文都教育®

2019
考研数学

接力题典1800

通关 高分 夺冠常备

策划◎文都考研数学命题研究组
编著◎汤家凤

数学一

【解答册】

基础篇: 第一轮复习使用，掌握基础更牢

提高篇: 强化复习使用，解题能力提升快

超值服务: 全书免费网络答疑

中国原子能出版社

文都教育®

2019 考研数学

接力题典1800

通关 高分 夺冠常备

策划◎文都考研数学命题研究组

编著◎汤家凤

数学一

【解答册】

基础篇：第一轮复习使用，掌握基础更牢

提高篇：强化复习使用，解

超值服务：全书免费网络答

中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学接力题典1800. 数学一 / 汤家凤编著. —北京：中国原子能出版社，2018.2

ISBN 978-7-5022-8869-3

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①汤… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第033031号

考研数学接力题典1800. 数学一

出版发行	中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路43号 100048)
责任编辑	王 青
特约编辑	李 焕
印 刷	北京铭传印刷有限公司
经 销	全国新华书店
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	33.5 **字 数** 816千字
版 次	2018年2月第1版 2018年2月第1次印刷
书 号	ISBN 978-7-5022-8869-3 **定 价** 68.00元

网址:http://www.aep.com.cn **E-mail:atomep123@126.com**

发行电话:010-68452845

目录

上篇　基础篇

下篇　提高篇

[上篇]

基础篇

高等数学部分

一、函数、极限、连续

Ⅰ 入门练习

◆ 填空题

1.【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1}=\dfrac{1}{2}.$

2.【解】 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{x}{\ln(1+x)}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left\{\left[1+\dfrac{x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)}\right]^{\frac{\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}}\right\}^{\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

3.【解】 $\lim\limits_{x\to0}(e^{2x}+\sin x)^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to0}\{[1+(e^{2x}-1+\sin x)]^{\frac{1}{e^{2x}-1+\sin x}}\}^{\frac{e^{2x}-1+\sin x}{2x}}$

$$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)}=e^{\frac{3}{2}}.$$

4.【解】 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\cos x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x\cos x}+\sqrt{1+\sin x}}\cdot\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{-x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{6},$$

得 $\sqrt{1+x\cos x}-\sqrt{1+\sin x}\sim-\dfrac{1}{6}x^3$，故 $a=-\dfrac{1}{6}$，$b=3$.

5.【解】 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3\arctan x+b\sin2x}{\ln(1+x)}=3+2b$，$f(0)=1$，

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}\frac{1-\sqrt[a]{1-x^2}}{x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{a}(-x^2)}{x^2}=\frac{1}{a},$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $f(0+0)=f(0)=f(0-0)$，故 $a=1$，$b=-1$.

◆ 解答题

6.【解】(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-3x\sin x}{x^2+x\cos\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-3\dfrac{1}{x}\sin x}{1+\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}}=3.$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}}-e^2}{x}=e^2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}-1}{x}$

$$=2e^2\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=2e^2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=e^2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=-e^2.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x^2)^{\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}}=\lim\limits_{x\to0}[(1-2x^2)^{-\frac{1}{2x^2}}]^{\frac{-2x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2x^2}{-\frac{1}{2}(-x^2)}}=e^{-4}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4x+1}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x+1}{\sqrt{x^2-4x+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}=2.$

(6) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin2x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin2x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin2x}{2x}\cdot2x\ln x}=e^{2\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=e^{2\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{2\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=1.$

7.【解】(1) $4\leqslant(2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant3^{\frac{1}{n}}\cdot4$,

因为$\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}\cdot4=4$,所以由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}=4$.

(2) $\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}\leqslant\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\leqslant\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}$,

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\dfrac{1}{2}$,

所以由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n})=\dfrac{1}{2}$.

