考研专用

高等数学
辅导及习题解答

上册

考研数学命题研究组　编

高等教育出版社

考研专用

高等数学

辅导及习题解答

上册

考研数学命题研究组　编

高等教育出版社·北京

内容提要

《专研专用高等数学辅导及习题解答（上册）》以同济大学数学系编写的《高等数学（上册）》第七版为参考，共分7章，章节的划分与第七版基本一致。每节内容由3部分组成：基本概念；重要性质、定理与公式；典型例题解析。各章后有归纳与总结小节。所选例题大多为典型考研试题。

本书可作为学生考研的系统复习与基础训练用书，也可作为教师教学的参考书，同时也是一本同步指导与训练教程，而且也可作为高等工科院校高等数学学习的辅导读物。

图书在版编目（CIP）数据

考研专用高等数学辅导及习题解答. 上册 / 考研数学命题研究组编. -- 北京：高等教育出版社，2017.8
ISBN 978-7-04-048334-5

Ⅰ.①考… Ⅱ.①考… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第187472号

策划编辑 张耀明　　责任编辑 张耀明　　封面设计 李小璐　　版式设计 范晓红
责任校对 高　歌　　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 三河市华骏印务包装有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
总 印 张 49.25
总 字 数 1230千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
　　　　 http://www.hepmall.com
　　　　 http://www.hepmall.cn
版　　次 2017年8月第1版
印　　次 2017年8月第1次印刷
定　　价 108.00元

物 料 号 48334-00

预备知识

本书中“**R**”表示实数集，“$\mathbf{N}_+$”表示正整数集，“**N**”表示自然数集，“**Z**”表示整数集，“**Q**”表示有理数集，“$\mathbf{Q}^C$”表示无理数集.

1. 三角恒等式

加法公式

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$；　　$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$；

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$.

和差化积公式

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$；　　$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$；

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$；　　$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

积化和差公式

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$；　　$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$；

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$；　　$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$.

倍角公式

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$；　　$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$；

$\sin 3\alpha=-4\sin^3\alpha+3\sin\alpha$；　　$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

万能公式

$\sin\alpha=\dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$；　　$\cos\alpha=\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$；　　$\tan\alpha=\dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

半角公式　下列公式中根号前所取符号由$\dfrac{\alpha}{2}$所在象限决定

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$；　　$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$；

$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$；　　$\cot\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

“1”的妙用

$1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$；　　$1=\tan\alpha\cot\alpha$；　　$1=\sec^2\alpha-\tan^2\alpha$；　　$1=\csc^2\alpha-\cot^2\alpha$.

诱导公式

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$；　　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$；

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$； $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$；

$\sin(k\pi\pm\alpha)=\pm(-1)^k\sin\alpha$； $\cos(k\pi\pm\alpha)=(-1)^k\cos\alpha$.

2. 常用等式与不等式

(1) 设 $a,b\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}_+$，则

(i) $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$，其中 $C_n^k=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$；

(ii) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}),n\geqslant 2$；

(iii) $\big||a|-|b|\big|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$；

(iv) $\sqrt{|ab|}\leqslant\dfrac{|a|+|b|}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

(2) 设 $a,b>0$ 且 $a,b\neq 1,c,d>0$，则

$$\log_a c+\log_a d=\log_a(cd),\quad \log_a c-\log_a d=\log_a\frac{c}{d},\quad \log_a b=\frac{\ln b}{\ln a}=\frac{1}{\log_b a}.$$

3. 常见图形的面积

(1) 半径为 r，圆心角为 θ 的扇形的面积为 $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$；

