

● 大学公共数学系列教材

高等数学

(第二版)

上册

武汉大学数学与统计学院

主编 齐民友

高等教育出版社

● 高等数学(第二版) 上册



ISBN 978-7-04-051307-3



9 787040 513073 >

定价 43.00元

● 大学公共数学系列教材

高等数学

(第二版)

上册

武汉大学数学与统计学院

主编 齐民友

编者 (以编写章节排序)

胡新启 湛少锋

黄明 杨丽华 桂晓风

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是2009年出版的武汉大学数学与统计学院齐民友主编《高等数学》的修订本,分为上、下两册。本次修订在保持原有框架、内容和风格不变的前提下,贯彻教学改革新精神,融入现代教学手段,对部分章节进行了调整、增删和改写,对部分思考题采取网络导学的方式加以解答,并补充部分网上阅读材料,使其更便于教师课堂教学和学生自主学习,对习题及其答案中的错误进行了修正。

上册内容包括极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、反常积分、微分方程等。

本书延续了第一版结构严谨、层次分明、叙述清晰、例题丰富、便于教学的特点,可作为高等学校工科类各专业和其他非数学类专业的教材和参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/齐民友主编.--2版.--北京:
高等教育出版社,2019.5

ISBN 978-7-04-051307-3

I. ①高… II. ①齐… III. ①高等数学-高等学校-
教材 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第024475号

策划编辑 张彦云
插图绘制 于博

责任编辑 张彦云
责任校对 刁丽丽

封面设计 于文燕
责任印制 田甜

版式设计 杜微言

出版发行 高等教育出版社

社址 北京市西城区德外大街4号

邮政编码 100120

印刷 北京佳顺印务有限公司

开本 787 mm×960 mm 1/16

印张 23.25

字数 420千字

购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>

<http://www.hepmall.com>

<http://www.hepmall.cn>

版 次 2009年8月第1版

2019年5月第2版

印 次 2019年5月第1次印刷

定 价 43.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 51307-00

第二版前言

本教材自 2009 年出版至今，我们广泛收集了有关专家和广大师生对教材编写的意见和建议；同时，随着网络时代的到来，充分运用线上资源来丰富教学手段、提高教学效率成为教学改革中的新亮点。因此，我们进行了这次修订。

在本次修订中，我们参照教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会最新制订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，充分尊重并考虑多方征求的意见与建议，在保持教材原有特色不变的前提下，结合新形势下课程教学改革和建设的精神以及编者在教学实践中的新的体会，使教材更加适合现代化的教学理念，更加便于教与学。为此，我们对部分章节进行了调整、增删和改写；对于书中部分思考题的解答采取网络导学的方式，以符号 \square 标识，并补充部分网上阅读材料，学生可通过扫描书中的二维码自主学习这些延伸的知识内容，以加深对概念的理解和掌握；并对习题及其答案中的错误进行了修正，删除了部分难度超过教学基本要求的题目。

本次修订工作由武汉大学数学与统计学院胡新启（第 1—3，7 章）、湛少锋（第 4—6 章）、黄明（第 8，13 章）、杨丽华（第 9，10 章）、桂晓风（第 11，12 章）完成。武汉大学数学与统计学院的领导高度重视本次修订工作，赵会江教授、涂振汉教授以及羿旭明教授参加了本书的修订会讨论修订方案，并给予修订工作全方位的支持，同时，我们还得到了武汉大学和兄弟院校的广大同仁和专家以及高等教育出版社的大力协助，对此，我们一并表示衷心的感谢。

对于书中存在的不妥甚至错误之处，敬请专家、同仁及广大读者批评指正。你们的意见与建议是本教材进一步完善的源泉。

编者

2018 年 8 月 31 日于珞珈山

第一版前言

“高等数学”是高等学校非数学类各专业的重要基础理论课，是传授微积分学知识、培养理性思维和创新能力的综合载体，也是弘扬数学文化、培养科学精神的重要平台。本书是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，并结合我们在武汉大学多年来的教学实践经验编写而成的。

