大学物理（上）

PHYSICS

王 越
刘宇星
主 编

丁晓红
王代殊
江少林
刘凤艳
刘敏蔷
杨红卫
徐劳立
韩守振
副主编

清华大学出版社

大学物理（上）

王 越
刘宇星
主 编

丁晓红
王代殊
江少林
刘凤艳
刘敏蔷
杨红卫
徐劳立
韩守振
副主编

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书根据教育部颁布的“大学物理课程教学基本要求”，为配合研究型教学而编写。全书分上、下册，共20章，上册讲述质点力学、刚体力学、狭义相对论、振动和波、气体动理论、热力学基础，下册讲述静电场、静电场中的导体与电介质、稳恒电流的磁场、电磁感应、麦克斯韦方程组、波动光学和量子物理基础等方面的内容。

本书在编写过程中，力求概念简明清晰，讲述深入浅出，难度适中，可作为大专院校非物理类理工科学生学习大学物理课程的辅助教材，也可供大中专院校物理教师参考。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理．上/王越，刘宇星主编．—北京：清华大学出版社，2017
ISBN 978-7-302-49041-8

Ⅰ．①大…　Ⅱ．①王…　②刘…　Ⅲ．①物理学－高等学校－教材　Ⅳ．①O4

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第295515号

责任编辑：朱红莲　刘远星
封面设计：傅瑞学
责任校对：赵丽敏
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市铭诚印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　**印　张**：9.75　　**字　　数**：233千字
版　　次：2017年12月第1版　　**印　　次**：2017年12月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：26.00元

产品编号：052418-01

前言

FOREWORD

大学物理是高等院校的一门重要的公共基础课，它不仅能对学生进行较全面的物理知识教育，而且能对学生进行较系统的科学方法教育和思维能力训练，使学生在知识、素质和能力各方面得到协调发展。

本教材分上、下两册，共有20章。编者的初衷是结合我校实际，兼顾一般院校工科大学本科生，提供一套简明清晰、难度适中、深入浅出、易教易学的大学物理教材。全书上册为力学、振动和波和热学，下册为静磁学、波动光学和量子物理基础。本教材另配有《大学物理练习与思考》提供各章习题及其提要。

本书在编写中力求体现教育部颁布的“大学物理课程教学基本要求”的精神。在编写过程中，江少林教授、陈信义教授给予了多次指导，并提供了大量宝贵意见。参加本书编写工作的教师，大学物理授课经验都在10年以上。江少林编写了第1章，刘凤艳编写了第2、3、4章，王越编写了第5、8章，刘敏蔷编写了第6、7章，刘宇星编写了第9、10章，徐劳立编写了第11、12章，韩守振编写了第13章，王代殊编写了第14章，丁晓红编写了第15、16、17章，杨红卫编写了第18、19、20章。

由于编者水平有限，不当之处，在所难免，敬请同行专家不吝指正。

编者在编写过程中，得到领导和同事们的关心、支持和帮助，在此谨致谢忱！

编者

2017年12月

目录

CONTENTS

第 1 章

质点运动学

本章主要介绍质点运动的描述，涉及的基本概念有：质点、参考系、位矢、位移、速度、加速度等，涉及的典型运动有：直线运动、抛体运动、圆周运动等，涉及的主要问题是：已知质点运动中某些物理量的变化规律，如何求出其他相关物理量的变化规律或特定值，等等。本章不讨论引起质点运动状态变化的力的作用问题。在本章的学习中，应特别注意矢量的表示方法和运算方法，注意微积分工具的运用。

本书采用国际单位制(简记为 SI)。

1.1 质点与参考系

1.1.1 质点

质点是指仅有质量的点状物。质点是一种理想模型，是研究物体在一定条件下运动时的一种近似处理方法。该条件就是：物体的线度远小于物体的运动范围。显然，一个物体在某些情形下可作为质点处理，绝不意味着它在所有情形下都可作为质点处理。例如，在研究地球围绕太阳的公转运动时可将地球当作质点，但在研究地球的自转运动时就不能把它当作质点了。

将研究对象抽象为一种理想模型，是科学研究中常用的一种方法，称为模型化方法。其目的是删繁就简，略去问题中的次要因素以突出主要因素的作用。在物理学中常用的理想模型还有刚体、理想气体、点电荷、单色光等。