(2) 半径为 r 的圆的面积为 $S=\pi r^2$；

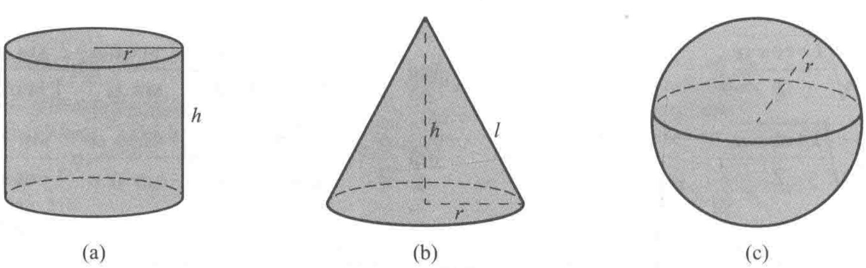
(3) 长半轴为 a，短半轴为 b 的椭圆的面积为 $S=\pi ab$.

4. 常见旋转体的体积、侧面积以及表面积

(1) 以 r 为底面半径，h 为高的圆柱(如下图(a))的体积为 $V=\pi r^2h$，侧面积为 $S_1=2\pi rh$，表面积为 $S_2=2\pi rh+2\pi r^2$；

(2) 以 r 为底面半径，h 为高的圆锥(如下图(b))的体积为 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$，侧面积为 $S_1=\pi rl$，表面积为 $S_2=\pi rl+\pi r^2$，其中 $l=\sqrt{h^2+r^2}$ 为圆锥母线；

(3) 以 r 为半径的球(如下图(c))的体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，表面积为 $S=4\pi r^2$.



(a) (b) (c)

目　　录

第一章　函数与极限

本章内容概览

函数是高等数学的研究对象，极限方法是研究函数的一种基本方法.本章主要介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的相关性质.

- 函数与极限
  - 函数
    - 函数的概念
    - 函数的特性（有界性、单调性、奇偶性、周期性）
    - 复合函数与反函数
    - 初等函数
  - 数列与函数的极限
    - 极限的定义：ε-N（数列）、ε-δ（函数）表述
    - 极限的性质与运算法则
      - 唯一性、（局部）保号性、（局部）有界性
      - 四则运算法则、复合函数的极限运算法则
      - 函数极限与数列极限的关系
    - 极限存在准则与两个重要极限
      - 夹逼准则、单调有界准则
      - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$
    - 无穷小
      - 无穷小的概念与性质
      - 无穷小的阶的比较
      - 无穷小与无穷大之间的关系
  - 函数的连续性
    - 连续的定义
    - 连续函数的性质
      - 连续函数的四则运算法则
      - 反函数与复合函数的连续性
      - 初等函数的连续性
      - 闭区间上连续函数的性质
        - 有界性定理
        - 最大值最小值定理
        - 零点定理
        - 介值定理
    - 间断点的定义与分类

考研大纲要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

第一节　映射与函数

一、基本概念

1. 区间的概念

设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$.数集

$$\{x \mid a<x<b\}$$

称为开区间,记作(a,b),即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间(a,b)的端点,这里 $a\notin(a,b)$,$b\notin(a,b)$.数集

$$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为闭区间,记作$[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间$[a,b]$的端点,这里 $a\in[a,b]$,$b\in[a,b]$.

类似可定义左闭右开区间$[a,b)$、左开右闭区间$(a,b]$如下:

$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\},\quad (a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}.$$

以上这些区间都称为有限区间.

类似可定义无穷区间如下:

$$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\},(-\infty,b)=\{x \mid x<b\},(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}.$$

以后不需要辨明区间是否包含端点,以及是有限区间还是无穷区间时,我们就简单地称它为“区间”,且常用 I 表示.

2. 映射的概念

设 X,Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对 X 中每个元素 x,按法则 f,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,那么称 f 为从 X 到 Y 的映射,记作

$$f:X\to Y,$$

其中元素 y 称为元素 x(在映射 f 下)的像,并记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$,而元素 x 称为元素 y(在映射 f 下)的一个原像;集合 X 称为映射 f 的定义域,记作 D_f,即 $D_f=X$;X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域,记作 R_f 或 $f(X)$,即

$$R_f=f(X)=\{f(x) \mid x\in X\}.$$

若 $R_f=Y$,即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像,则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射;若对 X 中任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$,它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 为 X 到 Y 的单射;若映射 f 既是单射,又是满射,则称 f 为一一映射(或双射).