本书可作为高等学校工科类各专业本科“高等数学”或“微积分”课程的教材(180~216学时)，对于少学时的有关专业作适量删减后也同样适用。本书分为上、下两册，上册内容包括极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、反常积分、微分方程等；下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、含参变量积分、无穷级数等。

本书在编写过程中，我们仔细研读了国内外相关优秀教材，并进行了广泛的调查研究，总结分析了多年来讲授“高等数学”的教学经验。我们始终遵循通过知识的传授，着力于培养学生的数学素质，使学生将来有进一步更新知识的能力；着力于培养学生应用知识的意识和兴趣，逐步提高应用数学解决实际问题的能力；渗透现代基础数学和应用数学的思想与方法，为进一步了解现代数学知识开辟延伸的接口，致力于将本书打磨成既继承传统教材的优点，又积极慎重更新体系与内容，把现代数学思想和观点融入经典内容之中的一本教材，以适应新世纪对工程技术人才数学素质的要求。

本教材有如下特点：

(1) 在突出微积分的基本思想和基本方法的同时，努力拓宽和加强数学基础理论，以便读者在学习过程中能够较全面地了解各部分内容的内在联系，从总体上把握学习微积分的思想方法。本书加强了极限理论，从确界原理出发，讲解并证明了极限理论中的几个基本定理；有重点地证明了闭区间上连续函数的几个重要性质；增加了平面点列的极限、二元函数二次极限、多元函数的极限与连续性概念、反常二重积分、曲面积分与曲面形状无关(只与曲面边界有关)的条件；介绍了数值计算的有关概念。教材尽量使用现代数学的语言、术语和符号，便于与现代数学对接。此外，还增加了一些现代科学技术中颇有用途的数学知识，例如，一致连续、一致收敛、含参变量积分、外微分等。

(2) 注重阐述高等数学基本概念、基本方法和基本理论的实际背景和发

展过程，特别是几何背景和物理背景，并深入剖析彼此的内在联系，使读者不仅了解数学概念的形成过程，理解数学概念的内涵与本质，而且能够领悟其中所蕴含的数学文化和数学精神。

(3) 坚持数学理论的完整性和严谨性，对基本的概念、定理和公式均作严格的、准确的、规范的叙述。同时，还有针对性地选配了一定数量的应用这些定理的思考题与 A、B 两类练习题，并且为读者预留了推广和深化基本概念、定理和公式的拓展空间。着力于发挥本课程在培养读者的逻辑推理能力、抽象概括能力、判断辨别能力和综合创新能力以及缜密、准确、精练的表述能力，开放思维、发散思维、创新性思维等诸方面的特殊作用。

(4) 注意加强分析、代数、几何内容的有机结合，相互渗透。数学本身是一个完整体，数学分支之间相互渗透，特别是随着数学科学的发展、科学技术的进步，新的数学分支与传统的数学分支相互渗透，交融结合更加紧密，很难说清属于哪一类。为此我们在教材内容上加大了分析、代数、几何思想的融合，充分运用线性代数中矩阵、行列式等相关知识来表达分析、几何中的有关内容，如：在介绍概念、定理时，尽量做出几何解释，适当配合图示；在多元函数微积分、空间解析几何等内容中利用矩阵、行列式、克拉默法则等代数知识来简化分析和几何问题；增加向量分析与场论初步、外微分等内容，将第二型线、面积分与向量场的研究密切结合；运用外微分形式使格林公式、高斯公式、斯托克斯公式得到统一。这种处理方法，不仅符合现代数学的发展趋势，而且也可以更好地满足现代科技对数学知识的要求，有利于提高读者综合运用数学知识的能力。

(5) 注重理论联系实际，加强数学知识应用能力的培养。在阐述基本内容的同时，力求突出对于解决实际问题有着重要应用价值的数学思想方法，揭示重要数学概念和方法的本质，使学生明了理论来自实践，学习的目的又在于应用。本书遴选了不少诸如在电子、测绘、经济、医学以及其他工程技术领域甚至日常生活方面的例题和习题，并注意应用问题的科学性与趣味性。此外，每章还配备了综合应用题，使读者从建立模型、寻求方法到问题解决的全过程得到初步的训练。

