高等数学一

主　编　魏悦姿　傅洪波
副主编　袁　伟　赵箭光

科学出版社

高等数学一

主　编　魏悦姿　傅洪波
副主编　袁　伟　赵箭光
参　编　鲁　娜　丁有得　汪　峰

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是为了适应新形势下高等院校通识教育类课程改革的需要，按照高层次工科专门人才的能力与素质要求，以及所必须具有的微积分知识编写而成的. 全书主要内容包括函数与极限、连续性，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，常微分方程等，且在大部分章节的最后增加了数学模型与 MATLAB 语言的简单介绍，书末附有习题答案及常用公式等.

本书的内容与方法可广泛适用于生物医学、临床医学、心理学、医疗卫生保健、经济学等自然科学与社会科学的多学科、多专业、多层次的需要，可作为高等院校理工科及医科院校等非数学专业的高等数学教材及学习参考书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学.一 / 魏悦姿，傅洪波主编. —北京：科学出版社，2018.10

ISBN 978-7-03-058390-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①魏… ②傅… Ⅲ. ①高等数学 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 170643 号

责任编辑：滕亚帆　李　萍 / 责任校对：郭瑞芝

责任印制：吴兆东 / 封面设计：华路天然设计工作室

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2018 年 10 月第　一　版　开本：787 × 1092　1/16

2018 年 10 月第一次印刷　印张：21

字数：500 000

定价：53.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

谨以此书为广州医科大学60华诞献礼!

前　言

高等数学的主要内容是微积分学，如今微积分在几乎所有的科学领域里得到了广泛的应用，如在自然科学、生物医学、社会科学和人文科学等领域里发挥了巨大的作用，其最大功能就是建模，通过建模把实际问题理论化，然后用数学工具进行分析，从而为一些发展现象提供模型以预测未来的变化趋势,避免了反复试验的麻烦和困难. 由此可见，高等数学是大学教育，特别是理工类教育不可或缺的知识环节，学好高等数学就理工科学生而言，既是其后续学习的坚实起点又是制高点，甚至是大学教育成败的分水岭.

本书是编者们在多年教学的基础上，按照突出数学概念、数学思想和数学方法、淡化运算技巧、强调应用实例的原则，在经典教材的理论框架下编写而成的. 同时，从对学生的“知识贡献、能力贡献、素质贡献”出发，精心设计和安排了本书的内容体系和框架，以突出“培养创新精神和实践应用能力为核心”的指导思想. 在编写过程中突出以下特色.

1. 注重概念的理解和数学思想的建立,注重逻辑的渐进性与思想的宏观性有机结合，逐步帮助学生建立对概念微观认知和数学思想的整体理解，实现既见“树”又见“林”的学习效果.

2. 注重基础知识和解题能力训练相结合，例题和习题贴近实际，实用性、针对性强；方便学生学练结合，及时检验学习效果，增强学习的适应能力和信心.

3. 注重内容讲解的平易性和连贯性，但又不失逻辑严密性，在经典例题的深度解析和细致叙述中，培养学生深入理解和综合运用知识的能力.

4. 每章最后增加了数学模型与 MATLAB 语言的简单介绍，既把高等数学和实际应用相结合，体现高等数学从实践中来到实践中去的发展脉络，也让学习者体验到高等数学强大的应用价值，提升学习兴趣，为参加数学建模竞赛等课外科技活动的学生拓宽了知识面. 本书部分内容标了“*”，可供学生自主学习及作为课外拓展阅读资料.

由于编写时间较仓促和编者的能力所限，本书中难免存在不足之处，敬请读者批评指正.

在此，特别感谢广州医科大学基础学院物理教研室全体教师对本书编写的付出!同时也感谢 2015 级—2017 级生物医学工程专业、食品质量与安全专业毛广娟、高慧等同学的支持和帮助!

编　者

2018 年 5 月于广州

目　　录

第一章　函数与极限、连续性

17 世纪初，伽利略从对天文学等问题的研究中引出了函数的概念. 高等数学主要研究对象是函数，而极限是研究函数的主要工具，掌握和运用好极限方法是学好微积分的关键. 本章在中学数学的基础上介绍函数、极限、函数连续性的基本知识和方法，为高等数学的学习打好必要的基础.