(1) 映射定义中的三要素:集合 X,即定义域 $D_f=X$;集合 Y,即值域的范围:$R_f\subset Y$;对应法则 f,

使对每个 $x\in X$,有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

(2) 对每个 $x\in X$,元素 x 的像 y 是唯一的;而对每个 $y\in R_f$,元素 y 的原像却不一定是唯一的;映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集,即 $R_f\subset Y$,但不一定有 $R_f=Y$.

3. 函数的概念

设数集 $D\subset\mathbf{R}$,则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数,通常简记为 $y=f(x)$,$x\in D$,其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域,记作 D_f,即 $D_f=D$.对每个 $x\in D$,按对应法则 f,总有唯一确定的值 y 与之对应,这个值称为函数 f 在 x 处的函数值,记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$.

因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系,通常称为函数关系.函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域,记作 R_f 或 $f(D)$,即 $R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$.

(1) **函数定义中的二要素**　定义域与对应法则是函数定义中的两个要素,而值域由定义域与对应法则来确定.**两个函数相同当且仅当它们的定义域与对应法则都相同**.

(2) **函数的表示法**　表示函数的主要方法有三种:表格法、图形法、解析法(公式法).这些表示方法只是两个变量间函数关系的表现形式,只要自变量 x 和对应法则 f 确定,因变量 y 就被唯一确定,它不依赖于对应法则的表现形式.

(3) **函数的定义域**　函数的定义域通常按两种情形来确定:一种是对有实际背景的函数,根据实际背景中变量的实际意义确定.例如,在匀速直线运动中,设物体的速度为 v,则距离 s 与时间 t 之间的函数关系是 $s=vt$,这里 t 不可能取负值,故函数的定义域为 $[0,+\infty)$.另一种是抽象地用算式表达的函数,通常约定这种函数的定义域是**使得算式有意义的一切实数组成的集合**,这种定义域称为函数的自然定义域.例如,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的自然定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0\}$.一般地,函数 $y=\dfrac{1}{g(x)}$ 的自然定义域为 $g(x)$ 的自然定义域与集合 $\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $g(x)\neq0\}$ 的交集.

常见函数的自然定义域如下:

$y=\sqrt[2n]{x}\,(n\in\mathbf{N}_+),D=\{x\mid x\geqslant0\}$;　　$y=\log_a x\,(a>0$ 且 $a\neq1),D=\{x\mid x>0\}$;

$y=\tan x,D=\left\{x\mid x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$;　　$y=\cot x,D=\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$;

$y=\sec x,D=\left\{x\mid x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$;　　$y=\csc x,D=\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$;

$y=\arcsin x,D=\{x\mid |x|\leqslant1\}$;　　$y=\arccos x,D=\{x\mid |x|\leqslant1\}$.

其中函数 $\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$ 的自然定义域的实质是 $\sin x,\cos x$ 作分母时不能为 0.

求函数自然定义域的一般方法是先写出构成函数的各个简单函数的定义域,再求出这些定义域的交集,便得到所求定义域.

4. 函数的几种特性

(1) 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$.如果存在数 K_1,使得 $f(x)\leqslant K_1$ 对任一 $x\in X$ 都成立,那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界,而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界.

如果存在数 K_2，使得 $f(x) \geqslant K_2$ 对任一 $x \in X$ 都成立，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界.

如果存在正数 M，使得 $|f(x)| \leqslant M$ 对任一 $x \in X$ 都成立，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界；这就是说，如果对于任何正数 M，总存在 $x_1 \in X$，使 $|f(x_1)| > M$，那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如，函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内有下界（例如 1 就是它的一个下界），但没有上界. 然而 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的. 再如，函数 $f(x) = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界的，因为对任意的 $x \in \mathbf{R}$，$|\sin x| \leqslant 1$. 由此可以看出，函数的有界性与给定的区间以及对应法则都有关系.

