让考生掌握考研

数学应该复习的重点内容.从解题思路层面解析每一个题目,使考生不仅会做题目,而且会分析题目并会做同样类型的题目;

【解】全面翔实的解题过程;

【方法点击】就试题解答中所采用的方法进行总结,从解题的角度串起不同的知识点,使考生在潜移默化中培养数学思维模式.

【典型错误】研习错误解法也是一种重要的学习方法.编者根据多年的考研阅卷工作的经验,总结了考试时往年考生常见的错误,研习他人和自己可能犯的错误,就能进一步明辨是非,不再重蹈覆辙.

阅读本书时,应先自己动手做题,再将自己的结果与本书中的解法相比较.考生从平时就要加强对自己计算能力的训练,同时尽量按步骤把每一个题目的解答过程写下来,一来避免出错,二来养成卷面整洁的习惯.另外我们建议考生把本书的全部试题做 2～3 遍,通过反复练习,把不明白的地方真正弄明白,达到看到类似的题目就能想到解题思路的地步,才可以在最后的考试中做到胸有成竹.

本书由张天德、吕洪波、叶宏、张德瑜编著.衷心希望我们的这本《考研数学试题典型错误辨析》能对您有所裨益.祝愿所有备考硕士研究生入学考试的学子们获取高分,心想事成!

2017 年 4 月

目录

CONTENTS

第一部分

微积分

一、函数 极限 连续

（一）内容概括

函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，复合函数、反函数、分段函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，函数关系的建立，数列极限与函数极限的定义及其性质，函数的左极限和右极限，无穷小和无穷大的概念及其关系，无穷小的性质及无穷小的比较，极限的四则运算，极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

函数连续的概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质.

（二）考试要求

最新颁布的全国硕士研究生入学考试大纲（数学三）中对函数、极限、连续这部分内容的要求是：

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质.

（三）真题解析

例 1（2014 年） 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a\neq 0$，则当 n 充分大时有（　　）.

(A) $|a_n|>\frac{|a|}{2}$　　(B) $|a_n|<\frac{|a|}{2}$　　(C) $a_n>a-\frac{1}{n}$　　(D) $a_n<a+\frac{1}{n}$

【考点分析】 极限的性质及定义.

【解】 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n-a|<\varepsilon,\quad 即\quad a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon,$$

则$|a|-\varepsilon<|a_n|\leqslant|a|+\varepsilon$，取 $\varepsilon=\frac{|a|}{2}$，则知$|a_n|>\frac{|a|}{2}$.

故应选(A).

【方法点击】 本题也可以利用极限的保号性推论：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$，则$\exists N$，当$n>N$时，

$$|a_n|>\lambda|a|,\quad 0<\lambda<1.$$

【典型错误】 本题考查极限的性质，考生出错的主要原因是对极限的性质没有真正理解.

例 2(2012 年) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$________.

【考点分析】 未定式的极限；洛必达法则.

【解】 **解法一** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{\cos x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}}{-\sin x-\cos x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{(\sin x+\cos x)\cdot\sin x\cdot\cos x}}=e^{-\sqrt{2}}.$$

解法二 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}[1+(\tan x-1)]^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x-\sin x}\ln[1+(\tan x-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x}{-\sin x-\cos x}}=e^{-\sqrt{2}}.$$

【方法点击】 注意到本题为1^{∞}型未定式，即幂指函数的极限，请先化为指数函数形式，再求极限.

【典型错误】 本题的主要出错点在于有的考生利用等价无穷小替换$\tan x\sim x$，$\sin x\sim x$来化简，从而导致错误. 请考生一定要记住：当无穷小量$\varphi(x)$作为因子出现在极限式中时，才能利用它的等价无穷小量来代换.

例 3(2016 年) 已知函数$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

【考点分析】 函数的极限.

【解】 由于当$x\to 0$时，$\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1\sim\frac{1}{2}f(x)\sin 2x$，$\sin 2x\sim 2x$，$e^{3x}-1\sim 3x$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{3}=2,$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6$.

【方法点击】 牢记下列等价无穷小结果：

当$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

当$\alpha(x)$为无穷小时，上面等价无穷小结果中的x都可换为$\alpha(x)$，如$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$.

【典型错误】 未定式的极限常用等价无穷小替换，本题中部分同学对于$\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1\sim\frac{1}{2}f(x)\sin 2x$不熟悉，容易出错. 另由于不知$f(x)$是否可导，故不能用洛必达法则.

例 4(2007 年) 当$x\to 0^+$时，与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是(　　).