(6) 为满足不同专业学生的要求，本书对部分内容在标题上标注 * 号，表示该内容可供学生自学。希望这样的处理能给教师留下一定的取舍空间，使他们可根据学生实际情况和教学时数，做出灵活安排。

本书由齐民友教授主持编写，其编写大纲和体系经过集体多次讨论确定，承担编写任务的教师有：胡新启（第 1—3 章，第 7 章）、湛少锋（第 4—6 章）、黄明（第 8, 13 章）、杨丽华（第 9, 10 章）、桂晓风（第 11, 12 章）。

武汉大学数学与统计学院樊启斌教授、陈文艺教授、陆君安教授仔细审阅了全书，提出了许多宝贵意见和建议。本书的编写自始至终得到高等教育出版社和武汉大学数学与统计学院的大力支持，对此，我们一并深表感谢。

本书虽然在此次正式出版之前经过试用和反复修改，但由于编者水平有限，书中难免有不妥甚至错误之处，敬请读者批评指正，使之在教学实践中日臻完善。

编 者

2009年3月20日于武汉大学

目 录

| | |
|--------------------------|----|
| 第 1 章 极限与连续 | 1 |
| 第 1 节 预备知识 | 1 |
| 1.1 集合 | 1 |
| 1.2 区间与邻域 | 2 |
| 1.3 数集的界 | 3 |
| 1.4 映射与函数 | 4 |
| 习题 1-1 | 14 |
| 第 2 节 数列极限 | 15 |
| 2.1 数列与子数列的概念 | 15 |
| 2.2 数列极限的概念 | 16 |
| 2.3 数列极限的性质 | 21 |
| 2.4 数列极限的四则运算法则 | 23 |
| 2.5 数列极限存在的判别定理 | 25 |
| 习题 1-2 | 30 |
| 第 3 节 函数极限 | 32 |
| 3.1 自变量趋于无穷大时函数的极限 | 32 |
| 3.2 自变量趋于有限值时函数的极限 | 34 |
| 3.3 单侧极限 | 38 |
| 习题 1-3 | 39 |
| 第 4 节 函数极限的性质与运算法则 | 39 |
| 4.1 函数极限的性质 | 40 |
| 4.2 函数极限的运算法则 | 41 |
| 习题 1-4 | 45 |
| 第 5 节 函数极限存在的条件 | 46 |
| 5.1 归结原理 | 47 |
| 5.2 夹逼准则与两个重要极限 | 48 |
| 5.3* 函数极限的柯西收敛准则 | 52 |
| 习题 1-5 | 53 |
| 第 6 节 无穷小与无穷大 | 54 |
| 6.1 无穷小 | 54 |
| 6.2 无穷大 | 56 |
| 6.3 无穷小的比较 | 57 |
| 习题 1-6 | 61 |

| | |
|---------------------------------|-----------|
| 第7节 函数的连续性与间断点 | 62 |
| 7.1 函数的连续性 | 62 |
| 7.2 间断点及其分类 | 64 |
| 7.3 连续函数的性质 | 66 |
| 习题 1-7 | 69 |
| 第8节 闭区间上连续函数的性质 | 70 |
| 习题 1-8 | 72 |
| 第9节* 一致连续性 | 73 |
| 习题 1-9 | 75 |
| 总习题一 | 75 |
| 第2章 导数与微分 | 78 |
| 第1节 导数的概念 | 78 |
| 1.1 引例 | 78 |
| 1.2 导数的定义 | 79 |
| 1.3 求导数举例 | 82 |
| 1.4 导数的几何意义 | 84 |
| 1.5 函数的可导性与连续性之间的关系 | 84 |
| 习题 2-1 | 85 |
| 第2节 函数的求导法则 | 87 |
| 2.1 函数的和、差、积、商的求导法则 | 87 |
| 2.2 反函数的求导法则 | 90 |
| 2.3 复合函数的求导法则 | 92 |
| 2.4 初等函数的求导公式与基本求导法则 | 95 |
| 习题 2-2 | 96 |
| 第3节 隐函数的导数、由参数方程所确定的函数的导数 | 98 |
| 3.1 隐函数的导数 | 98 |
| 3.2 由参数方程所确定的函数的导数 | 101 |
| 3.3 相关变化率 | 104 |
| 习题 2-3 | 106 |
| 第4节 高阶导数 | 107 |
| 4.1 高阶导数的定义 | 107 |
| 4.2 高阶导数的运算法则 | 110 |
| 习题 2-4 | 112 |
| 第5节 微分 | 113 |
| 5.1 微分的概念 | 113 |
| 5.2 微分的基本公式和运算法则 | 117 |
| 5.3* 高阶微分 | 119 |
| 5.4 微分在近似计算中的应用 | 120 |