容易证明，**函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.**

(2) 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$，那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(减少)的. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

(3) 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x \in D$，$f(-x) = f(x)$ 恒成立，那么称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任一 $x \in D$，$f(-x) = -f(x)$ 恒成立，那么称 $f(x)$ 为奇函数.

由定义可知，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称. 若 $f(x)$ 是 D 上的奇函数且 $0 \in D$，则 $f(0) = 0$.

(4) 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 l，使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x \pm l) \in D$，且 $f(x+l) = f(x)$ 恒成立，那么称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为最小正周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为最小正周期的周期函数. 周期函数不一定存在最小正周期，例如常值函数.

5. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u = g(x)$ 的定义域为 D_g，且其值域 $R_g \subset D_f$，则函数 $y = f[g(x)]$，$x \in D_g$ 称为由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数，通常记为 $f \circ g$，即 $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$. 复合函数 $f \circ g$ 的定义域为 D_g，变量 u 称为中间变量.

由上述定义可知,若 $R_g \not\subset D_f$,则 $u=g(x)$ 与 $y=f(u)$ 不能构成复合函数.例如,函数 $f_1(u)=\dfrac{1}{\sqrt{u-1}}$ 的定义域为 $D_{f_1}=(1,+\infty)$,函数 $g_1(x)=\sin x$ 的值域为 $R_{g_1}=[-1,1]$,$D_{f_1}\cap R_{g_1}=\varnothing$,故 g_1 与 f_1 不能构成复合函数.

再如,$f_2(u)=\sqrt{u}$ 的定义域为 $D_{f_2}=[0,+\infty)$,$g_2(x)=x-1$ 的值域为 $R_{g_2}=(-\infty,+\infty)$,显然 $R_{g_2}\not\subset D_{f_2}$,故 g_2 与 f_2 也不能构成复合函数.但是由于 $R_{g_2}\cap D_{f_2}\neq\varnothing$,如果将 g_2 限制在其定义域 $\mathbf{R}$ 的子集 $[1,+\infty)$ 上,即令 $g_2^*(x)=x-1, x\in[1,+\infty)$,那么 $R_{g_2^*}=[0,+\infty)\subset D_{f_2}$,从而 g_2^* 与 f_2 可以构成复合函数 $(f_2\circ g_2^*)(x)=\sqrt{x-1}, x\in[1,+\infty)$.习惯上为了简便起见,仍称函数 $\sqrt{x-1}$ 是由函数 $g_2(x)=x-1$ 与函数 $f_2(u)=\sqrt{u}$ 构成的复合函数,但读者需明白这其中的含义.

注意:两个函数以不同次序复合一般会得到不同的结果. 例如,$f(x)=x^2$,$g(x)=e^x$,$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=e^{2x}$,$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=e^{x^2}$,$(f\circ g)(x)\neq(g\circ f)(x)$.再如,$f(x)=x^2$,$g(x)=2x$,$(f\circ g)(x)=4x^2$,$(g\circ f)(x)=2x^2$.

6. 反函数

设函数 $f:D\to f(D)$ 是单射,则它存在逆映射 $f^{-1}: f(D)\to D$,称此映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数.一般地,$y=f(x), x\in D$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x), x\in f(D)$.

例如,指数函数 $y=e^x$ 与对数函数 $y=\ln x$ 互为反函数.关于反函数,有以下性质:

(1) 由反函数的定义可知,对任意的 $x\in D$,有 $x=f^{-1}[f(x)]$;对任意的 $y\in f(D)$,有 $y=f[f^{-1}(y)]$.

(2) 若 f 在 D 上为单调增(减)函数,则 f^{-1} 在 $f(D)$ 上也是单调增(减)函数.

(3) 若把 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上,则这两个图形关于直线 $y=x$ 对称.即若点 $P(a,b)$ 在 $y=f(x)$ 的图形上,则点 $Q(b,a)$ 一定在反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形上,如图 1-1-1 所示.