1.1.2 参考系

物体运动的描述总是相对的，是相对于其他物体而言的。在描述一个物体的运动时所选定的其他作为参考的物体，称为参考物。参考物常常是指一个或几个认定为不动的物体。

需要指出的是，参考物总是指有静止质量的物体。这是因为在参考物上进行观测总需要仪器，而仪器总有静止质量。像光子这样的没有静止质量的物体，作为参考物是没有实际意义的。

与参考物固定连结的一个三维空间，称为参考空间。在参考空间中描述其他物体的运

动总需要有时间的度量,这可以通过遍布于参考空间各处并与之固定连结的一套同步时钟(设想)来实现。参考空间和与之固定连结的一套同步时钟(设想)的组合,称为参考系。

在参考系中要具体描述物体的位置,还需要建立坐标系。常用的坐标系为直角坐标系。在具体问题中,给定了坐标系,也就意味着选定了相应的参考系。

1.2 位矢与位移

1.2.1 位矢

质点在某一时刻位于参考系中的某一点,该点的位置可用从坐标原点引到该点的一个矢量来表示,称为质点在该时刻的位置矢量,简称位矢。

如图 1.1 所示,质点位于 $P(x,y,z)$ 点,其位矢为 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$。式中,$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 分别为沿 x、y、z 轴方向的单位矢量。

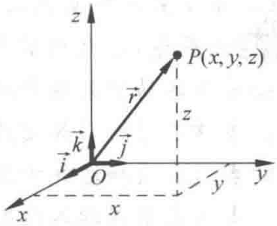

图 1.1 质点的坐标和位矢

质点运动时,其位置随时间而变化,其位矢 $\vec{r}$ 是时间 t 的函数,可表为

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k} \tag{1.1}$$

称之为质点的运动函数(旧称运动方程)。

运动函数的分量式为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t) \tag{1.2}$$

质点运动所经过的路线,称为轨道。由运动函数的分量式,消去 t,即可得到质点位置坐标 x、y、z 满足的约束条件,称之为轨道方程。

例 1.1 已知质点的运动函数为 $\vec{r}=(t-1)\vec{i}+t^2\vec{j}$,求质点的轨道方程。

解 按题意,有

$$x=t-1,\quad y=t^2$$

消去 t,得

$$y=(x+1)^2$$

此即质点的轨道方程。

1.2.2 位移

位移是反映位置变化的物理量,指的是在某一时间间隔内质点位矢的增量。

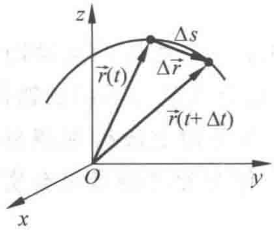

图 1.2 位移和路程

如图 1.2 所示,在 t 到 $t+\Delta t$ 时间间隔内,质点的位移为

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t) \tag{1.3}$$

应该注意,位移是矢量,它既有大小,又有方向。

位移与路程有别。路程是指在某一时间间隔内质点所经过的路线的长度,它是标量,仅有大小,没有方向。在图 1.2 中,弧长 Δs 表示在 t 到 $t+\Delta t$ 时间间隔内质点所通过的路程。显然,在一般情况下,$|\Delta\vec{r}|\neq\Delta s$。但有两种例外,一是质点沿直线运动,

且在某一时间间隔内质点的运动方向没有变化，则在该时间间隔内，有$|\Delta\vec{r}|=\Delta s$；二是在无穷小时间间隔内，即当$\Delta t\to 0$时，有$|d\vec{r}|=ds$。

还应注意的是，不可将$\Delta\vec{r}$或$|\Delta\vec{r}|$，误写为Δr。后者表示位矢大小的增量，在一般情形下，它与位矢增量的大小$|\Delta\vec{r}|$是不相等的。

在一维运动情形，例如，质点沿x轴运动的情形，常用$\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t)$表示位移。这里$\Delta x$虽是标量，但其值的正负可表示位移的方向。

1.3 速度与加速度

1.3.1 速度

1. 平均速度与平均速率

设在t到$t+\Delta t$时间间隔内，质点的位移为$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$，则在该时间间隔内，质点的平均速度定义为

$$\bar{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{1.4}$$

可见，平均速度是指在某一时间间隔内位移对时间的平均变化率。

设在t到$t+\Delta t$时间间隔内，质点通过的路程为Δs，则在该时间间隔内，质点的平均速率定义为

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1.5}$$

可见，平均速率是指在某一时间间隔内路程对时间的平均变化率。

注意，由于在一般情况下$\Delta s\neq|\Delta\vec{r}|$，所以，通常$\bar{v}\neq|\bar{\vec{v}}|$，即平均速率通常并不等于平均速度的大小。