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　　　　(B) $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　　　　　　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

【考点分析】 本题考查等价无穷小的判断，利用洛必达法则或等价无穷小代换即可.

【解】 **解法一**　当 $x\to 0^+$ 时,

$$1-e^{\sqrt{x}}\sim -\sqrt{x},\quad \sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x},\quad 1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\frac{1}{2}x,$$

故用排除法可得正确选项为(B).

解法二　$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=$

1，或 $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln(1+x)-\ln(1-\sqrt{x})=x+o(x)+\sqrt{x}+o(\sqrt{x})=\sqrt{x}+o(\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$.

故应选(B).

【方法点击】 利用等价无穷小代换可简化计算. 如果利用定义则需求多个未定式的极限，计算量较大. 考生需要记住几个常用的等价无穷小代换. 如，当 $\varphi(x)\to 0$ 时，$\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$，$\tan\varphi(x)\sim\varphi(x)$，$\ln[1+\varphi(x)]\sim\varphi(x)$，$1-\cos\varphi(x)\sim\frac{1}{2}[\varphi(x)]^2$，$e^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)$，$[1+\varphi(x)]^{\alpha}-1\sim\alpha\varphi(x)$，$\arcsin\varphi(x)\sim\varphi(x)$，$\arctan\varphi(x)\sim\varphi(x)$等.

【典型错误】 本题在求极限时，有的考生是利用洛必达法则，但在计算过程中因为粗心导致错误. 希望考生在复习时注意自己计算能力的培养.

例 5(2016 年)　极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$________.

【考点分析】 数列的极限，定积分的定义，定积分的分部积分法.

【解】 由定积分定义知

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)\\&=\int_0^1 x\sin x\,dx=-\int_0^1 x\,d\cos x=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x\,dx\\&=-\cos 1+\sin x\Big|_0^1=\sin 1-\cos 1.\end{aligned}$$

【方法点击】 ① 利用定积分定义可求数列和式的极限.

若 $f(x)$在$[a,b]$上可积，把区间$[a,b]$进行 n 等分，记 $\xi_i=a+\dfrac{b-a}{n}i$，$\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$，则

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i&=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\left[f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+2\cdot\frac{b-a}{n}\right)+\cdots+f\left(a+n\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right]\\&=\int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

② 定积分的分部积分法：若 $u(x)$，$v(x)$可导，则

$$\int_a^b u(x)\,dv(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\,du(x).$$

例 6(2007 年) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$渐近线的条数为( ).

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【考点分析】 曲线渐近线的求法.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=0$,所以 $y=0$ 是曲线的水平渐近线;

$x=0$ 是间断点,由于 $\lim\limits_{x\to0}y=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\infty$,所以 $x=0$ 是曲线的垂直渐近线;

又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)}{x}=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right]=0,$$

所以 $y=x$ 是曲线的斜渐近线.故应选(D).

【方法点击】 应熟练掌握曲线的水平渐近线、垂直渐近线和斜渐近线的求法.并注意当 $x\to+\infty$,$x\to-\infty$时的情形不同.

① $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)}f(x)=A\Rightarrow y=A$ 是水平渐近线;

② $\lim\limits_{x\to a^+(a^-)}f(x)=\infty\Rightarrow x=a$ 是垂直渐近线;

③ $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)}[f(x)-ax]=b\Rightarrow y=ax+b$ 是斜渐近线;

④ 务必牢记无论求哪种渐近线都应利用单侧极限.否则将导致错误.

比如:求曲线 $y=x-2\arctan x$ 的渐近线.

由于函数 $y=x-2\arctan x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,因此曲线没有垂直渐近线;

又 $\lim\limits_{x\to\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(x-2\arctan x)$,极限不存在,于是曲线也没有水平渐近线;

下面求斜渐近线,因为 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\arctan x}{x}=1$,则

$$b=\lim_{x\to\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(x-2\arctan x-x)=-2\lim_{x\to\infty}\arctan x,$$

显然极限不存在.所以曲线也没有斜渐近线.

事实上曲线没有水平及垂直渐近线,但有斜渐近线.出现错误的原因在于求 b 时没有利用单侧极限.正确解法应该为:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2\arctan x}{x}=1,\quad k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2\arctan x}{x}=1,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(y(x)-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}(x-2\arctan x-x)=-2\lim_{x\to+\infty}\arctan x=-2\cdot\frac{\pi}{2}=-\pi,$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(y(x)-k_2x)=\lim_{x\to-\infty}(x-2\arctan x-x)=\lim_{x\to-\infty}(-2\arctan x)=-2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\pi,$$

因此曲线 $y=x-2\arctan x$ 有两条斜渐近线:$y_1=k_1x+b_1=x-\pi$,$y_2=k_2x+b_2=x+\pi$.