(4) 函数有反函数的充要条件是函数是一一对应的.单调函数必有反函数,但存在反函数的函数不一定单调.例如函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}(x-1), & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1+x, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$ 不是单调函数,但存在反函数 $f^{-1}(x)=\begin{cases}-2x+1, & \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 如图 1-1-2 所示.

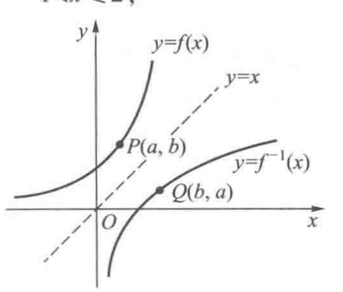


图 1-1-1

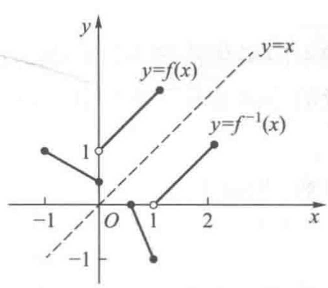


图 1-1-2

7. 初等函数

幂函数：$y=x^{\mu}$($\mu\in\mathbf{R}$ 是常数)，如图 1-1-3 所示；

指数函数：$y=a^{x}$($a>0$ 且 $a\neq1$)；

对数函数：$y=\log_{a}x$($a>0$ 且 $a\neq1$，特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，称为自然对数函数，记为 $y=\ln x$)；

三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$，如图 1-1-4，1-1-5 所示.

以上这五类函数统称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成的函数，称为初等函数.

注意绝对值函数 $y=|x|$ 是初等函数，因为 $y=|x|$ 可以写成 $y=\sqrt{x^2}$，即为幂函数 $y=u^{\frac{1}{2}}$ 与幂函数 $u=x^2$ 的复合.此外，我们要特别注意下列反三角函数的定义域与值域：

	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$	$y=\operatorname{arccot} x$
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
值域	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$

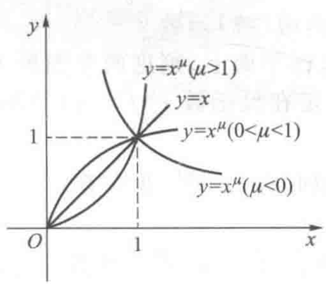


图 1-1-3

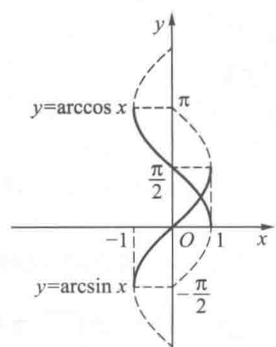


图 1-1-4

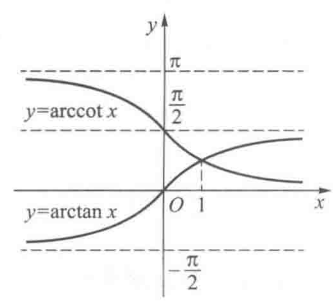


图 1-1-5

8. 常见的几种分段函数

在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，称为分段函数.虽然分段函数在自变量的不同变化范围中有不同的表达式，但仍是一个函数，而不是几个函数.

(1) **绝对值函数**(如图 1-1-6)：$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant0.\end{cases}$

(2) **符号函数**(如图 1-1-7)：$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ 显然有 $|x|=x\operatorname{sgn} x$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

（3）**取整函数**（如图 1-1-8）：$y=[x]=n,\ n\leqslant x<n+1,\ n\in\mathbf{Z}$，即 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 显然对于 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $x-1<[x]\leqslant x$，且 $[x+1]=[x]+1$.

例如，$[0.01]=0$，$[0.99]=0$，$[0]=0$，$[\sqrt{5}]=2$，$\left[-\dfrac{1}{7}\right]=-1$.