8.【解】由 $x\to0$ 时,$(1+x\sin2x)^a-1\sim ax\sin2x\sim2ax^2$,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$ 得

$$2a=\frac{1}{2},\text{故 } a=\frac{1}{4}.$$

9.【证明】由 $a_{n+1}=\dfrac{2(1+a_n)}{2+a_n}=1+\dfrac{a_n}{2+a_n}$ 得 $a_n\geqslant1(n=1,2,3,\cdots)$;

又由 $a_{n+1}=\dfrac{2(1+a_n)}{2+a_n}=2-\dfrac{2}{2+a_n}$ 得 $a_n\leqslant 2(n=1,2,\cdots)$，故数列$\{a_n\}$有界；

又由 $a_{n+1}-a_n=2(\dfrac{1}{2+a_{n-1}}-\dfrac{1}{2+a_n})=\dfrac{2(a_n-a_{n-1})}{(2+a_{n-1})(2+a_n)}$ 得 $a_{n+1}-a_n$ 与 a_n-a_{n-1} 同号，即数列$\{a_n\}$单调，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$a_{n+1}=\dfrac{2(1+a_n)}{2+a_n}$ 两边取极限得 $A=\dfrac{2(1+A)}{2+A}$，解得 $A=\sqrt{2}$.

10.【解】$x=0,x=1,x=\pi$ 为 $f(x)$ 的间断点.

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}\frac{|\sin x|}{x}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x-\pi}=\frac{1}{\pi e},\quad f(0+0)=\lim_{x\to0^+}\frac{|\sin x|}{x}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x-\pi}=-\frac{1}{\pi e},$$

由 $f(0-0)\neq f(0+0)$ 得 $x=0$ 为跳跃间断点；

$$f(\pi-0)=\lim_{x\to\pi^-}\frac{|\sin x|}{x-\pi}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x}=-\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x}=-\frac{e^{\frac{1}{\pi-1}}}{\pi},$$

$$f(\pi+0)=\lim_{x\to\pi^+}\frac{|\sin x|}{x-\pi}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x}=\frac{e^{\frac{1}{\pi-1}}}{\pi},$$

由 $f(\pi-0)\neq f(\pi+0)$ 得 $x=\pi$ 为跳跃间断点；

由 $f(1-0)=0,f(1+0)=-\infty$ 得 $x=1$ 为第二类间断点.

11.【解】当 $x<1$ 时，$f(x)=1$；

当 $x=1$ 时，$f(1)=\dfrac{2}{3}$；

当 $x>1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2}{2}$，

即 $f(x)=\begin{cases}1,x<1,\\ \dfrac{2}{3},x=1,\\ \dfrac{x^2}{2},x>1\end{cases}$

因为 $f(1-0)=1\neq f(1+0)=\dfrac{1}{2}\neq f(1)=\dfrac{2}{3}$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

Ⅱ 基础练习

◇ 填空题

1.【解】由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{(b-\cos x)\sqrt{a+x^2}}=1$ 得 $b=1$，

则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{(b-\cos x)\sqrt{a+x^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{a}}=1$，故 $a=4$.

2.【解】 由 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\dfrac{\pi-3\arccos x}{x-\dfrac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}=2\sqrt{3}$ 得 $\pi-3\arccos x\sim2\sqrt{3}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$，

故 $a=2\sqrt{3},b=1$.

3.【解】方法一 　由 $xe^x=x(1+x+o(x))=x+x^2+o(x^2),\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$，

得 $x\to0$ 时，$xe^x-\ln(1+x)\sim\dfrac{3}{2}x^2$，故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{3}{2}$.

方法二

$$\lim_{x\to0}\frac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{xe^x-x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$
$$=1+\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\frac{3}{2}.$$

4.【解】 $\lim\limits_{x\to2}(2-x)\tan\dfrac{\pi}{4}x\xlongequal{2-x=t}\lim\limits_{t\to0}t\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}t\right)=\lim\limits_{t\to0}t\cot\dfrac{\pi}{4}t=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\tan\dfrac{\pi}{4}t}=\dfrac{4}{\pi}$.

5.【解】 $\lim\limits_{x\to0^+}(\tan x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\tan x}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\tan x}\cdot\sec^2x}=e$.

6.【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x^3\sin\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to\infty}x^3(\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x})\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-\sin t}{t^3}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-\cos t}{3t^2}=\dfrac{1}{6}$.

7.【解】 $\lim\limits_{x\to0}(1+x-\sin x)^{\frac{1}{x^2\ln(1+x)}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+x-\sin x)^{\frac{1}{x-\sin x}}\right]^{\frac{x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}}=e^{\frac{1}{6}}.$$

8.【解】方法一 　由 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+o(x^5)$，　$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^5)$ 得

$\sin x\cos x=x-\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+o(x^5)$，

于是 $3x-4\sin x+\sin x\cos x\sim\dfrac{x^5}{10}$，则 $n=5$.

