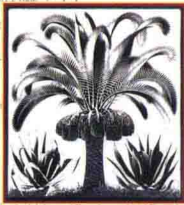
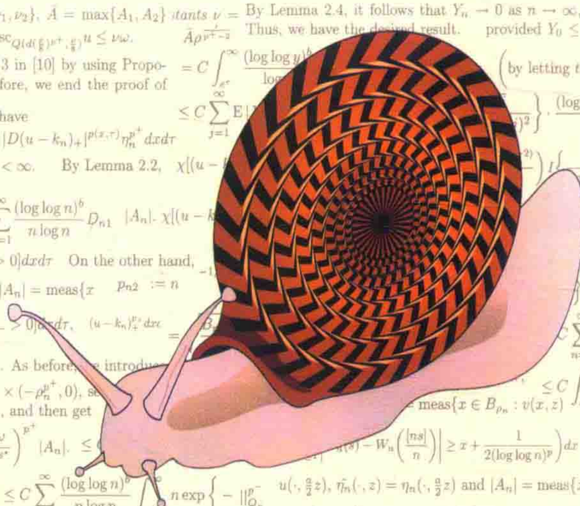


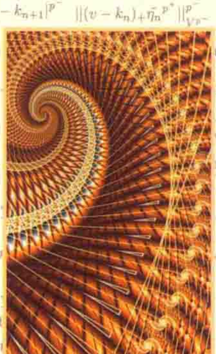
数学中的美

（第2版）

THE BEAUTY OF MATHEMATICS (SECOND EDITION)

● 吴振奎　吴 旻　编著





哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

SHUXUE ZHONG DE MEI (DIERBAN)

图片来源《坐拥书城》

刘培杰
数学工作室

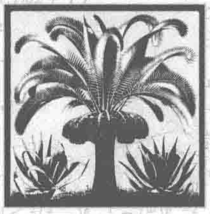
刘培杰数学工作室网站
http://lpj.hit.edu.cn

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　聂兆慈
封面设计　孙茵艾

哈尔滨工业大学出版社　刘培杰数学工作室
联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街10号
邮　　编：150006
联系电话：0451-86281378　13904613167
E-mail：lpj1378@163.com
微　　信：impjpp

ISBN 978-7-5603-4267-2

定价 68.00 元

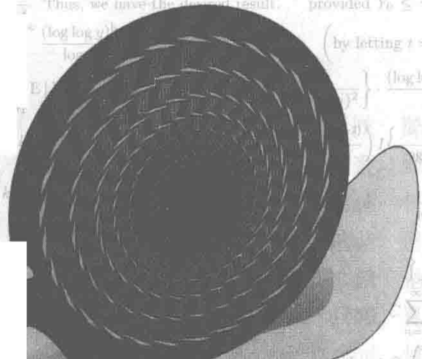


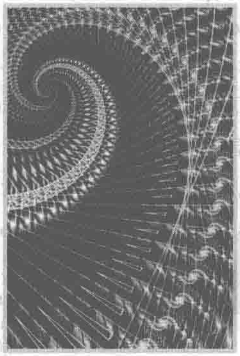
数学中的美

（第2版）

THE BEAUTY OF MATHEMATICS (SECOND EDITION)

● 吴振奎　吴 旻　编著





哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

这是一本探讨"数学之美"的著述，书中从数学的简洁性、抽象性、和谐性、奇异性等方面出发，列举了数学中的美，试图引导人们去欣赏数学美，发现数学美，研究数学美，创造数学美，本书是《数学的创造》的姊妹篇.

本书适合大学、中学师生及数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

数学中的美/吴振奎，吴旻编著. —2 版. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2019.6

ISBN 978-7-5603-4267-2

Ⅰ.①数… Ⅱ.①吴…②吴… Ⅲ.①数学-美学-普及读物 Ⅳ.①01-05

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 056828 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 聂兆慈
封面设计 孙因艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 黑龙江艺德印刷有限责任公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 25.75 字数 504 千字
版　　次 2011 年 1 月第 1 版 2019 年 6 月第 2 版
　　　　 2019 年 6 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-4267-2
定　　价 68.00 元

钱学森教授给本书作者的一封信

吴振奎教授：

12月5日来信敬悉。

历来有科学家、哲学家讲科学美。但我认为：首先必须区别科学研究中的"美"和产品设计中外型的美。后者是所谓"工业设计"，实是技术美术中的美学。前者属思维中的"美"感，实是哲学；说透了，是科学思维中意识到马克思主义哲学，并感到与马克思主义哲学相和谐，从而得到"美"感。

因此说科学"美"是把事情简单化了。我以为正确的认识应从科学技术的体系概念出发，即十大部门、十架到马克思主义哲学的桥梁（见附上复制件），把科学"美"深化到马克思主义哲学的最高概括。美即与宇宙真理相和谐。

这是我的想法，当否？请指教。

此致

敬礼！

钱学森

1992.12.10

又 记

时光荏苒，一晃又近十年.