| | |
|--|------------|
| 习题 2-5 | 123 |
| 总习题二 | 124 |
| 第 3 章 中值定理与导数的应用 | 126 |
| 第 1 节 微分中值定理 | 126 |
| 1.1 费马定理 | 126 |
| 1.2 罗尔中值定理 | 127 |
| 1.3 拉格朗日中值定理 | 130 |
| 1.4 柯西中值定理 | 134 |
| 习题 3-1 | 136 |
| 第 2 节 泰勒公式 | 138 |
| 习题 3-2 | 146 |
| 第 3 节 洛必达法则 | 148 |
| 3.1 “ $\frac{0}{0}$ ” 型未定式 | 149 |
| 3.2 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型未定式 | 151 |
| 3.3 其他类型的未定式 | 152 |
| 3.4 使用洛必达法则应该注意的问题 | 154 |
| 习题 3-3 | 156 |
| 第 4 节 函数的单调性与极值 | 157 |
| 4.1 函数的单调性 | 157 |
| 4.2 函数的极值 | 160 |
| 4.3 函数的最大值最小值 | 163 |
| 习题 3-4 | 166 |
| 第 5 节 曲线的凸性与函数作图 | 169 |
| 5.1 曲线的凸性 | 169 |
| 5.2 渐近线 | 174 |
| 5.3 函数的作图 | 175 |
| 习题 3-5 | 177 |
| 第 6 节 平面曲线的曲率 | 179 |
| 6.1 弧微分 | 179 |
| 6.2 曲线的曲率 | 180 |
| 6.3 曲率的计算 | 181 |
| 6.4 曲率圆与曲率半径 | 182 |
| 习题 3-6 | 184 |
| 总习题三 | 185 |
| 第 4 章 不定积分 | 188 |

| | |
|------------------------------|------------|
| 第 1 节 原函数与不定积分的概念 | 188 |
| 1.1 原函数与不定积分 | 188 |
| 1.2 基本积分表 | 191 |
| 1.3 不定积分的线性运算法则 | 193 |
| 习题 4-1 | 195 |
| 第 2 节 不定积分的换元积分法与分部积分法 | 196 |
| 2.1 换元积分法 | 197 |
| 2.2 分部积分法 | 205 |
| 习题 4-2 | 209 |
| 第 3 节 有理函数的不定积分 | 211 |
| 习题 4-3 | 217 |
| 第 4 节 可有理化函数的不定积分 | 218 |
| 4.1 三角函数有理式的不定积分 | 218 |
| 4.2 简单无理函数的不定积分 | 220 |
| 习题 4-4 | 221 |
| 总习题四 | 222 |
| 第 5 章 定积分及其应用 | 225 |
| 第 1 节 定积分的概念 | 225 |
| 1.1 具体实例 | 225 |
| 1.2 定积分的定义 | 228 |
| 1.3 定积分的几何意义 | 231 |
| 习题 5-1 | 233 |
| 第 2 节 定积分的性质 | 234 |
| 2.1 定积分的基本性质 | 234 |
| 2.2 积分中值定理 | 238 |
| 习题 5-2 | 239 |
| 第 3 节 微积分基本定理 | 240 |
| 习题 5-3 | 245 |
| 第 4 节 定积分的计算方法 | 247 |
| 4.1 定积分的换元积分法 | 247 |
| 4.2 定积分的分部积分法 | 251 |
| 习题 5-4 | 253 |
| 第 5 节 定积分的几何应用举例 | 256 |
| 5.1 平面图形的面积 | 257 |
| 5.2 体积 | 259 |
| 5.3 平面曲线的弧长 | 264 |
| 习题 5-5 | 265 |
| 第 6 节 定积分在物理中的应用 | 267 |