方法二 　$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+o(x^5)$，

$\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin2x=\dfrac{1}{2}\left[2x-\dfrac{(2x)^3}{3!}+\dfrac{(2x)^5}{5!}+o(x^5)\right]=x-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+o(x^5)$，

则 $3x-4\sin x+\sin x\cos x\sim\dfrac{1}{10}x^5$，故 $n=5$.

9.【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}\right]^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)}\right\}^{\frac{1}{1-2a}}=\frac{1}{1-2a}.$$

10.【解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x+3^x-\ln(e^2+x)}{\arctan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2^x-1)+(3^x-1)-\ln\left(1+\dfrac{x}{e^2}\right)}{x}$

$$=\ln2+\ln3-\frac{1}{e^2}=\ln6-\frac{1}{e^2}.$$

11.【解】当 $x\to0$ 时，

因为$\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1=e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1\sim x\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)\sim\dfrac{x(\cos x-1)}{3}\sim-\dfrac{1}{6}x^3$，

所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=-\dfrac{1}{6}.$

12.【解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\sin t\,dt-\ln\sqrt{1+x^2}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\dfrac{x}{1+x^2}}{4x^3}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x^2)\sin x-x}{x^3(1+x^2)}$，

因为 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$，所以当 $x\to0$ 时，$(1+x^2)\sin x-x\sim\dfrac{5}{6}x^3$，故原式$=\dfrac{5}{24}.$

13.【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+3\sqrt{\frac{1}{n}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{n}}}}=2.$$

14.【解】$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{\cos^2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x\cos x}{x}\cdot\frac{x-\sin x\cos x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin2x}{x^3}=2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{3x^2}=\frac{4}{3}.$$

15.【解】$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{x}{e^{x^2}-1}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1-x\ln(1+x)}{(e^{x^2}-1)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1-x\ln(1+x)}{x^3}$，

由$e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{x^4}{2!}+o(x^4)$ 及 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$，得

$$e^{x^2}-1=x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4),\quad x\ln(1+x)=x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3),$$

从而 $e^{x^2}-1-x\ln(1+x)=\dfrac{x^3}{2}+o(x^3)$，

所以$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{x}{e^{x^2}-1}\right]=\dfrac{1}{2}.$

16.【解】由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ 得

$x\to0$ 时，$x^2-x\ln(1+x)=\dfrac{x^3}{2}+o(x^3)\sim\dfrac{x^3}{2}$，

则 $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2-x\ln(1+x)}=2\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

17.【解】 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+16}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+4n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+4\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+4\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx=\frac{1}{2}\ln(2x+\sqrt{1+4x^2})\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}).$$

18.【解】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5\Rightarrow a=1$,

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=5\Rightarrow b=-4$.

19.【解】 $\ln(\cos ax)=\ln[1+(\cos ax-1)]\sim\cos ax-1\sim-\frac{a^2}{2}x^2$,

则 $-\frac{a^2}{2}=-2$，$b=2$，解得 $a=2$，$b=2$.

20.【解】 当 $x\to0$ 时，$\int_0^x\sin(x-t)dt\overset{x-t=u}{=}\int_x^0\sin u(-du)=\int_0^x\sin u\,du=1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$,

$e^{x^2}-\cos x=(e^{x^2}-1)+(1-\cos x)\sim x^2+\frac{x^2}{2}=\frac{3x^2}{2}$，于是 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin(x-t)dt}{e^{x^2}-\cos x}=\frac{1}{3}$.

21.【解】 $$\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}\frac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)dt=a^2\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt}{x-a}$$

$$=a^2\lim_{x\to a}f(x)=a^2f(a).$$

22.【解】 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin2x^2+e^{ax^2}-1}{\ln(1+2x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\arcsin2x^2}{2x^2}+\frac{e^{ax^2}-1}{2x^2}\right)=1+\frac{a}{2}$，$f(0)=a$,

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $1+\frac{a}{2}=a$，故 $a=2$.