第一节　函　　数

本节将介绍函数的概念与函数的一些特性.

一、实数与区间

人们在公元前三千年前最先认识了自然数 $1,2,3,\cdots$ 之后，数的范围伴随人类文明的发展不断扩展. 由加法运算、乘法运算与减法运算是否封闭的探索，从自然数集扩展到整数集，再从整数集扩展到有理数集，又把有理数集扩展到实数集. 有理数与无理数的全体称为**实数**. 实数集不仅对四则运算是封闭的，而且对开方运算也是封闭的. 可以证明，实数点能铺满整个数轴，而不会留下任何空隙，此即所谓实数的**连续性**.

任给一个实数，在数轴上就有唯一的点与它对应；反之，数轴上任意的一个点也对应着唯一的一个实数，可见实数集等价于整个数轴上的点集. 本书如无特别说明，则讨论变量的范围主要是实数集，提到的数均为实数. 为了叙述方便，重申中学学过的几个特殊实数集的记号：自然数集记为 $\mathbf{N}$，整数集记为 $\mathbf{Z}$，有理数集记为 $\mathbf{Q}$，实数集记为 $\mathbf{R}$，这些数集间的关系如下：$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

区间是高等数学中常用的数集，分为**有限区间**和**无限区间**两大类. 设 a,b 为两个实数，且 $a<b$，引入记号 $+\infty$（读作“正无穷大”）及 $-\infty$（读作“负无穷大”）.

有限区间

开区间　$(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

闭区间　$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开闭区间　$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

无限区间

$$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\},\quad (-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\},$$

$$(a,+\infty)=\{x|a<x\},\quad (-\infty,b)=\{x|x<b\},$$

$$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty).$$

注: 在本书中, 当不需要特别辨明区间是否包含端点、是有限还是无限时, 常将其简称为“区间”, 并用I表示.

二、邻域

定义 1.1.1 设a与δ是两个实数, 且$\delta>0$, 数集$\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$称为**点$a$的$\delta$邻域**, 记为$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$或$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}$, 其中, 点$a$叫做该邻域的中心, δ叫做该邻域的半径(图 1-1-1).

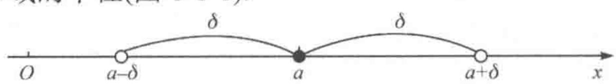

图 1-1-1

若把邻域$U(a,\delta)$的中心去掉, 所得到的邻域称为**点a的去心δ邻域**$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$.

也可用区间表示这两个邻域:

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta),\quad \mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

更一般地, 以a为中心的任何开区间均是点a的邻域, 当不需要特别指明邻域的半径时, 可简记为$U(a)$.

三、函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型和法则. 本节先讨论两个变量的情形.

例如, 假定x为婴儿的月龄, y为婴儿的体重(单位:kg), 出生 1—6 个月期间婴儿的体重与月份关系满足以下数学模型

$$y=3+0.6x.$$

定义 1.1.2 设x和y是两个变量, D是一个给定的非空数集. 如果$\forall x\in D$, 变量y按照一定的法则总有确定的实数和它对应, 则称y是定义在D上的**函数**, 记为$f(x)\,(=y)$, 称D为这个函数的**定义域**, 也记为D_f; 称y为因变量, x为自变量.

对$x_0\in D$, 按照对应法则f, 总有确定的值y_0(记为$f(x_0)$)与之对应, 称$f(x_0)$为函数在点x_0处的**函数值**. 因变量与自变量的这种相依关系通常称为**函数关系**.

当自变量x取遍D的所有数值时, 对应的函数值$f(x)$的全体构成的集合称为函数f的**值域**, 记为R_f或$f(D)$, 即$R_f=f(D)=\{y|y=f(x),x\in D\}$.

说明 1: 符号“$\forall$”表示“任意的”“对每一个”; 符号“$\exists$”表示“存在”“有一个”.

说明 2: 在实际问题中, 应根据问题的实际意义具体确定函数的定义域, 往往取使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合作为该函数的定义域, 这种定义域又称为函数的**自然定义域**. 例如, 函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的(自然)定义域即为开区间$(-1,1)$.

