offcn 中公考研

2018 中公版

考研数学

20年真题分类精讲

（数学一）

中公教育研究生考试研究院◎编著

书内含码 码上有课

（手机扫描书内二维码，在线观看题目视频讲解）

世界图书出版公司

考研数学

20年真题分类精讲

（数学一）

中公教育研究生考试研究院◎编著

世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

图书在版编目(CIP)数据

考研数学.20年真题分类精讲.数学一 / 中公教育研究生考试研究院编著. —北京:世界图书出版公司北京公司，2016.11
ISBN 978-7-5192-1088-5

Ⅰ.①考… Ⅱ.①中… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 297620 号

书　　名	考研数学·20年真题分类精讲(数学一) KAOYAN SHUXUE · 20 NIAN ZHENTI FENLEI JINGJIANG (SHUXUE YI)
编　　著	中公教育研究生考试研究院
责任编辑	张文丽
特约编辑	汪鹏飞
装帧设计	中公教育图书设计中心
出版发行	世界图书出版公司北京公司
地　　址	北京市东城区朝内大街137号
邮　　编	100010
电　　话	010－64038355(发行)　64037380(客服)　64033507(总编室)
网　　址	http://www.wpcbj.com.cn
邮　　箱	wpcbjst@vip.163.com
销　　售	各地新华书店
印　　刷	北京鑫丰华彩印有限公司
开　　本	850mm×1168mm　1/16
印　　张	22.5
字　　数	540千字
版　　次	2017年3月第1版　2017年3月第1次印刷
国际书号	ISBN 978-7-5192-1088-5
定　　价	59.00元

如有质量或印装问题，请拨打售后服务电话 010－82838515

前言

近几年，考研竞争日趋激烈，且备考难度也在逐年上升。考研数学(一)包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计三个科目，每个科目又可分为多个知识体系，每个知识体系又包含众多考点，考生既需要综合复习，又需单独进行分类复习。

为了更好地复习考研数学，考生要了解考研数学的试题特点和出题规律，而研究历年真题就是最好的途径。经研究发现，在历年真题中，考研数学出题重心和考查方向相对稳定，很多核心考点经常被考查，因此本书对1998～2017年共20年的真题按照科目、体系、考点分类，各个突破，帮助考生在较短时间内取得更好的复习效果。

科目分类复习

考研数学(一)包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三个科目，所占试卷分值比例分别为56%、22%、22%。由于三个科目各具特点，因此针对不同科目需要采取不同的复习方法。

高等数学复习难度相对较大，所含考点较多，需要记忆的定理和公式较复杂，而且题型变化多端。考生在复习该学科时，不仅需要牢记相关定理和公式，还需通过研究真题把握不同题型的考查核心，以不变应万变。

线性代数知识点之间的综合性较强，需要记忆的定理和公式相对较少，但计算量相对较大，考生需要在理清整个学科知识体系的前提下通过练习巩固做题思路。

概率论与数理统计复习难度相对高等数学要小很多，计算过程也没有线性代数复杂，考生复习时只需重点记忆常用的公式，熟悉解题步骤。

总之，考研数学(一)三个科目之间交叉内容少，且考试的题目不会跨科考查。所以，复习考研数学(一)要分科目进行。因此，本书按科目分为三篇，帮助考生根据各个科目的特点有针对性地复习。

体系分类掌握

考研数学(一)的三个科目中，每个科目都可以分成多个知识体系，不同的知识体系考查的侧重点不同。因此考生在掌握了不同科目的特点之后，应该将每个科目分体系复习，并将考研数学真题按照不同体系分类研究。

将每个科目分体系复习，能使考生清楚掌握科目的重点。例如，高等数学的体系分类相对复杂，依据历年考查情况可以将其分为九个知识体系。

下表是高等数学的体系分类以及每个体系在20年内的考查次数，根据下表可以看出，多元函数积

分学被考查了55次，而向量代数和空间解析几何只考查了3次。考生在复习高等数学时，要特别重视考查次数多的知识点，同时也不可忽视考查次数少的知识点。

1998～2017年（数学一）高等数学体系分类及考查次数

体系	函数、极限与连续	一元函数微分学	一元函数积分学	中值定理	向量代数和空间解析几何	多元函数微分学	多元函数积分学	级数	常微分方程
考查次数	28次	41次	25次	8次	3次	38次	55次	29次	29次