眼下互联网的高速发展，手机、电脑十分普及，微信到处泛滥，……这已经且还将继续改变人们的生活，是喜？是忧？难加断言.至少读书的人少了.

常云：世事洞明皆学问，人情练达即文章.这本小书便是笔者洞察数学的体味、积累、凝思、集录所成.陶冶性灵存底物，文章改罢自长吟.

无聊去读书，寂寞方写作.对我而言，也许真的如此.

年逾七旬，体力、精力已不容我集中心思去读、去写，心中不禁怅然.老骥伏枥，只能想想而已，悲哉！因而我特别珍惜每一次再版，我总觉得，这种机会不会太多了，故只能倾洪荒之力把书改好，俗称山不让尘，川不辞盈，滴水穿石，涓涓细流终汇成河.

少年叹时迟，老来悲年促.

生年不满百，常怀千岁忧.

无比怀念年轻的时光，可以去做事，可以去思索，可以有梦想……

作　者

2018 年夏初

再版小记

秉刘培杰工作室的抬爱,本书稍加修订后,由哈尔滨工业大学出版社再版印制发行.

此书出版已历经十余载,承蒙读者不弃,备感受宠.然因笔者功力所囿,不能尽美,心常愧之,惟祈盼读者不吝赐教,善哉!

作 者

2010 年春节

◎ 前言

美是自然.数学作为“书写宇宙的文字”(伽利略语),反映着自然,数学中当然存在着美.

美学是研究现实(包括艺术、科学)中的美,以及如何去创造美的科学.

数学美学研究的主要内容也包括探求数学中的现实美、美感和美的创造.

数学(特别是现代数学)作为自然科学的基础、工程技术的先导、国民经济的工具,其本身就具有许多美的特性,它们是形象、生动而具体的(这一点有别于其他科学).

数学的简洁性、抽象性、和谐性、奇异性等诸方面均展现着数学自身的美——这些一旦让人觉知,一旦被人认识,数学便有新的希望与未来,至少可以改变人们对数学固有的偏见:枯燥、乏味.

把数学,特别是现代数学中美的现象展示出来,再从美学角度重新认识,这不仅是对人们观念的一种启迪,同时还可以帮助人们去思维,去探索,去研究,去发掘.

宇宙应该是和谐的,世界应该是美丽的,数学研究也应如此.

美也是一种感受、一个结论(定理、公式、图形)、一种证明、一项计算、一份解答,如果看上去很美,差不多可以说它是正确的.

这就是说:从美学角度探索数学中的一些现象,揭示其中的某些规律,往往可以得到一些研究数学的方法.

简言之,数学中的美需要挖掘,而美学方法又可指导数学研究.

数学中的美的现象,很早就被一些大数学家(如毕达哥拉斯、高斯等)关注,他们提出过不少精辟、独到的见解.我国古代数学家也曾经从“趣味”角度,探讨过这类问题.但遗憾的是未能有专门文章或论著面世.

当今,科学美越来越被科学家们重视,钱学森、杨振宁教授等就此发表过一系列文章,提出过许多真知灼见.

正如一位哲人说:没有数学,我们无法看穿哲学的深度;而没有哲学,人们也无法看穿数学的深度;而若没有两者,人们就什么也看不透.

本书试图从哲学范畴出发,配以数学实例,去揭示数学潜在的规律,探索运用美学原理指导数学创造、发现的途径,这对数学的教、学、研究均有裨益;另外,数学美学的研究,也是对美学乃至哲学自身的一种丰富.因而全面系统地阐述此问题,或许是必要而有益的.

简言之,我们撰写本书的目的是:发现数学美,认识数学美,理解数学美,欣赏数学美,研究数学美,创造数学美.