2. 瞬时速度与瞬时速率

设在t到$t+\Delta t$时间间隔内，质点的位移为$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$，则在$t$时刻，质点的瞬时速度定义为

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1.6}$$

即瞬时速度是平均速度当时间间隔趋于零时的极限。

瞬时速度与平均速度的上述关系，类似地也存在于其他许多涉及变化率的物理量中。例如，某一时刻的瞬时功率，被定义为该时刻附近某一时间间隔内的平均功率当时间间隔趋于零时的极限；物体某一点处的质量密度，被定义为该点附近某一体积元的平均质量密度当体积趋于零时的极限等。

根据式(1.3)，可通过运动函数对时间求导来得到质点的瞬时速度。设质点的运动函数为$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$，则其速度函数为

$$\vec{v}(t)=\frac{dx(t)}{dt}\vec{i}+\frac{dy(t)}{dt}\vec{j}+\frac{dz(t)}{dt}\vec{k} \tag{1.7}$$

类似地，瞬时速率定义为平均速率当时间间隔趋于零时的极限，即

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \tag{1.8}$$

由于 $ds = |d\vec{r}|$，故有 $v = |\vec{v}|$，即瞬时速率等于瞬时速度的大小。习惯上常说，速率就是速度的大小，当然，这仅是指速率与速度的瞬时值而言。

顺便指出，质点作曲线运动时，其速度方向总是沿着曲线的切向，并且指向运动方向。理由很简单，因$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$，当 $dt > 0$ 时，显然$\vec{v}$与 $d\vec{r}$方向一致。

还应指出，在一维运动情形，例如，质点沿 x 轴运动的情形，习惯上用符号$\bar{v}$和 v 表示质点的平均速度和瞬时速度。其中，$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$，$v = \frac{dx}{dt}$，它们是可正可负的，与速度方向有关。注意，不要把这里的$\bar{v}$和 v 误认作平均速率和瞬时速率。

3. 某些速率值

光在真空中的速率约为 3.0×10^8 m/s；

地球公转的速率约为 3.0×10^4 m/s；

人造地球卫星的速率约为 7.9×10^3 m/s；

空气中的声速(0℃)约为 3.3×10^2 m/s；

大陆板块移动的速率约为 10^{-9} m/s。

例 1.2 质点沿 X 轴运动，其运动函数为 $x = 3t - t^3$，式中 x 的单位为 m，t 的单位为 s。求：(1)质点在 $t = 0 \sim 2$s 内的位移；(2)质点在 $t = 0 \sim 2$s 内的平均速度；(3)质点在 $t = 2$s 时的速度。

解 (1) 所求位移为 $\Delta x = x(2) - x(0) = (-2) - 0 = -2$m

(2) 所求平均速度为$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(2) - x(0)}{2 - 0} = \frac{(-2) - 0}{2} = -1$m/s

(3) $v = \frac{dx}{dt} = 3 - 3t^2 = 3(1 - t^2)$

所求速度为 $v(2) = 3(1 - 2^2) = -9$m/s

1.3.2 加速度

1. 平均加速度

平均加速度是指速度对时间的平均变化率。设在 t 到 $t + \Delta t$ 时间间隔内，质点速度的增量为 $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$，则在该时间间隔内，质点的平均加速度为

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{1.9}$$

2. 瞬时加速度

瞬时加速度是平均加速度当时间间隔趋于零时的极限。设在 t 到 $t + \Delta t$ 时间间隔内，质点速度的增量为 $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$，则在 t 时刻，质点的瞬时加速度为

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{1.10}$$

利用式(1.7)，可通过求导来得到质点的瞬时加速度。设质点的运动函数为$\vec{r}(t) =$

$x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$，速度函数为$\vec{v}(t)=v_x(t)\vec{i}+v_y(t)\vec{j}+v_z(t)\vec{k}$，则其加速度函数为

$$\begin{aligned}\vec{a}(t)&=\frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}v_z(t)}{\mathrm{d}t}\vec{k}\\&=\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}\end{aligned}\tag{1.11}$$