| | | |
|--------------|--------------------|------------|
| 6.1 | 质量 | 267 |
| 6.2 | 功 | 269 |
| 6.3 | 液体的压力 | 270 |
| 6.4 | 引力 | 271 |
| 6.5 | 静力矩与质心 | 272 |
| 6.6 | 转动惯量 | 274 |
| 6.7 | 平均值、均方根值 | 276 |
| | 习题 5-6 | 277 |
| 第 7 节 | 定积分的近似计算 | 279 |
| 7.1 | 矩形法 | 279 |
| 7.2 | 梯形法 | 280 |
| 7.3 | 抛物线法 | 281 |
| | 习题 5-7 | 283 |
| | 总习题五 | 283 |
| 第 6 章 | 反常积分 | 286 |
| 第 1 节 | 积分限为无穷的反常积分 | 286 |
| 1.1 | 积分限为无穷的反常积分概念 | 286 |
| 1.2 | 积分限为无穷的反常积分性质及判别法 | 291 |
| | 习题 6-1 | 295 |
| 第 2 节 | 无界函数的反常积分 | 296 |
| 2.1 | 无界函数的反常积分概念 | 297 |
| 2.2 | 无界函数的反常积分的性质及判别法 | 300 |
| | 习题 6-2 | 304 |
| | 总习题六 | 306 |
| 第 7 章 | 微分方程 | 307 |
| 第 1 节 | 微分方程的基本概念 | 307 |
| 1.1 | 引例 | 307 |
| 1.2 | 常微分方程的基本概念 | 308 |
| | 习题 7-1 | 311 |
| 第 2 节 | 一阶微分方程 | 311 |
| 2.1 | 可分离变量的微分方程 | 312 |
| 2.2 | 可化为可分离变量型的方程 | 313 |
| 2.3 | 一阶线性微分方程 | 314 |
| 2.4 | 伯努利方程 | 317 |
| | 习题 7-2 | 318 |
| 第 3 节 | 可降阶的高阶微分方程 | 321 |
| 3.1 | $y^{(n)}=f(x)$ 的情形 | 321 |
| 3.2 | $y''=f(x, y')$ 的情形 | 322 |

| | | |
|-------|--------------------|-----|
| 3.3 | $y''=f(y, y')$ 的情形 | 323 |
| 3.4 | 其他情形 | 324 |
| 3.5 | 二阶微分方程应用举例 | 326 |
| | 习题 7-3 | 330 |
| 第 4 节 | 线性微分方程解的结构 | 331 |
| 4.1 | 二阶齐次线性微分方程解的结构 | 331 |
| 4.2 | 二阶非齐次线性微分方程解的结构 | 332 |
| 4.3 | 解线性微分方程的常数变易法 | 334 |
| | 习题 7-4 | 336 |
| 第 5 节 | 常系数线性微分方程 | 337 |
| 5.1 | 二阶常系数齐次线性微分方程 | 337 |
| 5.2 | 二阶常系数非齐次线性微分方程 | 340 |
| 5.3 | 欧拉方程 | 345 |
| 5.4 | 常系数线性微分方程应用举例 | 346 |
| | 习题 7-5 | 350 |
| | 总习题七 | 351 |
| 附录 | 几个三角函数与反三角函数的图像与性质 | 354 |
| | 部分习题答案 | 354 |

第1章 极限与连续

函数是微积分研究的主要对象, 极限理论是微积分的基础. 本章首先回顾与复习关于集合与映射的知识, 然后讨论数列与函数的极限理论, 最后介绍连续函数的概念与性质, 为学习微积分及今后进一步学习现代数学奠定基础.