因此，本书对每个科目的知识体系分类编排为章。每章开头都设有“本章考试要求”，考生可以从中了解最新大纲对本章内容的基本要求；同时，每章均设有“历年真题分布统计表”，考生可以了解本章知识在历年真题中的考查情况，从而对不同知识体系有重点地进行复习。

考点分类攻克

考研数学（一）的每个科目虽然考点众多，但绝大多数真题涉及的考点较为单一。考生在研究真题时，应按照不同考点将真题分类攻克，以便达到举一反三的效果。

1.（2016年第10题） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=$ ________。

【分析】本题的考点是高等数学中的极限的计算，没有出现高等数学中的其他考点。考生在复习的时候，应该把所有属于极限的计算这一考点的真题放在一起，便于熟练掌握该部分知识。

2.（2016年第13题）行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=$ ________。

【分析】本题的考点是线性代数中的行列式的计算，需要记忆行列式的性质，该题目与线性代数的其他考点毫无关系，考生在复习行列式时，可将真题中利用行列式性质计算行列式的题目放在一起研究，以便更好地掌握该考点有关的知识。

因此，本书将20年真题按照不同的考点归类。

第一，针对每个考点都归纳出了“解题核心要点”，给出了与该考点有关的定理、公式、方法等，便于考生记忆。

第二，将真题按照考点分类，真题的答案包括三部分：“思路分析”是对本题的主体思路和核心考点的概括；“解析”是本题的详细解题过程和步骤，多数题目为一题多解；“评注”是对每种题型核心考点和解题方法的归纳。

《考研数学·20年真题分类精讲（数学一）》一书，旨在从科目、体系、考点三个角度帮助考生透彻研究20年真题。另外，书中2003～2017年的真题均配有二维码，考生扫码即可观看题目视频讲解，从而在最短的时间内更好地复习考研数学。

中公教育研究生考试研究院

2017年3月

目录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇

高等数学

第一章　函数、极限与连续

本章考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系。

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性。

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念。

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系。

6. 掌握极限的性质及四则运算法则。

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法。

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限。

9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型。

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质。

历年真题分布统计

1998 ～ 2017 年本章真题分布统计

考点 年份	极限的性质	无穷小量的比较	极限的计算	连续与间断	总计
1998 年			3 分＋6 分		9 分
1999 年			3 分		3 分
2000 年			5 分		5 分
2001 年					0 分
2002 年		6 分			6 分
2003 年	4 分		4 分		8 分
2004 年		4 分			4 分
2005 年					0 分
2006 年			4 分＋12 分		16 分
2007 年	4 分	4 分			8 分
2008 年	4 分		9 分		13 分
2009 年		4 分			4 分
2010 年			4 分＋4 分		8 分

（续表）

年份＼考点	极限的性质	无穷小量的比较	极限的计算	连续与间断	总计
2011 年			10 分＋10 分		20 分
2012 年					0 分
2013 年		4 分			4 分
2014 年			10 分		10 分
2015 年		10 分	4 分		14 分
2016 年			4 分	4＋4 分	12 分
2017 年			10 分	4 分	14 分
总计	12 分	32 分	102 分	12 分	158 分

概述：本章是高等数学的基础，每年都会考查，且选择题、填空题和解答题均会涉及。本章的考题分布有两大特点：一是分布集中，大部分的题目考查的是极限的计算；二是联系紧密，无穷小量的比较、连续及间断等从本质上讲考查的就是极限的计算。所以，考生要重点掌握各类极限的计算方法。

历年真题分类精讲

考点一　极限的性质

（一）解题核心要点

本题型主要考查极限收敛的条件及性质，常见的结论有：

极限的四则运算法则

收敛＋收敛＝收敛，收敛＋发散＝发散，发散＋发散＝?；

收敛×收敛＝收敛，收敛×发散＝$\begin{cases}\text{发散}, & \text{收敛} \neq 0, \\ ?, & \text{收敛} = 0,\end{cases}$ 发散×发散＝?。