应注意，在一维运动情形下，例如，质点沿 x 轴运动的情形，习惯上用符号$\bar{a}$和 a 表示质点的平均加速度和瞬时加速度，$\bar{a}=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$，$a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$（$v$ 是速度）。其中，$\bar{a}$和 a 可正可负，与加速度方向有关。

例 1.3　质点沿 x 轴运动，其 x—t 曲线如图 1.3 所示，该曲线可分为 4 段，其中 OA 段和 BC 段为直线段，且 BC 段平行于 t 轴。试问：在每一段曲线所对应的时间间隔内，质点的速度和加速度的值分别是大于零、等于零，还是小于零？

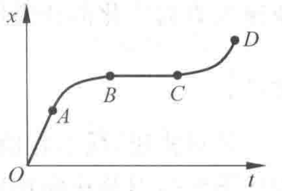

图 1.3　例 1.3 用图

解　由 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$和 $a=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$知，该质点的速度和加速度的值分别是运动函数 $x=x(t)$的一阶和二阶导数值。

又由导数的几何意义知，函数的一、二阶导数值分别依赖于函数曲线的切线斜率和曲线的凹凸性。

于是，根据图 1.3 中每一段曲线的几何特点，可以作出如下判断：

在 OA 段曲线所对应的时间间隔内，$v>0$，$a=0$；

在 AB 段曲线所对应的时间间隔内，$v>0$，$a<0$；

在 BC 段曲线所对应的时间间隔内，$v=0$，$a=0$；

在 CD 段曲线所对应的时间间隔内，$v>0$，$a>0$。

3. 平面曲线运动中的加速度

在平面曲线运动中，质点的加速度通常既有切向分量，又有法向分量，如图 1.4 所示。

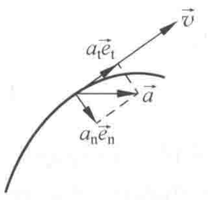

图 1.4　曲线运动中的加速度

可将加速度$\vec{a}$表示为

$$\vec{a}=a_t\vec{e}_t+a_n\vec{e}_n\tag{1.12}$$

其中，$\vec{e}_t$ 称为切向单位矢量，它沿曲线的切向，指向质点运动的方向；$\vec{e}_n$ 称为法向单位矢量，它沿曲线的法向，指向曲线的凹侧；a_t 称为切向加速度，它是$\vec{a}$在$\vec{e}_t$ 方向上的投影；a_n 称为法向加速度，它是$\vec{a}$在$\vec{e}_n$ 方向上的投影。

应该指出，$\vec{e}_t$ 和$\vec{e}_n$ 是自然坐标系中的两个单位矢量。自然坐标系是在描述质点的平面曲线运动时所采用的一种坐标系。在已知质点运动轨道的情况下，选取轨道曲线上的一点 O 为原点，用原点与质点所在位置之间的轨道长度 s 来描写质点的位置，并在质点所在处定义上述两个单位矢量$\vec{e}_t$ 和$\vec{e}_n$，这样建立起来的坐标系，就称为自然坐标系。

需要注意的是，$\vec{e}_t$ 和$\vec{e}_n$ 虽然是单位矢量，长度一定，但方向却随质点在曲线上的运动而改变，所以不是常矢量。这一点与直角坐标系中的三个单位矢量$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$是不同的。

下面，简要说明切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n 的定量表达。

设质点的速率为 v，则速度可表为$\vec{v}=v\vec{e}_t$，这里 v 和$\vec{e}_t$ 都随时间变化。于是加速度$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+v\frac{d\vec{e}_t}{dt}$。可以证明，$\frac{d\vec{e}_t}{dt}=\frac{v}{\rho}\vec{e}_n$，其中 ρ 是曲线上质点所在处的曲率半径，$\frac{v}{\rho}$在物理上表示质点沿曲率圆运动的角速度，也是$\vec{e}_t$ 转动的角速度。因而得到

$$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+v\frac{d\vec{e}_t}{dt} \tag{1.13}$$

经比较，可得

$$a_t=\frac{dv}{dt},\quad a_n=\frac{v^2}{\rho} \tag{1.14}$$

从物理意义来说，切向加速度 a_t 反映速度大小对时间的变化率，而法向加速度 a_n 则反映速度方向变化的快慢$\left(\right.$从 a_n 的构成来看，它包含$\frac{v}{\rho}$这个因子，而该因子就是$\vec{e}_t$ 转动的角速度$\left.\right)$。