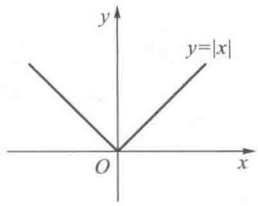


图 1-1-6

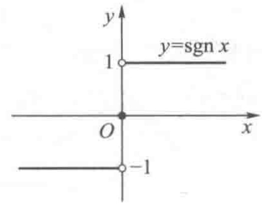


图 1-1-7

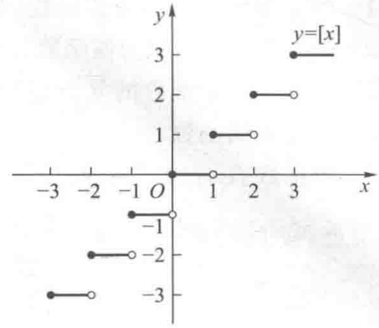


图 1-1-8

（4）**狄利克雷函数**

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{Q}^{C}.\end{cases}$$

容易验证，任何正有理数都是它的周期，任何正无理数都不是它的周期. 由于不存在最小的正有理数，故狄利克雷函数没有最小正周期. 这个函数非常有用，在后面的内容中，我们经常用它来举例.

二、重要性质、定理与公式

1. 函数的单调性

（1）两个单调增加（减少）函数之和仍为单调增加（减少）函数.

（2）两个单调增加函数的复合仍为单调增加函数；两个单调减少函数的复合为单调增加函数；单调增加函数与单调减少函数的复合为单调减少函数.

（3）互为反函数的两个单调函数其单调性一致.

例如函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\ln\frac{1}{x}}$，$x>0$，由于 $u=\dfrac{1}{x}$ 为 $(0,+\infty)$ 上关于 x 的单调减少函数，$y=\ln u$ 为 $(0,+\infty)$ 上关于 u 的单调增加函数，故 $v=\ln\dfrac{1}{x}$ 为 $(0,+\infty)$ 上关于 x 的单调减少函数. 又 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{v}$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上关于 v 的单调减少函数，故 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\ln\frac{1}{x}}$ 为 $(0,+\infty)$ 上关于 x 的单调增加函数. 再如，函数 $y=\sin x$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 与函数 $y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$ 互为反函数，它们均为单调增加函数.

注意两个单调增加（减少）函数的积不一定为单调增加（减少）函数. 例如，$f(x)=x$ 与 $g(x)=2x$ 均是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调增加函数，但 $f(x)\cdot g(x)=2x^{2}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调减少，在 $(0,+\infty)$ 上单

调增加,因此不是$(-\infty,+\infty)$上的单调函数.

2. 函数的奇偶性

(1) 两个偶函数的和为偶函数,两个奇函数的和为奇函数.

(2) 两个偶函数的积为偶函数,两个奇函数的积为偶函数,偶函数与奇函数的积为奇函数.

(3) 奇函数与奇函数的复合仍为奇函数,偶函数与偶函数的复合仍为偶函数,奇函数与偶函数的复合为偶函数.

(4) 若函数$f(x)$的定义域关于原点对称,则$f(x)$必可分解成一个奇函数与一个偶函数的和. 事实上,有$f(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$,这里$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$是奇函数,$\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$是偶函数.

判断函数的奇偶性主要根据其定义,对于简单的情形,可以直接利用上述性质.例如,函数$y=\sin(\cos x)$是由偶函数$u=\cos x$与奇函数$y=\sin u$构成的复合函数,因此为偶函数.

此外,我们需要注意**奇偶性是针对定义域关于原点对称的函数**而言的,如果函数的定义域不关于原点对称,那么该函数就一定不是奇函数或偶函数.

3. 函数的有界性

(1) 两个有界函数的和与积都仍为有界函数.

(2) 有界函数与无界函数的和为无界函数.