23.【解】 因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\}^{2\frac{\cos x-1}{x\arctan x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}2\frac{\cos x-1}{x\arctan x}}=e^{-1}$,

所以 $a=e^{-1}$.

24.【解】 $$\lim_{x\to0}F(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+a\sin x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+a\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)+a=a+b,$$

因为 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $A=a+b$.

25.【解】 当 $x\to 0$ 时,由 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t \overset{x-t=u}{=} \int_0^x f(u)\mathrm{d}u$, $x-\arctan x = x-\left[x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]\sim\frac{x^3}{3}$ 得

$$\lim_{x\to 0}g(x)=3\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=3\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=3\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{2x}=\frac{3}{2}f'(0)=3,$$

因为 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $a=3$.

26.【解】 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{\frac{x(\cos x-1)}{x-\arctan x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\cos x-1)}{x-\arctan x}}$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\arctan x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{\frac{x^2}{1+x^2}}}=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}},$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $a=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

27.【解】 由 $\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$,

$\frac{1}{1+bx}=1-bx+b^2x^2-b^3x^3+o(x^3)$,得

$$\frac{1+ax}{1+bx}=(1+ax)[1-bx+b^2x^2-b^3x^3+o(x^3)]$$
$$=1+(a-b)x+(b^2-ab)x^2+(ab^2-b^3)x^3+o(x^3),$$

于是 $\mathrm{e}^x-\frac{1+ax}{1+bx}=(1-a+b)x+\left(\frac{1}{2}+ab-b^2\right)x^2+\left(\frac{1}{6}-ab^2+b^3\right)x^3+o(x^3)$,

由 $\mathrm{e}^x-\frac{1+ax}{1+bx}$ 为 x 的三阶无穷小得 $\begin{cases}1-a+b=0\\ \frac{1}{2}+ab-b^2=0\\ \frac{1}{6}-ab^2+b^3\neq 0\end{cases}$,解得 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$.

◇ 选择题

28.【解】 $f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1,\end{cases}$ 因为 $|f(x)|\leqslant 1$,所以 $f[f(x)]=1$,

于是 $f\{f[f(x)]\}=1$,选(B).

29.【解】 显然函数为偶函数,选(D).

30.【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\frac{\sin^2 t}{t}\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{x}}{2x}=\frac{1}{2}$ 得 $x\to 0$ 时, $f(x)\sim\frac{1}{2}x^2$,

又 $g(x)=\int_0^x\sin^2(x-t)\mathrm{d}t\overset{x-t=u}{=}\int_x^0\sin^2 u(-\mathrm{d}u)=\int_0^x\sin^2 u\,\mathrm{d}u$,

由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}$ 得当 $x\to 0$ 时, $g(x)\sim\frac{1}{3}x^3$,

故 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的高阶无穷小,应选(A).

31.【解】 当 $x\to 0^+$ 时，$\ln(1+x^2)-x^2\sim -\frac{1}{2}x^4$，

$\sqrt{1+x^2}+\cos x-2=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)+1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)-2\sim-\frac{1}{12}x^4$，

由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\ln(1+x^4)}{6x^5}=\frac{1}{3}$，得 $x\to 0$ 时，$\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t\sim\frac{1}{3}x^6$，

$\mathrm{e}^{x^2}-1-x^2=1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)-1-x^2\sim\frac{x^4}{2}$，则 $\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$ 为最高阶无穷小，选(C).

32.【解】 当 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^{x^n}-1\sim x^n$，因为 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$，所以 $(x-\sin x)\ln(1+x)\sim\frac{x^4}{6}$，

又因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x(1-\cos^2 t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(1-\cos^2 t)\mathrm{d}t}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{3x^2}=\frac{1}{3},$$

所以 $\frac{1}{x}\int_0^x(1-\cos^2 t)\mathrm{d}t\sim\frac{x^2}{3}$，于是 $n=3$，选(C).

33.【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{x}=5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5$ 得 $\alpha\sim 5x$；

由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\cos x=\mathrm{e}$ 得 $\beta\sim\mathrm{e}x$，

故 α 是 β 的同阶但非等价的无穷小，应选(D).

34.【解】 当 $x\to 0$ 时，$g(x)\sim\frac{x^5}{5}$，

因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=5\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)^2\sin x}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2 x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4}}{x^3}=0,$$

所以 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小，选(B).