最后指出，质点作曲线运动时，其切向加速度是可以为零的(在此情形，质点的速度大小保持不变)，但是法向加速度一般不为零。仅在曲线的曲率半径为无穷大处(例如，曲线的拐点处)，法向加速度才等于零。

4. 某些加速度值的数量级

使汽车撞坏的加速度：$10^3\,m/s^2$。

地球自转在赤道上一点产生的加速度：$10^{-2}\,m/s^2$。

地球公转的加速度：$10^{-3}\,m/s^2$。

太阳绕银河系中心转动的加速度：$10^{-10}\,m/s^2$。

*1.3.3 加加速度

加速度对时间的变化率，称为加加速度，又称为急动度，通常用$\vec{j}$表示。

$$\vec{j}=\frac{d\vec{a}}{dt} \tag{1.15}$$

近年来急动度概念的应用日益广泛。在交通工程中，急动度引起的人的生理和心理效应已受到重视，并成为道路设计中的一项重要考虑因素。在非线性系统的研究中，人们利用急动度概念创建了一门称为“猝变动力学”的新学科。急动度已经成为一个重要的物理量。

1.4 抛体运动

在无风的情况下，在地面附近不太大的范围内，抛出的物体沿抛物线运动，称为抛体运动。

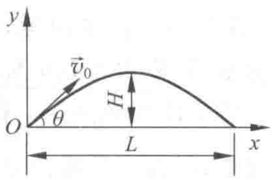

图 1.5 抛体运动

抛体运动可分解为一个水平方向的匀速直线运动和一个竖直方向的匀变速直线运动。如图 1.5 所示，设抛体的初速度为$\vec{v}_0$，速度方向与水平方向的夹角为 θ，则抛体的运动函数分量形式可表为

$$\begin{cases} x = (v_0\cos\theta)t \\ y = (v_0\sin\theta)t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

由此可求出该运动的一些特征量，如：射高 H（抛体所能达到的最大高度）、射程 L（抛体落到与抛射点同一高度时所通过的水平距离）等。易知

$$H = \frac{(v_0\sin\theta)^2}{2g}, \quad L = \frac{v_0^2\sin2\theta}{g} \tag{1.16}$$

并且，在初速度大小一定的条件下，射高随 θ 的增大而增大，射程则在 $\theta=45^\circ$ 时为最大。

抛体运动的一个重要特点是，加速度恒为重力加速度 $\vec{g}$。因此，将 $\vec{g}$ 分别向 $\vec{e}_t$ 和 $\vec{e}_n$ 方向上投影，即可得到切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n。这是处理抛体运动问题时常用的一种方法。

抛体运动这一简单的运动形式，近年来在宇航员的失重训练中也得到了应用，相关的技术称为“飞抛物线”。

例 1.4　如图 1.6 所示，物体作斜抛运动。在轨道上的 A 点处，物体速度的大小为 v，速度方向与水平方向的夹角为 45°。求在 A 点处物体的切向加速度 a_t 和轨道的曲率半径 ρ。

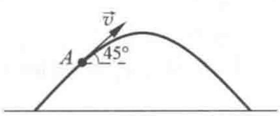

图 1.6　例 1.4 用图

解　物体作斜抛运动，加速度恒为重力加速度 $\vec{g}$。将 $\vec{g}$ 向 A 点处的切向单位矢量 $\vec{e}_t$ 方向（与 $\vec{v}$ 方向一致）上投影，即得

$$a_t = g\cos(90^\circ + 45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}g$$

将 $\vec{g}$ 向 A 点处的法向单位矢量 $\vec{e}_n$ 方向（与 $\vec{v}$ 方向垂直，指向轨道凹侧）上投影，可得

$$a_n = g\cos45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}g$$

再由

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

可得

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\sqrt{2}v^2}{g}$$

1.5　圆周运动

圆周运动是一种常见的平面曲线运动，其特点是，圆周上各点处的曲率半径都相等，就等于圆周的半径 R。根据前面关于曲线运动中速度、加速度的讨论可知，质点作圆周运动时，其速度方向沿圆周的切向，速率等于路程对时间的变化率，即 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，切向加速度 $a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，法向加速度 $a_n=\dfrac{v^2}{R}$。