（上述结论中的问号表示结果不确定）

夹逼定理

若存在自然数 N，当 $n > N$ 时，恒有 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，且有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

单调有界收敛定理

单调递增有上界的数列必有极限；单调递减有下界的数列必有极限；单调无界的数列极限为 $+\infty$ 或 $-\infty$。

极限的保号性

有两个数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$：

若从某一项 N 开始，以后所有项都有 $x_n \geqslant y_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$；

若有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > \lim\limits_{n\to\infty} y_n$，则从某一项 N 开始，以后所有项都有 $x_n > y_n$。

（二）历年真题精讲

1.（2003 年，4 分） 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$，则

必有(　　)

(A)$a_n < b_n$ 对任意 n 成立。　　(B)$b_n < c_n$ 对任意 n 成立。

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在。　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在。

视频讲解

【答案】D

【思路分析】选项A、B考查极限的保号性,与保号性的相关结论相对比,可举反例;选项C、D考查极限的收敛性,结合极限收敛性的相关结论进行判断。

【解析】由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n < \lim\limits_{n\to\infty}b_n$,则由极限的保号性可知,存在$N>0$,使得当$n>N$时,$a_n<b_n$,但不是对任意的$n$都成立。例如$a_n=\frac{2}{n}$,$b_n=1$,$n=1,2$时不满足$a_n<b_n$,所以选项A错误。

类似地,选项B也是错误的。例如$b_n=1$,$c_n=\frac{n}{2}$,$n=1,2$时不满足$b_n<c_n$。

由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,因此$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$是$0\cdot\infty$型的未定式,有可能收敛也有可能发散,所以选项C是错误的。例如$a_n=\frac{2}{n}$,$c_n=\frac{n}{2}$,极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=1$。

证明$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$发散,可采用反证法。假设$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$是收敛的,由于$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1\neq0$,可知$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_nc_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$也是收敛的,与已知条件矛盾,假设不成立,也即$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$是发散的。由此唯一正确的选项是D。

评注

选项A,B容易和极限的保号性混淆:若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,则存在$N>0$,当$n>N$时,有$a_n<b_n$。但要注意的是,这里$a_n<b_n$只是对足够大的$n(n>N)$才成立,无法保证对每一项都成立。

2. (2007年,4分) 设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上具有二阶导数,且$f''(x)>0$,令$u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$,则下列结论正确的是(　　)

(A) 若$u_1>u_2$,则$\{u_n\}$必收敛。　　(B) 若$u_1>u_2$,则$\{u_n\}$必发散。

(C) 若$u_1<u_2$,则$\{u_n\}$必收敛。　　(D) 若$u_1<u_2$,则$\{u_n\}$必发散。

视频讲解

【答案】D

【思路分析】对于这种类型的题目,常用举反例法。

【解析】方法一:设$f(x)=x^2$,则$f(x)$在$(0,+\infty)$上具有二阶导数,且$f''(x)>0$,$u_1<u_2$,但$\{u_n\}=\{n^2\}$发散,排除C;

设$f(x)=\frac{1}{x}$,则$f(x)$在$(0,+\infty)$上具有二阶导数,且$f''(x)>0$,$u_1>u_2$,但$\{u_n\}=\{\frac{1}{n}\}$收敛,排除B;

设$f(x)=-\ln x$,则$f(x)$在$(0,+\infty)$上具有二阶导数,且$f''(x)>0$,$u_1>u_2$,但$\{u_n\}=\{-\ln n\}$发散,排除A。故应选D。

方法二:由拉格朗日中值定理,有

$$u_{n+1}-u_n=f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)(n+1-n)=f'(\xi_n),$$

其中$n<\xi_n<n+1(n=1,2,\cdots)$。

由 $f''(x)>0$ 知，$f'(x)$ 单调增加，故

$$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)<\cdots<f'(\xi_n)<\cdots,$$

所以

$$u_{n+1}=u_1+\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_1+\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)>u_1+nf'(\xi_1)=u_1+n(u_2-u_1),$$

于是当 $u_2-u_1>0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=+\infty$，故选 D。

3. (2008 年，4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是(　　)

视频讲解

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛。　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛。

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛。　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛。