说明 3: 两个函数相等的充要条件是它们的定义域和对应法则都相同. 例如, $y=|x|$

与 $u=\sqrt{t^2}$ 是相同的函数.

函数的图形

对于函数 $y=f(x)$, 若取自变量 x 为横坐标, 因变量 y 为纵坐标, 则在平面直角坐标系中就可以画出关于 x 和 y 的点集

$$C=\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D\},$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图形(图 1-1-2).

若自变量在定义域内任取一个数值, 对应的函数值只有一个, 这种函数称为**单值函数**, 否则称为**多值函数**.

例如, 方程 $x^2+y^2=9$ 在闭区间[−3, 3]上确定了一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数. $\forall x\in(-3,3)$, 都有两个 y 值 $\pm\sqrt{9-x^2}$ 与之对应, 因而 y 是多值函数.

注: 今后, 若无特别说明, 函数均指单值函数.

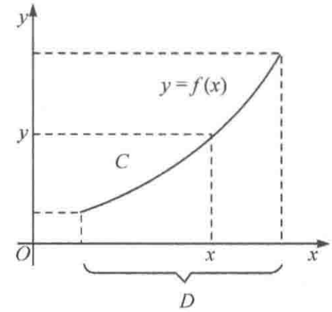

图 1-1-2

函数的常用表示法

(1) **表格法** 将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

(2) **图像法** 在坐标系中用图形来表示函数关系的方法.

(3) **公式法(解析法)** 将自变量和因变量之间的关系用数学表达式(又称解析表达式)来表示的方法. 根据函数的解析表达式的形式不同, 函数也可分为**显函数**、**隐函数**和**分段函数**三种:

(i) **显函数** 函数由解析表达式直接表示. 例如, $y=3+0.6x$.

(ii) **隐函数** 函数的自变量与因变量的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定. 例如, $x^2+y^2=9$.

(iii) **分段函数** 函数在其定义域的不同范围内, 具有不同的解析表达式. 以下是几个分段函数的例子.

例 1.1.1 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=[0,+\infty)$, 如图 1-1-3 所示.

例 1.1.2 取整函数 $y=[x]$, 其中, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 例如,

$$[\sqrt{2}]=1,\quad [-3.2]=-4.$$

易见, 取整函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=\mathbf{Z}$, 如图 1-1-4 所示.

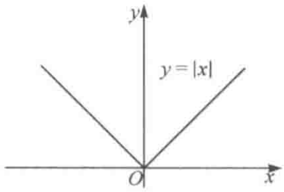

图 1-1-3

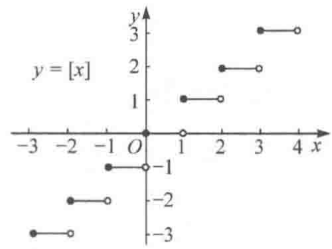

图 1-1-4

例 1.1.3 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，图形如图 1-1-5 所示.

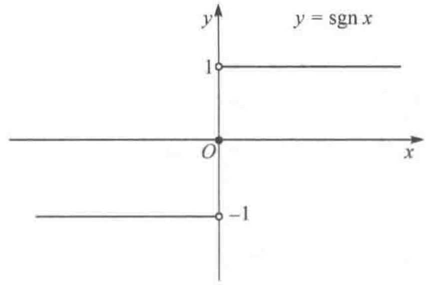

图 1-1-5

四、函数特性

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，若 $\exists M>0$，使得 $\forall x\in D$ 恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**，或称 $f(x)$ 是 X 上的**有界函数**. 每一个具有上述性质的正数 M 都是该**函数的界**.

若具有上述性质的正数不存在，则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**，或称 $f(x)$ 是 X 上的**无界函数**.

例如，函数 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，恒有 $|\cos x|\leqslant 1$.

函数 $y=\dfrac{1}{2x}$ 在区间 $(0,2)$ 上无界，在 $[2,+\infty)$ 上有界.

例 1.1.4 证明:

(1) 函数 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是有界的;

(2) 函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(0,1)$ 上是无界的.