1. 线量与角量

在圆周运动的描写中，除了使用上述物理量之外，还常常使用另一些物理量。下面对此作简要介绍。

如图1.7所示，质点沿着以坐标原点O为圆心、半径为R的圆周运动，在t时刻，质点位于图中所示的位置，速度为$\vec{v}$。选取圆周与OX轴的交点O'为自然坐标系的原点，则O'与质点所在位置之间的弧长s即为描写质点位置的自然坐标，对应的圆心角θ即为质点的角位置，我们有

$$s = R\theta \tag{1.17}$$

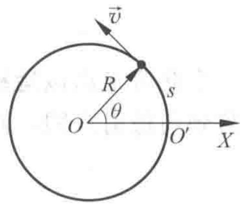

图1.7 圆周运动

随着质点的运动，s与θ都在变化。式(1.17)两边取增量，可得

$$\Delta s = R\Delta\theta \tag{1.18}$$

其中，Δs就是质点在相应时间间隔内通过的路程，而$\Delta\theta$则称为角位移。

将式(1.17)两边对时间t求导，可得$\frac{ds}{dt}=R\frac{d\theta}{dt}$。其中，$\frac{ds}{dt}$是路程对时间的变化率，即质点的速率$v$；$\frac{d\theta}{dt}$是角位置对时间的变化率，称为角速度，记作$\omega$，其单位为rad/s或$s^{-1}$。于是有

$$v = R\omega \tag{1.19}$$

上式两边再对时间t求导，可得$\frac{dv}{dt}=R\frac{d\omega}{dt}$。其中，$\frac{dv}{dt}$是速率对时间的变化率，即切向加速度$a_t$；$\frac{d\omega}{dt}$是角速度对时间的变化率，称为角加速度，记作$\alpha$，单位为rad/$s^2$或$s^{-2}$。于是有

$$a_t = R\alpha \tag{1.20}$$

此外，由$a_n=\frac{v^2}{R}$和$v=R\omega$，可得

$$a_n = R\omega^2 \tag{1.21}$$

通常将自然坐标s、路程Δs、速率v、切向加速度a_t和法向加速度a_n，称为线量，而将角位置θ、角速度ω和角加速度α，称为角量。式(1.17)～式(1.21)给出了线量与角量之间的关系。这些关系在处理圆周运动问题时常常用到。

2. 匀速率圆周运动

特点：速率v恒定(角速度ω恒定)，切向加速度$a_t=0$(角加速度$\alpha=0$)，法向加速度大小恒定、方向不断改变。

3. 匀变速率圆周运动

特点：切向加速度大小恒定、方向不断改变(角加速度α恒定)。

在匀变速率圆周运动中，线量满足以下关系式：

$$v = v_0 + a_t t,\quad \Delta s = v_0 t + \frac{1}{2}a_t t^2,\quad v^2 - v_0^2 = 2a_t\Delta s \tag{1.22}$$

相应地，角量满足以下关系式：

$$\omega = \omega_0 + \alpha t,\quad \Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2,\quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta \tag{1.23}$$

例1.5 质点沿半径为0.1m的圆周运动，其角位置随时间变化的函数为$\theta=2+t^2$，式中θ的单位为弧度rad，t的单位为秒s。求$t=1$s时，质点的切向加速度a_t和法向加速度a_n的值。

解　角速度 $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}=2t$

角加速度 $\alpha=\dfrac{d\omega}{dt}=2$

于是，所求切向加速度 $a_t=R\alpha=0.1\times2=0.2\text{m/s}^2$

所求法向加速度 $a_n=R\omega^2=0.1\times2^2=0.4\text{m/s}^2$

1.6　运动学中的两类问题

运动学不仅要定义一些物理量来描写质点的运动状态及其变化，更重要的是要解决已知其中某些量的变化规律怎样求出另一些量的变化规律或其特定值的问题。本节将举例讨论后者。

通常，后者又可分为两类问题。一类是已知质点的运动函数，怎样求出速度函数或其特定值？或已知质点的速度函数，怎样求出加速度函数或其特定值？该类问题主要通过求导的方法来解决。另一类是反过来，已知质点的加速度函数及速度的初始值，怎样求出速度函数或其特定值？或已知质点的速度函数及位置的初始值，怎样求出质点的运动函数或特定位置？该类问题主要通过积分的方法来解决。