第1节 预备知识

函数是数学最基本的概念, 也是微积分研究的主要对象. 本书中的函数都是在实数范畴内讨论. 这里先介绍有关实数集的一些基本概念、性质和记号, 继而讨论函数的概念及一般性态, 同时简述基本初等函数的性质. 本节的内容是初等数学某些知识的复习、总结和提高, 也是学习微积分的基础.

1.1 集合

集合是一个最基本的数学概念, 一般将我们所关心的具有某种性质的有限个或无限个对象所组成的总体称为一个**集合**(或简称**集**), 而集合中的每一个对象称为该集合的**元素**. 如果元素 a 是集合 A 中的元素, 则称 a 属于 A , 记为 $a \in A$; 如果 a 不是集合 A 中的元素, 则称 a 不属于 A , 记为 $a \notin A$. 一个集合, 若其元素数目是有限的, 则称该集合为**有限集**, 否则称为**无限集**.

通常全体实数构成的集合记为 \mathbf{R} , 全体复数构成的集合记为 \mathbf{C} , 全体有理数构成的集合记为 \mathbf{Q} , 全体整数构成的集合记为 \mathbf{Z} , 全体非负整数构成的集合称为自然数集, 记为 \mathbf{N} . 正实数的全体记为 \mathbf{R}^+ , 正有理数的全体记为 \mathbf{Q}^+ , 正整数的全体记为 \mathbf{Z}^+ (或 \mathbf{N}_+).

若集合 A 中每一个元素都是集合 B 中的元素, 则称 A 是 B 的**子集**, 或称 A 包含于 B , 记为 $A \subseteq B$; 或称 B 包含 A , 记为 $B \supseteq A$. 不含任何元素的集合称为**空集**, 记为 \emptyset . 规定: 空集是任何一个集合的子集.

若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$ 或 $B = A$.

设 A 和 B 是两个集合. 称由 A 的所有元素和 B 的所有元素组成的集合为 A 和 B 的**并集**(每个元素只计算一次), 记为 $A \cup B$; 称由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合为 A 和 B 的**交集**, 记为 $A \cap B$; 称所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合为 A 与 B 的**差集**, 记为 $A \setminus B$ (或 $A - B$). 把研究某个问题时所考

虑的对象的全体称为全集, 记为 U , 并称 $U \setminus A$ 为 A 的补集或余集, 记为 A^c .

对于集合 A 和 B , 可以定义直积(或笛卡儿(Descartes)积), 记为 $A \times B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

例如 $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 常记为 \mathbf{R}^2 .

关于集合的运算法则如交换律、结合律、分配律、德摩根(De Morgan)律(对偶律)等, 这里略去.

在数学的概念和命题的论述中, 常使用下面一些逻辑符号:

符号“ \forall ”表示“对于任意的”或“对于所有的”; 符号“ \exists ”表示“存在某个”; 符号“ \Rightarrow ”表示“蕴涵”或“推导出”; 符号“ \Leftrightarrow ”表示“等价于”或“充分必要条件是”.

1.2 区间与邻域

实数集 \mathbf{R} 的子集称为数集, 在微积分中最常见的一类数集就是区间. 设实数 $a < b$, 则

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b, x \in \mathbf{R}\}; \quad [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b, x \in \mathbf{R}\};$$

$$[a, b) = \{x \mid a < x \leq b, x \in \mathbf{R}\}; \quad (a, b] = \{x \mid a \leq x < b, x \in \mathbf{R}\}$$

分别称为开区间、闭区间、左开右闭区间、左闭右开区间, 左开右闭区间和左闭右开区间统称为半开半闭区间, a 和 b 称为区间的端点. 上述区间都是有限区间(或有界区间), 它们可以用数轴上长度有限的线段来表示, 上面四个区间分别如图 1.1 中(a)、(b)、(c)、(d)表示. 此外还有无限区间(或无穷区间). 引入符号 $+\infty$ (读作正无穷大)和 $-\infty$ (读作负无穷大), 可用类似记号表示无限区间, 例如:

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x, x \in \mathbf{R}\}; \quad (-\infty, b) = \{x \mid x < b, x \in \mathbf{R}\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R},$$

前两个无限区间在数轴上如图 1.1 中(e)、(f)表示.