书稿成于十几年前,阴差阳错未能及时与读者见面.承蒙天津教育出版社领导和编辑的鼎力支持,本书初版于1995年前后问世.

回想当年发稿前,我们几乎不愿再多看它一眼,彼时的心境宛如母亲对待即将出世的丑婴,这情感是复杂的:于是手头新资料不敢再添加(怕涨字数),新图片不愿再补充(且原图尽量做小些,以免成了“大部头”),结果成了那副模样.

我们曾寄希望于此书的再版,但这种机会不知何时能有.我们等待,我们期盼.

一方面我们仍不停地搜集资料,一方面不间断地修改文字.当机会来临之时,果然“水到渠成”,有了现在的容貌,纵然它仍显不美(至少不是很美).

当今,数学美的著述不丰(特别是专论).尽管如此,由于笔者的功力与学识,本书至多只能是抛砖引玉式的一种尝试,祈望的是读者的理解与认同,指正与批评.

笔者感谢台湾九章出版社孙文先先生,是他又给了本书一次机会;同时也感谢上海教育出版社的叶中豪先生,由于他的努力与帮助,本书繁、简两种字体版本才能同时问世.

对于张鸿林先生的辛勤劳动,笔者也深表谢忱.

但愿此书的出版不会辜负他们的一片美意!

吴振奎　吴　旻

2010年11月

◎ 目录

数学与美学

社会的进步就是人类对美的追求的结晶.

——马克思(K. Marx)

数学,如果正确地看,不但拥有真理,而且也具有至高的美.

——罗素(B. Russell)

美是首要的标准,不美的数学在世界上是找不到永久容身之地的.

——哈代(G. H. Hardy)

引言

人类社会历史的发展和自然界的演化告诉人们,一切事物生存和发展所共同遵守的法则是:美战胜丑.为此,美学家断言:美是一切事物生存和发展的本质特征.

什么是美?美是心借物的形象来表现情趣,是合规律性与合目的性的统一(朱光潜语).美又是自由的形式:完好、和谐、鲜明.真与善、规律性与目的性的统一,就是美的本质和根源(李泽厚语).古希腊哲学家柏拉图认为“美乃视觉和听觉所产生的快感.”

在汉字中“美”字是由“羊”“大”合体构成的会意字,既可以理解为“羊大为美”,也可以理解为“人大健壮如羊”.但两种释义都可以归结出“美好”这一基本概念.从文字学角度讲,便叫作“美”字的本义(图1).

甲骨文　　金文　　小篆　　楷体

图1 “美”是以“羊”“大”二字构成的会意字

“美”字既有美丽、美好之意,又可以引申出赞美的意思.

然而人们认识美、探索美的秘密却是一个极为古老的课题. 美的秘密世世代代搅扰着人类的思维. 在历史上,关于美的谈论相当多,尽管有些是只言片语. 最古老的文明留下的文物、遗迹中,无不烙上古代人们的世界观和审美观.

古希腊哲学家苏格拉底(Socrates)认为:最有益的即是最美的. 因而古希腊的美学是知识不可分割的一部分,这恰恰是由于当时许多学科的幼芽尚未从人类知识大树上长成独立的枝干. 当时的哲人们还认为:美和宇宙之美是统一的.

毕达哥拉斯(Pythagoras)学派(请注意这是一个数学团体)认为世界是完整的宇宙,整个天体就是和谐与数. 正是这个学派,在研究音乐时最早使用了数学(他们试图提出一个声调对比关系的数学公式:八度音与基本音调之比为1∶2,五度音为2∶3,四度音为3∶4等),这也是人们最早用数学方法研究美的实践. 音乐、乐谱与数学同样美(图2). 因为音乐家认为:美是感性的有序和丰富.

图2　音乐、乐谱与数学同样美

和谐即是美,虽然美不只是和谐.

古希腊哲人赫拉克利特(Helakritos)认为:和谐不是静止的平衡,而是运动着的活动状态.

恩培多克勒(Empedoeles)认为:生物的进化与世界之美的完善,与美,与和谐的形成是等过程的.

原子论者德谟克利特(Demokritos)认为:生活需要有美的享受.

苏格拉底认为:“美是许多现象所固有的一个唯一的东西,它具有最普遍的具体性,但美是难以捉摸的.”

亚里士多德(Aristotle)认为:数学能促进人们对美的特性——数值、比例、秩序等的认识(图3).

新近研究发现:数学公式能唤起大脑的“美感”.