35.【解】 因为当 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}(n=1,2,\cdots)$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\sin\frac{1}{x_n}=\infty$，当 $y_n=\frac{1}{2n\pi}(n=1,2,\cdots)$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}\sin\frac{1}{y_n}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 极限不存在但不是 ∞，选(C).

36.【解】 显然 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$，因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2\lim\limits_{x\to 1^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，

而 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2\lim\limits_{x\to 1^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在但不是 ∞，选(D).

37.【解】 $\lim\limits_{x\to a}F(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}[2x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+x^2 f(x)]=a^2 f(a)$，选(B).

38.【解】 将 $x=0$ 代入得 $y=1$，

$\cos(xy)+\ln y-x=1$ 两边对 x 求导得 $-\sin(xy)(y+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})+\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1=0$，

将 $x=0,y=1$ 代入得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1$，即 $f'(0)=1$，

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f(\dfrac{2}{n})-1\right]=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{2}{n}\right)-f(0)}{\dfrac{2}{n}}=2f'(0)=2$，应选(A).

39.【解】 当 $x>0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{tx}}{1+\mathrm{e}^{tx}}=1$；当 $x=0$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{2}$；当 $x<0$ 时，$f(x)=x$.

因为 $f(0+0)=1,f(0)=\dfrac{1}{2},f(0-0)=0$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，选(B).

40.【解】 因为 $f'(0)$ 存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，又因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$，显然 $x=0$ 为 $g(x)$ 的间断点，因为 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$，所以 $x=0$ 为 $g(x)$ 的可去间断点，选(B).

41.【解】 当 $|x|<1$ 时，$f(x)=1+x$；当 $|x|>1$ 时，$f(x)=0$；当 $x=-1$ 时，$f(x)=0$；当 $x=1$ 时，$f(x)=1$. 于是 $f(x)=\begin{cases}1+x, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1,\\ 0, & x=-1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$ 显然 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的间断点，选(B).

42.【解】 因为 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3}{x^3+1}=\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{ax+1}=\infty$，即 $a=1$，

又 $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to-1}(x-2)=-1$，选(B).

43.【解】 显然 $x=0$ 为 $g(x)$ 的间断点，因为 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，所以 $x=0$ 为 $g(x)$ 的可去间断点，选(A).

◇ 解答题

44.【解】(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sqrt{4x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{2}.$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{(x-1)(x+3)}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x-1}$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to1}\frac{-2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}=-\frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\sin x-x^2\cos x}{\cos2x\ln(1-2x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\sin x-x^2\cos x}{\ln(1-2x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\sin x-x^2\cos x}{-2x}$

$$=\lim_{x\to0}\left(-2\frac{\sin x}{x}+\frac{1}{2}x\cos x\right)=-2.$$

(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1+\sin\dfrac{\pi}{2}x}\cdot\dfrac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi(x-1)}{2}\right]}=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\cos\frac{\pi(x-1)}{2}}$$

$$\overset{x-1=t}{=}\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{\ln(\cos t)}{1-\cos\frac{\pi t}{2}}=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{\ln[1+(\cos t-1)]}{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi t}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1}{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi t}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi t}{2}\right)^2}=-\frac{2}{\pi^2}.$$

(5) $1-\sqrt{1-x^2}\sim\dfrac{1}{2}x^2$,

由 $\sin x=x+o(x)$， $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$ 得 $\sin x-e^x+1\sim-\dfrac{x^2}{2}$，

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-e^x+1}{1-\sqrt{1-x^2}}=-1.$

(6) 由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ 得 $\ln(1-2x)=-2x-2x^2+o(x^2)$，

于是 $\arctan^2x[2x+\ln(1-2x)]\sim-2x^4$；

又由 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)$， $e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!}+o(x^4)$ 得

$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}\sim-\dfrac{1}{12}x^4$，

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{\arctan^2x[2x+\ln(1-2x)]}=\dfrac{1}{24}.$

(7) $\sqrt{1+x^4}-1\sim\dfrac{1}{2}x^4$，

由 $(1+x)^a=1+ax+\dfrac{a(a-1)}{2!}x^2+o(x^2)$ 得