下面通过几个例题来说明，怎样借助于微积分工具来解决运动学中的上述两类问题。

例 1.6　质点的运动函数为 $\vec{r}=a\cos\omega t\,\vec{i}+b\sin\omega t\,\vec{j}$，其中 a、b、ω 均为正的常量，试求质点在 $t=0$ 时刻的速度和在 $t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ 时刻的加速度。

解　速度函数 $\vec{v}(t)=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=-a\omega\sin\omega t\,\vec{i}+b\omega\cos\omega t\,\vec{j}$

于是，在 $t=0$ 时刻的速度为 $\vec{v}(0)=b\omega\,\vec{j}$

加速度函数 $\vec{a}(t)=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=-a\omega^2\cos\omega t\,\vec{i}-b\omega^2\sin\omega t\,\vec{j}$

于是，在 $t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ 时刻的加速度为 $\vec{a}\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\right)=-b\omega^2\,\vec{j}$

例 1.7　质点沿半径为 R 的圆周运动，其速率与时间的关系为 $v=ct^2$，其中 c 为正的常量，试求：

(1) 质点在 t 时刻的加速度大小；

(2) 从 $t=0$ 到任意时刻 t 质点所通过的路程。

解　(1) 在 t 时刻，$a_t=\dfrac{dv}{dt}=2ct$，$a_n=\dfrac{v^2}{R}=\dfrac{c^2t^4}{R}$

于是，加速度大小 $a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\dfrac{ct}{R}\sqrt{4R^2+c^2t^6}$

(2) 由 $v=ct^2$，得 $\dfrac{ds}{dt}=ct^2$

分离变量后，有 $ds=ct^2\,dt$

两边作积分：$\displaystyle\int_0^{\Delta s}ds=\int_0^t ct^2\,dt$

于是，得 $\Delta s=\dfrac{1}{3}ct^3$

例 1.8 质点沿 x 轴运动,在 $x=0$ 处,速度为 v_0,已知质点加速度与速度的关系为 $a=-kv^2$,其中 k 为正的常量。试求出质点速度 v 与位置坐标 x 之间的函数关系。

解 由 $a=-kv^2$,得 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^2$

其中 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v$

于是有 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-kv$

分离变量后,得 $\frac{\mathrm{d}v}{v}=-k\mathrm{d}x$

两边作积分:$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_0^x -k\mathrm{d}x$

得 $\ln\frac{v}{v_0}=-kx$

整理得 $v=v_0\mathrm{e}^{-kx}$

1.7 运动的相对性

运动的描述是相对的。同一个物体的运动,在不同参考系中观测,结果一般是不同的。那么,这些不同参考系的观测结果之间,是否存在着某种联系呢?回答是肯定的。这里,我们主要讨论在两个相对作平移运动(即物体内任一直线在运动中始终保持与自身平行的一种机械运动)的参考系中对同一个物体的运动进行观测,所得到的两组运动学参量之间的关系。

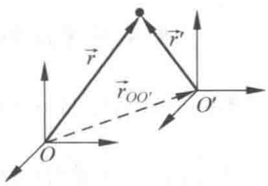

图 1.8 相对运动

如图 1.8 所示,参考系 O' 相对于参考系 O 作平移运动,在任意时刻,在参考系 O 中观测,参考系 O' 的原点的位矢为 $\vec{r}_{OO'}$。设该时刻在参考系 O 中观测到某质点的位矢为 $\vec{r}$,在参考系 O' 中观测到同一质点的位矢为 $\vec{r}'$,则有

$$\vec{r}=\vec{r}'+\vec{r}_{OO'} \tag{1.24}$$

将上式两边对时间求导,得

$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{v}_{OO'} \tag{1.25}$$

这是在两个参考系中观测到的同一质点的运动速度之间的关系。

接着,将式(1.25)两边对时间求导,得

$$\vec{a}=\vec{a}'+\vec{a}_{OO'} \tag{1.26}$$

该式给出了在两个参考系中观测到的同一质点的加速度之间的关系。

式(1.24)~式(1.26)集中反映了在两个相对作平移运动的参考系中对同一质点运动的观测结果之间的联系,但这些联系仅在两个参考系的相对运动速度远小于真空中光速的条件下成立。进一步的讨论将在第 8 章"狭义相对论基础"中展开。

最后指出,当大块物体作平移运动时,在任一时刻,物体上各点都具有相同的速度和加速度,因此,可用物体上任意一点的运动来代表整个物体的运动,在此情形,物体运动的描述与质点相同。