大脑扫描显示,数学公式中由数字和字母组成的复杂字符串可以唤起美

感,就像出自大师之手的艺术作品和最伟大的作曲家谱写的名曲一样让人感到优美.

伦敦大学学院的研究人员向数学家出示“丑陋”和“优美”的方程式,然后对他们进行脑部扫描.

大脑扫描发现,“优美”的数学公式能激活用来欣赏艺术的那部分神经中枢.

研究人员认为,大脑对美的感受可能有神经生物学上的根据.

像欧拉恒等式或毕达哥拉斯恒等式之类的数学公式很少与莫扎特、莎士比亚和梵高的最好作品相提并论.

研究报告刊登在《人类神经科学前沿》杂志上. 研究人员给出60个数学公式,让15位数学家来评定其优美程度.

研究小组成员之一Z. 泽基教授表示:“看方程式时会涉及大量的脑部区域,但当你看到一个堪称优美的数学公式时,它会激活大脑情绪处理区域即大脑眼窝前额皮层中区的部位,就像你在观看一幅伟大的绘画作品或聆听一段音乐时那样.”

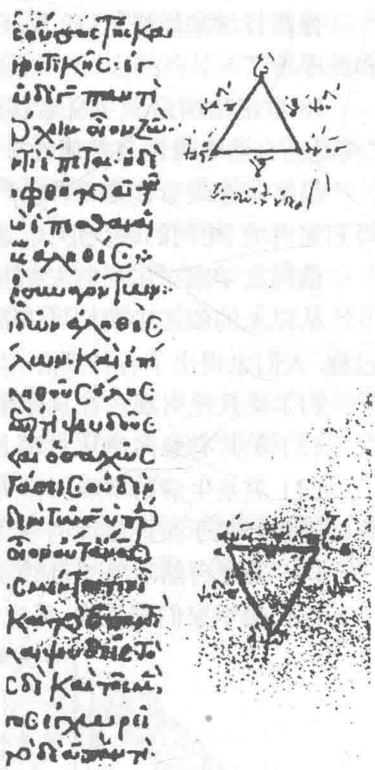


图3　亚里士多德的数学手稿

功能性磁共振成像扫描显示,他们看到的数学公式越优美. 检测到的大脑活动就越活跃. Z. 泽基说:

“神经科学不能告诉你什么是美,但如果你觉得它是美的,那么大脑眼窝前额皮层中区很可能参与其中,你能在任何东西中发现美.”

科学家们对于欧拉公式

$$e^{-i\pi}+1=0$$

体味、认知:它看上去一目了然,但却深奥的令人难以置信. 公式将 e,π,i 这三个看似极不相关的常数,能通过如此简洁的公式联系起来十分惊人. 它就像一首乐曲那样,当你了解了乐曲的全部内涵后,你方能感悟到它的美.

美是灵感的源泉,它会给你带来探索未知事物的热情和动力.

古希腊人对美探讨过追求过,在我国古代亦如此. 我国甲骨文中就已经有了“美”字,这说明当时人类对美已开始有了认识与体验. 春秋战国时代的杰出思想家孔子、孟子、老子等均从各自不同的哲学观点涉猎过美学问题. 尔后各种文艺评论,以及小说、戏曲、绘画、雕塑、建筑艺术中皆有美的意识与踪影.

德国哲学家黑格尔(G. W. F. Hegel)在《哲学史稿》中说:“美包含在体积和秩序中.”

18 世纪法国启蒙主义者伏尔泰(Voltaire)、狄德罗(D. Diderot)等人认为“美是大自然本身的自然属性”.

黑格尔把美看作是精神的(绝对观念的)整个世界运动的阶段之一,观念得到完善的、相同的表现形式,这就是美.

俄国文学家车尔尼雪夫斯基(Н. Г. Чернышевский)认为:美就是生活.

从以上的叙述中我们可以看到,人们对于美的认识是一个古老而又漫长的过程. 人们也提出了各种观念,大体上可总结为下面几种模式:

(1) 美是绝对观念在具体事物和现象中的表现或体现;

(2) 美是有意向地从主观上认识事物的结果;

(3) 美是生活的本质同作为美的尺度的人相比较,或者同他的实际需要、他的理想和关于美好生活的观念相比较的结果;

(4) 美是自然现象的自然属性.