【典型错误】 有些考生在本题求水平渐近线的时候直接求$\lim\limits_{x\to\infty}y(x)$，得到极限不存在，而认为不存在水平渐近线，其实，$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$和$\lim\limits_{x\to-\infty}y(x)$在求水平渐近线的时候要分开考虑，有一个存在即有一条水平渐近线，若两个都存在且不等则意味着有两条水平渐近线(如$y=\arctan x$). 同样的，在求垂直渐近线的时候也只要在函数的间断点处求单侧极限即可.

例 7(2009 年) 当$x\to0$时，$f(x)=x-\sin ax$与$g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小，则( ).

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$ (B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$

(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$ (D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

【考点分析】 本题考查等价无穷小概念及极限的求法，这两个知识点经常考到，应引起足够的重视.

【解】 由条件知：$f(x)=x-\sin ax$与$g(x)=x^2\ln(1-bx)$在$x\to0$时为等价无穷小，则

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2(-bx)}$$

$$\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}}\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}=-\frac{1}{3b}\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{x^2}=1,$$

其中$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}=1$蕴涵了：$1-a\cos ax\to0(x\to0)$，故$a=1$$\left(\text{否则，}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty\text{，这与当}\right.$

$\left.x\to0\text{ 时，}f(x)\text{与 }g(x)\text{为等价无穷小矛盾}\right)$，于是

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{-3bx^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{-3bx^2}=-\frac{1}{6b}=1,\quad \text{所以 } b=-\frac{1}{6}.$$

故应选(A).

【方法点击】 本题是利用等价无穷小代换及洛必达法则求a,b的值；也可利用等价无穷小代换及泰勒公式求得结果. 再次强调：一般当无穷小量$\alpha(x)$作为因子(不论是分子或分母中的因子)出现在极限式中时，才可用它的等价无穷小量来代换，否则易出错，如：

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\xlongequal[\text{代换}]{\text{等价无穷小}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}0=0$，这种解法是错误的.

正确解法之一为

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

出现以上错误的原因是：$\tan x$与$\sin x$不是因子，不能用其等价无穷小代换.

【典型错误】 本题有两种错法：

① 若忽视了洛必达法则的使用前提必须是$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型，则会漏掉$a=1$这一结果，仅能得到$-\dfrac{a^3}{6b}=1$，从而有可能错选(D).

② 本题还有一种常见错误在于等价无穷小代换的不恰当应用，即

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{x-ax}{x^2(-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{(1-a)x}{-bx^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-a}{-bx^2},$$

致使题目无法顺利解答.

例 8(2010 年)　若$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$,则 a 等于(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【考点分析】　函数的极限.

【解】　**解法一**　因为$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)e^x\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{axe^x+1-e^x}{x}=\lim\limits_{x\to0}(ae^x+axe^x-e^x)=$ $a-1$,由题设条件知 $a-1=1$,即 $a=2$.

解法二　$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)e^x\right]=\lim\limits_{x\to0}\left(ae^x+\dfrac{1-e^x}{x}\right)=a+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x}{x}=a-1.$

由 $a-1=1$ 知 $a=2$.

故应选(C).

【方法点击】　对于已知极限值反求极限式中参数的命题,当极限式为未定式时,可以利用洛必达法则直接求解,也可以利用等价无穷小化简后求解,或者利用极限的基本结论:

已知　$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$,则有:

① 当 $x\to x_0$ 时,若 $g(x)\to0$,则必有 $f(x)\to0$;

② 当 $x\to x_0$ 时,若 $f(x)\to0$ 且 $A\neq0$,则必有 $g(x)\to0$.

【典型错误】　在利用等价无穷小代换时,有的考生将 $x\to0$ 时,$1-e^x$ 的等价无穷小错记为 x,从而由 $a+1=1$,得到错误选项(A).

例 9(2014 年)　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

【考点分析】　本题考查变上限定积分求导及未定式求极限.

【解】　**解法一**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\left\{x^2\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]-x\right\}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}+x^2\cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

解法二

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x\right]\end{aligned}$$

$$\xlongequal{令 u=\frac{1}{x}} \lim_{u\to 0^+}\frac{e^u-1-u}{u^2}$$

$$=\lim_{u\to 0^+}\frac{e^u-1}{2u}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

【方法点击】 ① 本题将未定式极限与积分上限函数求导结合在一起考查,属于常见的命题方式.