证 (1) 因为 $(1-|x|)^2\geqslant 0$, 所以 $|1+x^2|\geqslant 2|x|$，从而

$$|f(x)|=\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|=\frac{2|x|}{|1+x^2|}\leqslant 1,$$

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，故函数 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是有界的.

(2) 对于无论怎样大的 $M>0$, 总可在 $(0,1)$ 内找到相应的 x. 例如，取 $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{M+1}}\in(0,1)$, 使得

$$\left|f(x_0)\right| = \frac{1}{x_0^2} = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{M+1}}\right)^2} = M+1 > M,$$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(0,1)$ 上是无界函数.

2. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，若 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有:

(1) $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加函数**;

(2) $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少函数**.

例如，$y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，在 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的，在 $(-\infty,+\infty)$ 内是不单调的(图 1-1-6).

由定义易知，单调增加函数的图形沿 x 轴正向是逐渐上升的(图 1-1-7)，单调减少函数的图形沿 x 轴正向是逐渐下降的(图 1-1-8).

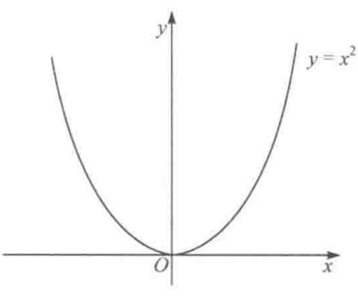

图 1-1-6

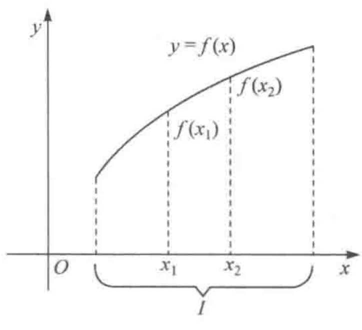

图 1-1-7

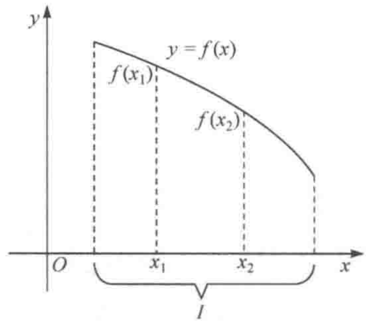

图 1-1-8

例 1.1.5　证明：函数 $y=\dfrac{x}{1+2x}$ 在 $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 内是单调增加的.

证　$\forall x_1,x_2\in\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，设 $x_1<x_2$，则有

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+2x_1}-\frac{x_2}{1+2x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1+2x_1)(1+2x_2)},$$

因为 x_1,x_2 是 $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 内任意两点，所以 $1+2x_1>0, 1+2x_2>0$，又因为 $x_1-x_2<0$，故 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)=\dfrac{x}{1+2x}$ 在 $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 内是单调增加函数.

3. 函数的奇偶性

设定义域 D 关于原点对称. $\forall x\in D$，若恒有

(1) $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**;

(2) $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图形关于原点对称(图 1-1-9), 偶函数的图形关于 y 轴对称(图 1-1-10).

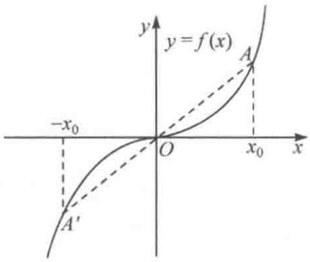

图 1-1-9

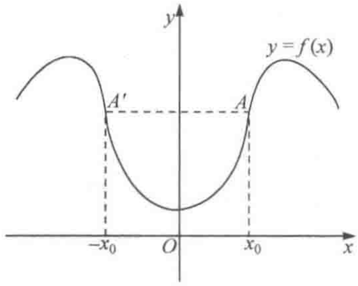

图 1-1-10

例如, 由图像可知函数 $y=x^2$ 是偶函数, 函数 $y=x^3$ 是奇函数.

例 1.1.6 判断函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解
$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x).\end{aligned}$$

由定义知 $f(x)$ 为奇函数.