当代美学家们则认为,美应包含下列各项:

$$\text{美}\left\{\begin{array}{c}\text{审美对象}\\ \uparrow\\ \text{审美性质}\\ \uparrow\\ \text{美的本质}\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\text{自然美}\\ \text{社会美}\end{array}\right\}\rightarrow\begin{array}{l}\text{科学美}\\ \text{艺术美}\end{array}$$

说得具体点,美的基本类别(客观来源)有二:自然美和社会美. 自然事物或自然界中的美叫自然美;社会事物的美叫社会美.

美的社会形态也有二:艺术美和科学美(更确切地讲是科技美). 艺术美是艺术家通过艺术形象再现的生活中的美;科学美主要指理论美(技术美还包括技术规律和创造的美),其内涵是指结构美和公式美. 艺术美和科学美都是自然美和社会美的客观反映,只不过方法与侧重点不同罢了. 艺术美侧重于表现社会,即使表示自然也是通过人的社会感情去实现. 而科学美则侧重于表示自然,且逐步向社会现象渗透. 正如法国哲学家韦伊所说:科学的真正主题是世界之美.

这正如著名物理学家海森伯(W. K. Heisenberg)说的那样:美的王国远远延伸到艺术领域之外,它无疑包括精神生活的其他领域,自然美也反映在自然科学的美之中. 物理学中包含了两种极端:实验与想象、逻辑与直觉、客观的真实与主观的美感.

数学家格塞(Goethe)说:“数学家只有在他内心感到真实的美时,数学才是完美的.”

顺便提一下:技术美是人类将技术规律纳入人的目的的轨道,在造物活动中把物的尺度与人的社会尺度结合在一起而创造的美,它使得技术产品不再是与人对立的异己力量,而是具有亲和力的人的有效工具.

在当今的科学分类研究中,许多学者称哲学和数学是普遍科学,且认为二者可应用于任何学科和任何领域,其差别在于刻画现实世界时使用的方法和语言不同:哲学使用的是自然语言,数学使用的是人工语言(数学符号);哲学使用的是辩证逻辑方法,而数学使用的是形式逻辑与数理逻辑方法.这样哲学家有时可以"感觉到"思维的和谐,而数学家则有时可以"感觉到"公式与定理的和谐,即美.

数学也是自然科学的语言,故它具有一般语言文学与艺术所共有的美的特点,即数学在其内容结构上、方法上也都具有自身的某种美,即所谓数学美.因而数学美是具体、形象、生动的.数学美的起源遥远,历史悠久.

古希腊著名的学者毕达哥拉斯对数学有很深的造诣,毕达哥拉斯定理(在我国称勾股定理)正是他的杰作(为此他的弟子们曾举行盛大的"百牛大祭"以表庆贺)(图4).

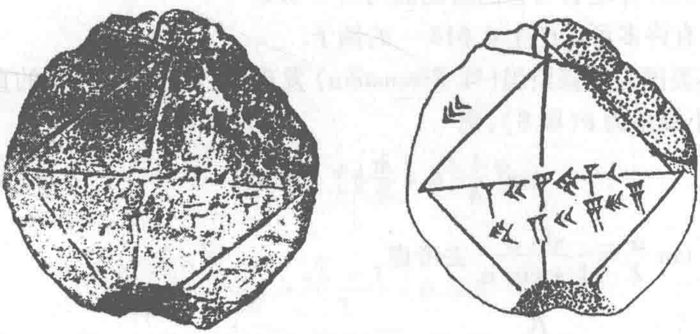


图4　刻有"毕达哥拉斯定理"的古巴比伦黏土片

他还在现今称为库洛的地方领导了一个数学学术团体,其成员经常聚在一起研究、讨论,交流各自的学习心得,他们的成果对外人是严格保密的.每个成员都守口如瓶,否则会遭惩罚.团体成员都有一个用五角星作图案的徽章,并在角顶上分别注上希腊字母υ,γ,ι,εl和α,按顺序(逆时针方向)把它们读下来即$\upsilon\gamma\iota\varepsilon l\alpha$,意思为"健康"(图5).

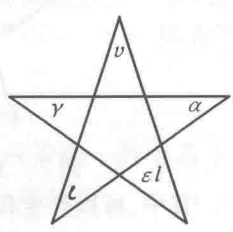


图5

五角星是他们经过仔细筛选、认真研究,并十分喜欢的图形.他们为何对五角星情有独钟?因为五角星除了具有形象美之外,它里面还包含着许多有趣的比例.