按定义即可证明上述结论.注意,两个无界函数的和与积不一定是无界函数;有界函数与无界函数的积也不一定是无界函数.反例请参考下面的【例 1.1.6】.

三、典型例题解析

题型导读:

Ⅰ. 求函数的定义域

Ⅱ. 求复合函数的表达式

Ⅲ. 求函数的反函数

Ⅳ. 判断函数的单调性

Ⅴ. 函数的周期性、奇偶性与有界性问题

题型Ⅰ:求函数的定义域

【例 1.1.1】求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\sin^2x-1}-1}$;

(2) $y=\ln\dfrac{5x-4}{\sqrt{\arcsin x-\dfrac{\pi}{4}}}$;

(3) $y=\dfrac{\sqrt{30-x}}{\ln\ln\ln x}$;

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x-\sqrt{x}}}+\arccos(2x-1)$;

(5) 已知 $y=f(x)$ 的定义域为 $(0,2)$，$g(x)=[x]$ 为取整函数，求 $y=f[g(x)]$ 的定义域.

解 (1) 由题设知，$2\sin^2x-1\geqslant 0$ 且 $\sqrt{2\sin^2x-1}\neq 1$，即 $|\sin x|\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $|\sin x|\neq 1$，从而函数的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,k\pi+\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\text{且 }x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2) 由题设知，$5x-4>0$ 且 $\arcsin x>\dfrac{\pi}{4}$，又 $\arcsin x$ 的自然定义域为 $[-1,1]$，于是所求函数的定义域为 $\left(\dfrac{4}{5},+\infty\right)\cap\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]=\left(\dfrac{4}{5},1\right]$.

(3) 由题设知，$x>0$，$\ln x>0$，$\ln\ln x>0$ 且 $\ln\ln x\neq 1$，$30-x\geqslant 0$，解得所求函数的定义域为 $\{x\mid e<x\leqslant 30\text{ 且 }x\neq e^e\}$.

注 由于 $e<e^e<3^3<30$，故 $e^e\in(e,30]$.

(4) 由题设知，$x\geqslant 0$，$2x-\sqrt{x}>0$ 且 $-1\leqslant 2x-1\leqslant 1$，解得所求函数的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{4}<x\leqslant 1\right\}$.

(5) 由题设知，$0<[x]<2$，于是 $[x]=1$，从而 $1\leqslant x<2$，因此 $y=f[g(x)]$ 的定义域为 $[1,2)$.

注 取整函数 $[x]$ 的定义是不超过 x 的最大整数. 若将 $f(x)$ 的定义域改为 $[0,2)$，则 $f[g(x)]$ 的定义域为 $[0,2)$；若将 $f(x)$ 的定义域改为 $[0,2]$，则 $f[g(x)]$ 的定义域为 $[0,3)$.

小结

对于基本初等函数的定义域，我们已在**基本概念**中作了总结. 因为初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成的，所以求初等函数的定义域可以转化为求解由这些基本初等函数的定义域所确定的不等式组.

题型Ⅱ：求复合函数的表达式

【例 1.1.2】 (1) 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$______.（1990 年考研题）

(2) 设 $f(x)=\tan x$，$g(x)=\arctan x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2x, & x<0,\\ \sqrt{x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解 (1) 当 $|x|\leqslant 1$ 时，$f(x)=1$，从而 $f[f(x)]=f(1)=1$；当 $|x|>1$ 时，$f(x)=0$，从而 $f[f(x)]=f(0)=1$. 综上所述，有 $f[f(x)]=1$.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$；$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. 显然，$f[g(x)]=\tan(\arctan x)=x$. 但由 $\arctan x$ 的值域可知，在求 $g[f(x)]$ 时，需

对 x 分段讨论：

$\forall k\in\mathbf{Z}$，当 $-\dfrac{\pi}{2}+k\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ 时，$-\dfrac{\pi}{2}<x-k\pi<\dfrac{\pi}{2}$，于是

$$g[f(x)]=\arctan(\tan x)=\arctan(\tan(x-k\pi))=x-k\pi.$$

注意等式中的变形技巧.