例 1.1.7 判断函数

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\ln\frac{1-x}{1+x}\quad(-1<x<1)$$

的奇偶性.

解 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^{-x}+1}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\left(-\ln\frac{1-x}{1+x}\right)\\&=\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\ln\frac{1-x}{1+x}=f(x),\end{aligned}$$

故由定义知 $f(x)$ 为偶函数.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 如果 $\exists$ 常数 $T\neq 0$, 使得 $\forall x\in D$, 有 $x\pm T\in D$, 且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**, T 为**周期**. 通常周期函数的周期是指其**最小正周期**.

例如, $\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数; $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

以 T 为周期的函数在每一个长度为 T 的区间上的图像是相同的(图 1-1-11).

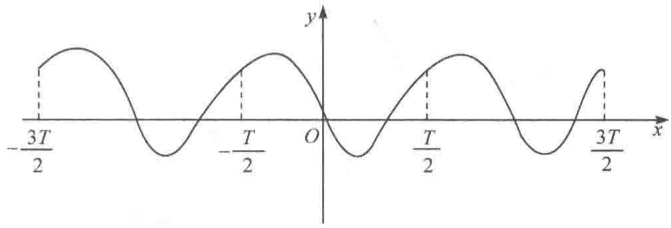

图 1-1-11

日常生活中的许多现象都呈现出明显的周期性特征, 如家用电器的电压和电流是周期的, 用于加热食物的微波炉中的电磁场是周期的, 月相和行星的运动是周期的, 等等.

例 1.1.8 若 $f(x)$ 对其定义域上的一切, 恒有

$$f(x)=f(2a-x),$$

则称 $f(x)$ 对称于 $x=a$. 证明: 若 $f(x)$ 对称于 $x=a$ 及 $x=b(a<b)$, 则 $f(x)$ 是以 $T=2(b-a)$ 为周期的周期函数.

证 由 $f(x)$ 对称于 $x=a$ 及 $x=b$,则有

$$f(x)=f(2a-x), \tag{1.1.1}$$

$$f(x)=f(2b-x), \tag{1.1.2}$$

在式(1.1.2)中, 把 x 换为 $2a-x$,得

$$f(2a-x)=f[2b-(2a-x)]=f[x+2(b-a)].$$

由式(1.1.1), $f(x)=f(2a-x)=f[x+2(b-a)]$, 可见 $f(x)$ 以 $T=2(b-a)$ 为周期.

例 1.1.9 设 $D(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{是有理数时},\\ 0, & \text{当}x\text{是无理数时},\end{cases}$ 求 $D\left(-\frac{7}{2}\right), D(1+\sqrt{3}), D(D(x))$, 并讨论其性质.

解 易见, 该函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=\{0,1\}$, 但它没有直观的图形表示.

$$D\left(-\frac{7}{2}\right)=1, \quad D(1+\sqrt{3})=0, \quad D(D(x))\equiv 1,$$

函数是单值、有界的; 是偶函数, 但不是单调函数; 是周期函数, 但无最小正周期.

五、初等函数

1. 反函数

在研究函数关系的过程中, 哪个量是自变量、哪个量是因变量是由具体问题决定的.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 值域为 W. 对于 $\forall y\in W$, 在定义域 D 上至少可以确定一个数值 x 与 y 对应, 且满足 $f(x)=y$. 如果把 y 作为自变量, x 作为函数, 则由关系式 $f(x)=y$ 可确定一个新函数, 称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**, 记为 $x=\varphi(y)$ (或 $x=f^{-1}(y)$), 反函数的定义域为 W, 值域为 D. 相对于反函数, 函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**. 我们习惯

上把自变量记为 x，函数记为 y, 所以反函数更多表示为 $y=f^{-1}(x)$ 或 $y=\varphi(x)$.