几何上，我们学过“黄金分割”，即把线段 l 分成 x 和 $l-x$ 两段（图 6），使其比满足

$$x : l = (l-x) : x$$

即

$$x^2 + lx - l^2 = 0$$

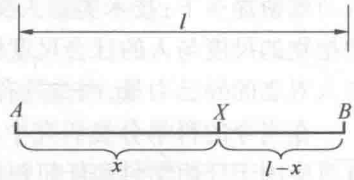


图 6

这样解得 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}l$，这种分割史称“中外比分割”，其中 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618\cdots$ 称为黄金数，常用希腊字母 τ 表示.

我们可以证明在五角星里（图 7）

$$BC : AB = AB : AC = AC : AD = \frac{x}{l}$$

显然，毕达哥拉斯学派的学者们发现了这些比例，并认为这是一种幽藏于神明的天机（在科学并不发达的当时，五角星的上述奇妙性质，似乎让人不得不这样认为）.

进一步的计算还表明它们的比值均为 0.618….

数学中有许多可以产生 0.618… 的例子.

1990 年美国人爱森斯坦（M. Eisenstein）发现：在勾三股四弦五的直角三角形中，若最小锐角为 θ（图 8），则

$$\tan\left[\frac{1}{4}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right] = 0.618\cdots$$

这一点可用 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ 去考虑.

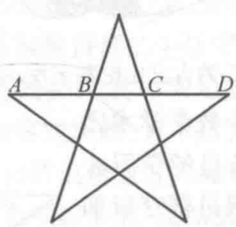


图 7　五角星的黄金分割

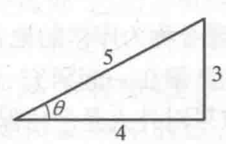
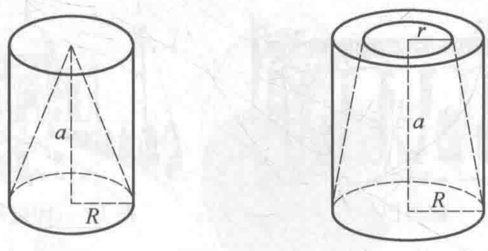


图 8

其中，可以产生 0.618… 的几何事实还有很多. 比如我们知道，在一个高为 a、底面半径为 R 的圆柱内接一圆锥，它的体积恰好为该圆柱体积的三分之一，即

$$V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3}\pi R^2 a$$

若在圆柱内求一内接圆台，使其体积恰为圆柱体积的三分之二（图 9），此时圆台上下底圆半径之比是 0.618…



(a) (b)

图 9

设圆内接圆台上底半径为 r(下底半径为 R),由圆台体积

$$V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi(R^2+Rr+r^2)a$$

且圆柱体积

$$V_{圆柱}=\pi R^2 a$$

则

$$\frac{1}{3}\pi(R^2+Rr+r^2)a=\frac{2}{3}\pi R^2 a$$

即

$$R^2-Rr-r^2=0$$

或

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2+\left(\frac{r}{R}\right)-1=0$$

解得

$$\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\cdots$$

0.618… 是被中世纪学者、艺术家达·芬奇(da Vinci)誉为“黄金数”的重要数值(因而中外比分割亦被誉为“黄金分割”),它也曾被德国天文学家、物理学家、数学家开普勒(J. Kepler)赞为几何学中两大“瑰宝”之一(另一即为“勾股定理”).

顾名思义,黄金数应当有黄金一样的价值,人们喜欢它.

(顺便讲一句,对于不同的整数 n,方程 $x^2-nx-1=0$ 产生一族金属平均数,当 $n=1$ 时得黄金平均数 $\mu=1.618\cdots$;当 $n=2$ 时得白银平均数 $\mathfrak{z}_{Ag}=1+\sqrt{2}$;当 $n=3$ 时得青铜平均数 $\mathfrak{z}_{Cu}=(3+\sqrt{13})/2$,等等.)

事实上,黄金比值一直贯穿着古代中东和中世纪西方的建筑艺术. 无论是古埃及的金字塔,还是古雅典的巴特农神庙(图 10);无论是印度的泰姬陵(图 11),还是巴黎圣母院(图 12)以及埃菲尔铁塔(图 13),这些世人瞩目的建筑中都蕴藏着 0.618… 这一黄金比值(它显然展示着数学美感).