综上所述，$f[g(x)]=x,x\in(-\infty,+\infty)$；$g[f(x)]=x-k\pi,x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right),k\in\mathbf{Z}.$

注 在涉及反三角函数的相关运算时，一定要注意其定义域与值域.

(3)(**法一**)(**解析法**)先求 $f[g(x)]$. 由题设知，$f[g(x)]=\begin{cases}g^2(x), & g(x)<1,\\ g(x), & g(x)\geqslant 1.\end{cases}$

先考虑 $g(x)<1$ 的情形. 当 $x<0$ 时，$g(x)=2x$，令 $g(x)<1$，即有 $\begin{cases}x<0,\\ 2x<1,\end{cases}$ 解得 $x<0$. 当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)=\sqrt{x}$，令 $g(x)<1$，即有 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ \sqrt{x}<1,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant x<1$. 于是当 $x<0$ 或 $0\leqslant x<1$ 时，有 $g(x)<1$.

再考虑 $g(x)\geqslant 1$ 的情形. 当 $x<0$ 时，$g(x)=2x$，令 $g(x)\geqslant 1$，即有 $\begin{cases}x<0,\\ 2x\geqslant 1,\end{cases}$ 解为空集. 当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)=\sqrt{x}$，令 $g(x)\geqslant 1$，即有 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ \sqrt{x}\geqslant 1,\end{cases}$ 解得 $x\geqslant 1$. 于是当 $x\geqslant 1$ 时，有 $g(x)\geqslant 1$.

综上所述，$f[g(x)]=\begin{cases}g^2(x), & g(x)<1,\\ g(x), & g(x)\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}4x^2, & x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ \sqrt{x}, & x\geqslant 1.\end{cases}$

再求 $g[f(x)]$. 由题设知，$g[f(x)]=\begin{cases}2f(x), & f(x)<0,\\ \sqrt{f(x)}, & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$ 观察 $f(x)$ 的表达式，发现当 $x\in\mathbf{R}$ 时，恒有 $f(x)\geqslant 0$，于是 $g[f(x)]=\sqrt{f(x)}=\begin{cases}|x|, & x<1,\\ \sqrt{x}, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(**法二**)(**图示法**)先求 $f[g(x)]$，分为以下三步：

(i) 画出 $u=g(x)=\begin{cases}2x, & x<0,\\ \sqrt{x}, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的图形，如图 1-1-9 所示.

(ii) 记 $f(u)=\begin{cases}u^2, & u<1,\\ u, & u\geqslant 1,\end{cases}$ 在 xOu 平面作出分界线 $u=1$，如图 1-1-9 所示，则 $u=g(x)$ 的图形可分为三段①、②、③，其对应的 x 的区间分别为 $(-\infty,0),[0,1),[1,+\infty)$.

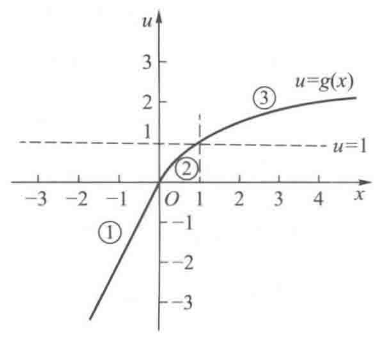


图 1-1-9

对于①与②，即当 $x<0$ 或 $0\leqslant x<1$ 时，$u=g(x)$ 处于分界线 $u=1$ 下方，$g(x)<1$，此时 $f(u)=u^2$；对于③，即当 $x\geqslant 1$ 时，$u=g(x)$ 处于分界线 $u=1$ 上方，$g(x)\geqslant 1$，此时 $f(u)=u$.

(iii) 因此，$f[g(x)]=\begin{cases}4x^2, & x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ \sqrt{x}, & x\geqslant 1.\end{cases}$

再求 $g[f(x)]$，同样分为以下三步：