② 利用洛必达法则求极限时,要注重多种方法的综合运用,如等价无穷小代换、泰勒公式、变量代换等.

【典型错误】 有的考生在求极限过程中,没有先将 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 在 $x\to\infty$ 时用其等价无穷小 $\frac{1}{x}$ 代替后再用洛必达法则,而是直接用洛必达法则对 $x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 进行求导;由于求导过程中粗心导致结论错误.

例 10(2015 年) 设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$, $g(x)=kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时为等价无穷小,求 a,b,k 的值.

【考点分析】 本题考查等价无穷小的概念,洛必达法则. 利用等价无穷小的定义写出极限表达式:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=1$,再由极限逆问题求 a,b,k 的值.

【解】 **解法一** 由题设条件,知

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}\xlongequal{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2},$$

由该式,知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{a}{1+x}\right)=1+a=0$,则 $a=-1$. 代入上式知

$$1=\frac{1}{3k}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{x^2}=\frac{1}{3k}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{2x}.$$

若使该式成立,则必有

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x\right]=1+2b=0,$$

则 $b=-\frac{1}{2}$. 再将 $b=-\frac{1}{2}$ 代入,得原式化为

$$1=\frac{1}{6k}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\cos x+\frac{1}{2}x\sin x}{x}$$

$$=\frac{1}{6k}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2}{(1+x)^3}+\sin x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x}{1}=-\frac{1}{3k},$$

解得 $k=-\frac{1}{3}$,即 $a=-1$, $b=-\frac{1}{2}$, $k=-\frac{1}{3}$.

解法二 由于 $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$，$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$，根据题意知

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]+bx\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]}{kx^3}$$

$$=\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{(1+a)x+\left(b-\frac{1}{2}a\right)x^2+\frac{a}{3}x^3-\frac{b}{3!}x^4+o(x^3)}{x^3}.$$

欲使上式成立，则必有

$$\begin{cases}a+1=0,\\ b-\frac{1}{2}a=0,\\ \frac{a}{3k}=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1,\\ b=-\frac{1}{2},\\ k=-\frac{1}{3}.\end{cases}$$

【方法点击】 已知极限存在或已知极限值求其表达式中的待定常数这类问题称为极限的逆问题.解答这类问题的一般思路为：

① 将所给极限式利用洛必达法则或泰勒展开式进行化简.

② 利用“当 $\lim\limits_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\square}g(x)$ 同时为零式或同时不为零”；如若 $\lim\limits_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在且 $\lim\limits_{x\to\square}g(x)=0$，则必有 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=0$，由此建立含有待定常数的关系式或方程组，便可求得参数值.

【典型错误】 有的考生没有真正理解洛必达法则的含义及利用条件，因此未求出待定常数.

例 11(2006 年) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$______.

【考点分析】 数列的极限.

【解】 **解法一** 由于

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2}=1,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1$.

解法二 由于 $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}\leqslant\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}\leqslant\frac{n+1}{n}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，故由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1$.

【方法点击】 给定数列 $\{a_n\}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 的方法，除了利用极限四则运算法则外，对于那些连加的数列，也可采用相应的方法.

① 利用夹逼准则计算.

例如：求$\lim\limits_{n\to\infty}(1^n+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$.

因为$4^n<(1^n+2^n+3^n+4^n)<4\times4^n$，于是$4<(1^n+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}<4^{\frac{n+1}{n}}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}4=4$，$\lim\limits_{n\to\infty}4^{\frac{n+1}{n}}=4$，故$\lim\limits_{n\to\infty}(1^n+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}=4$.

② 利用海因定理求极限，即将数列转化为相应函数，然后利用函数极限的求法(例如：洛必达法则)求极限，则该函数极限也就是数列的极限.

例如：求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right]^{n^2}$，考虑

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x-x}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}}=e^{\frac{1}{3}}\quad\left(其中\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x}{3x^2}=\frac{1}{3}\right).$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{\frac{1}{3}}$.

③ 利用定积分定义求极限.

例如，求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

【典型错误】 部分考生对夹逼准则或奇偶子数列求极限掌握得不好，导致本题错误.

例 12(2010 年) 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【考点分析】 未定式的极限.

【解】 解法一 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}}$.

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{x}}-1}\cdot x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x(x^{\frac{1}{x}}-1)}\quad(因\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1).$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x\cdot\frac{\ln x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}=-1.$$

所以$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}$.

解法二 当$x\to+\infty$时，$x^{\frac{1}{x}}-1\sim\frac{\ln x}{x}$，则

$$\lim_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln\ln x-\ln x}{\ln x}}.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com