【答案】 B

【思路分析】 本题考查数列收敛问题。判断数列收敛主要用到单调有界定理。

【解析】 由 $f(x)$ 有界可得 $\{f(x_n)\}$ 也有界，由 $f(x)$ 单调且 $\{x_n\}$ 也单调可得 $\{f(x_n)\}$ 单调，此时 $\{f(x_n)\}$ 单调有界，故选 B。

实际上也可以举特例判断：

如果令 $x_n=n$，则 $\{f(x_n)\}$ 单调，由单调有界收敛定理可知，$\{f(x_n)\}$ 是收敛的，但此时 $\{x_n\}$ 是发散的，排除 C 和 D。

本题容易引起混淆的是选项 A，$\{x_n\}$ 收敛时，假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，此时要得到 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 也存在，必须有 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续的条件。但题目中的条件并不能保证 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，所以 A 不正确。

例如：$f(x)=\begin{cases}\arctan x-1, x\leqslant 0,\\ \arctan x+1, x>0,\end{cases}$ $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$。

考点二　无穷小量的比较

(一) 解题核心要点

设在某极限过程 $x\to\square$ 中，函数 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 都为无穷小量，并且都不为 0：

如果 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称当 $x\to\square$ 时，$\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量，或 $\beta(x)$ 为 $\alpha(x)$ 的低阶无穷小量，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$；

如果 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$，则称当 $x\to\square$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小量；

在同阶无穷小中，如果 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称当 $x\to\square$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小量，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$。

按照上述定义，要比较两个无穷小量，直接相除取极限即可。

(二) 历年真题精讲

1. (2002 年，6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值。

【思路分析】 相当于已知 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=0$，可以先借助极限的形式得出分子趋近

于 0，再通过洛必达法则或是导数的定义求出极限；也可以直接写出 $f(h)$ 和 $f(2h)$ 的泰勒展开式。

【解析】方法一：由题设条件知

$$\lim_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0,$$

由于 $f(0)\neq 0$，所以 $a+b-1=0$。又由洛必达法则，

$$\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{a[f(h)-f(0)]}{h}+\frac{2b[f(2h)-f(0)]}{2h}+\frac{(a+b-1)f(0)}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}[af'(h)+2bf'(2h)]=(a+2b)f'(0),$$

由于 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，由高阶无穷小的定义知上式等于 0，又由 $f'(0)\neq 0$，得 $a+2b=0$。

解方程组 $\begin{cases}a+b-1=0,\\ a+2b=0,\end{cases}$ 得 $a=2,b=-1$。

方法二：分别将 $f(h),f(2h)$ 按带佩亚诺余项的泰勒公式展开到 $o(h)$，有

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+o(h),f(2h)=f(0)+2f'(0)h+o(h),$$

从而

$$af(h)+bf(2h)-f(0)=(a+b-1)f(0)+(a+2b)f'(0)h+o(h)。$$

由题设条件知，$a+b-1=0,a+2b=0$，所以 $a=2,b=-1$。

方法三：由题设条件，有

$$\lim_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0。$$

由于 $f(0)\neq 0$，所以 $a+b-1=0$。再将 $a=1-b$ 代入 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[af(h)+bf(2h)-f(0)]$，凑成导数定义形式，有

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1-b)f(h)+bf(2h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(h)-f(0)}{h}-b\frac{f(h)-f(0)}{h}+2b\frac{f(2h)-f(0)}{2h}\right]$$

$$=f'(0)-bf'(0)+2bf'(0)=(1+b)f'(0),$$

从而 $a=2,b=-1$。

评注

方法一中使用洛必达法则的合理性在于函数 $f(x)$ 有连续的导数，因为此时有 $\lim\limits_{h\to 0}f'(h)=f'(0)$。如果把条件减弱为 $f(x)$ 可导就不能再使用洛必达法则了，因为此时仅知道 $f'(h)$ 是存在的，但极限 $\lim\limits_{h\to 0}f'(h)$ 无法确定等于多少。

2.（2004 年，4 分）把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\,dt,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是（　　）

视频讲解

(A) α,β,γ。　(B) α,γ,β。　(C) β,α,γ。　(D) β,γ,α。

【答案】B