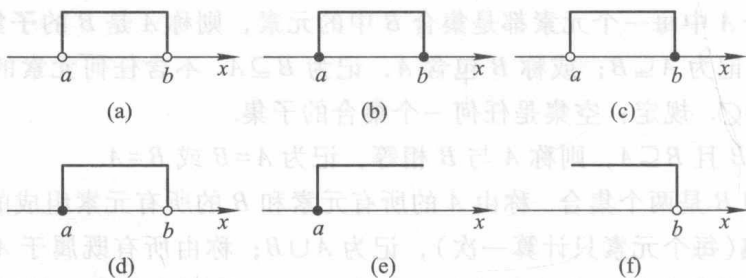


图 1.1

对于非特定的区间, 通常用字母 I 表示. 由于实数与数轴上的点的对应是通过坐标来实现的, 因此我们不区分实数和它所对应的数轴上的点的坐标, 例如数轴上的点坐标为 x , 我们常说点 x 或数 x .

邻域是一种常见的集合. 设 $x_0 \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, 所有包含 x_0 的开区间都称为 x_0 的邻域. 特别地, 称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为 x_0 的 δ 邻域, 记为 $U(x_0, \delta)$, 点 x_0 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径. 如果把邻域的中心去掉, 得到的集合 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 称为 x_0 的去心 δ 邻域, 记为 $\dot{U}(x_0, \delta)$. $U(x_0, \delta)$ 和 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 也可分别表示为

$$U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}, \quad \dot{U}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

在不强调邻域半径时, 可将邻域和去心邻域简记为 $U(x_0)$ 和 $\dot{U}(x_0)$. 有时也用 $\dot{U}_+(x_0)$ 和 $\dot{U}_-(x_0)$ 分别表示集合

$$\dot{U}_+(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < x - x_0 < \delta\}; \quad \dot{U}_-(x_0, \delta) = \{x \mid -\delta < x - x_0 < 0\}.$$

1.3 数集的界

对数集, 我们引入有界的概念.

定义 1.1 对非空数集 $D \subseteq \mathbf{R}$, 若 $\exists M \in \mathbf{R}$, 使得 $\forall x \in D$, 有 $x \leq M$, 则称数集 D 是有上界的, 称 M 为 D 的一个上界; 若 $\exists m \in \mathbf{R}$, 使得 $\forall x \in D$, 有 $x \geq m$, 则称数集 D 是有下界的, 称 m 为 D 的一个下界; 若数集 D 既有上界又有下界, 则称 D 是有界的.

也可这样定义有界:

数集 D 有界 $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbf{R}$, 使得 $\forall x \in D$, 都有 $|x| \leq M$.

容易说明有界的这两个定义是等价的.

如果这样的 M 不存在, 则称 D 是无界的. 换言之, 若对任意的正数 M (不论它多大), 总 $\exists x \in D$, 使得 $|x| > M$, 则 D 是无界的.

显然, 若一个数集有上界, 则它有无穷多个上界. 事实上, 若 M 是 D 的一个上界, 则 $M+c$ (c 为任一正数) 也是 D 的上界, 在这些上界中, 有一个具有特别重要的作用, 称它为数集 D 的上确界:

定义 1.2 设非空集合 $D \subseteq \mathbf{R}$, 若存在 $\beta \in \mathbf{R}$, 满足

(1) $\forall x \in D$, 有 $x \leq \beta$;

(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in D$, 使得 $x_\varepsilon > \beta - \varepsilon$,

则称 β 为数集 D 的上确界, 记为 $\beta = \sup D$.

根据定义, 上确界是数集 D 的最小的上界, 即: 一方面它是数集 D 的上界, 另一方面数集 D 没有比它更小的上界. 同理可以定义数集 D 的下确界 α ,