什么样的函数才有反函数呢？一般地，即使函数 $y=f(x)$ 是单值的，其反函数 $x=\varphi(y)$ 也不一定是单值的. 例如，函数 $y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,\infty)$. 易见 $y=x^2$ 的反函数是多值函数，即 $x=\pm\sqrt{y}$. 因为函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,\infty)$ 上是单调增加的(图 1-1-12)，所以当把 x 限制在 $[0,\infty)$ 上时，$y=x^2$ 的反函数是单值函数，即 $x=\sqrt{y}$，称它为函数 $y=x^2$ 的反函数的一个单值分支. 另一个单值分支为 $x=-\sqrt{y}$. $y=x^2$ 的反函数可以写成 $y=\pm\sqrt{x}$. 若自变量与因变量是一一对应的，则函数 $y=(x)$ 必有反函数 $y=f^{-1}(x)$.

在同一个坐标平面内，直接函数 $y=f(x)$ 和反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1-1-13). 如果 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点，则 $Q(b,a)$ 就是图形 $y=\varphi(x)$ 上的点，直线 $y=x$ 垂直且平分线段 PQ. 反之亦然.

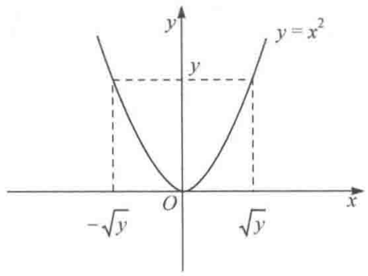

图 1-1-12

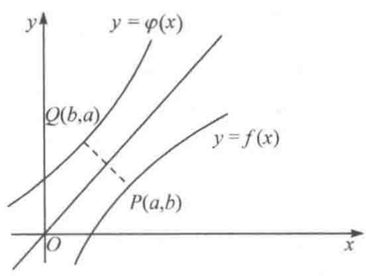

图 1-1-13

例 1.1.10 求函数 $y=\dfrac{1-\sqrt{1+2x}}{1+\sqrt{1+2x}}$ 的反函数.

解 令 $z=\sqrt{1+2x}$, 则 $y=\dfrac{1-z}{1+z}$, 故 $z=\dfrac{1-y}{1+y}$, 即 $\sqrt{1+2x}=\dfrac{1-y}{1+y}$, 解得

$$x=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2-1\right]=-\frac{2y}{(1+y)^2},$$

改变变量的记号，便得到所求反函数：$y=-\dfrac{2x}{(1+x)^2}$.

2. 基本初等函数及图像

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数是五类基本初等函数.

1) 幂函数

幂函数 $y=x^\alpha$ (α 是任意实数)，其定义域要依 α 具体是什么数而定，当 $\alpha=1,2,\dfrac{1}{2},-1$ 时，是常用的幂函数(图 1-1-14).

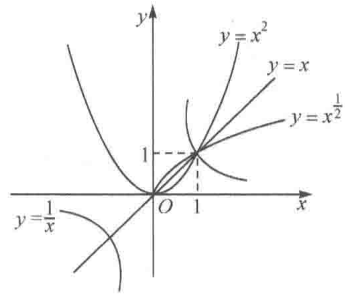

图 1-1-14

2) 指数函数

指数函数 $y=a^x$ (a 为常数，且 $a>0, a\neq 1$)，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调减少. $y=a^{-x}$ 与 $y=a^x$ 的图形关于 y 轴对称(图 1-1-15). 其中最为常用的是以 $\mathrm{e}=2.7182818\cdots$ 为底数的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$.

3) 对数函数

指数函数 $y=a^x$ 的反函数称为对数函数，记为 $y=\log_a x$ (a 为常数，且 $a>0, a\neq 1$). 其定义域为 $(0,+\infty)$. 当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 单调减少(图 1-1-16). 其中以 e 为底的对数函数叫作**自然对数函数**，记为 $y=\ln x$.

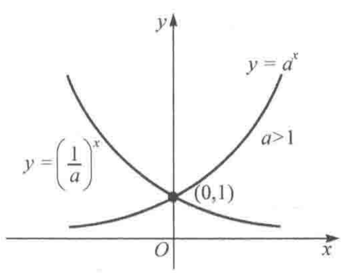

图 1-1-15

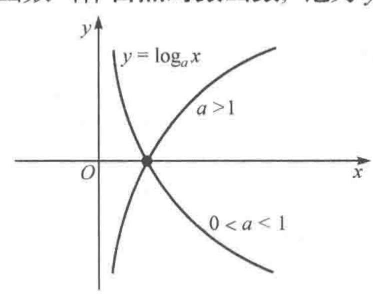

图 1-1-16

4) 三角函数

常用的三角函数如下.

正弦函数　$y=\sin x$, 其定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $[-1,1]$, 是奇函数及以 2π 为周期的周期函数(图 1-1-17).

余弦函数　$y=\cos x$, 其定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $[-1,1]$, 是偶函数及以 2π 为周期的周期函数(图 1-1-17).

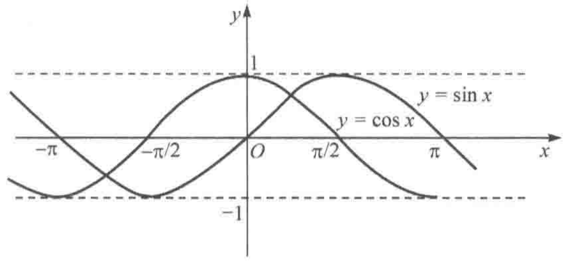

图 1-1-17

正切函数　$y=\tan x$，其定义域为$\left\{x\left|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$，是奇函数及以π为周期的周期函数(图 1-1-18(a)).

余切函数　$y=\cot x$，其定义域为$\{x|x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$，是奇函数及以π为周期的周期函数(图 1-1-18(b)).

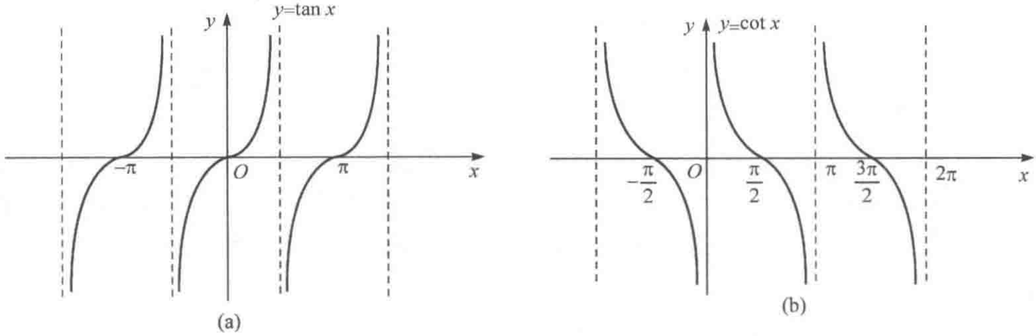

图 1-1-18

正割函数　$y=\sec x\left(=\frac{1}{\cos x}\right)$，定义域$\left\{x\left|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，值域$\{y|y\geqslant 1或y\leqslant -1\}$，是偶函数，图像关于 y 轴对称；是周期函数，周期为$2k\pi(k\in\mathbf{Z},k\neq 0)$，最小正周期为$T=2\pi$(图 1-1-19).

余割函数　$y=\csc x\left(=\frac{1}{\sin x}\right)$，定义域$\{x|x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，值域$\{y|y\leqslant -1或y\geqslant 1\}$，是奇函数，最小正周期为$T=2\pi$(图 1-1-19).

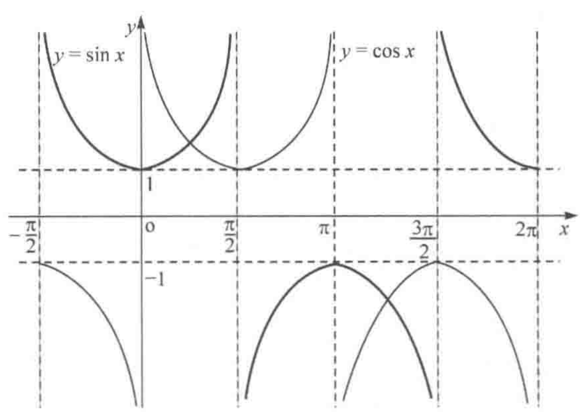

图 1-1-19

5) 反三角函数

三角函数的反函数称为**反三角函数**，由于三角函数$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$不是单调的，所以对这些函数限定在某个单调区间内来讨论它们的反函数，一