



普通高等学校“十三五”规划教材

高等数学

主 编 吕端良 岳 嵘 徐忠云 王云丽
副主编 李淑英 盛敏奇 汪卫忠 王相国
主 审 韩晓瑞



北京交通大学出版社
<http://www.bjtup.com.cn>

普通高等学校“十三五”规划教材

高等数学

主 编 吕端良 岳 嵘 徐忠云 王云丽
副主编 李淑英 盛敏奇 汪卫忠 王相国
主 审 韩晓瑞



扫描二维码，安装加阅 App，获取习题答案！

北京交通大学出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书既保持高等数学知识体系的完备性，又注重高等数学知识的应用性。本书的主要内容有初等数学基础、函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用等。

本书既可以作为本科生的高等数学教材，也可以作为高职高专及普通全日制专科数学老师的教学参考用书。

高 等 数 学

版权所有，侵权必究。

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学/吕端良等主编. —北京: 北京交通大学出版社, 2017.9

ISBN 978-7-5121-3355-6

I. ①高… II. ①吕… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 218737 号



高等数学

GAODENG SHUXUE

策划编辑: 刘建明 严慧明

责任编辑: 韩 乐

助理编辑: 严慧明

出版发行: 北京交通大学出版社

电 话: 010-51686414

地 址: 北京市海淀区高粱桥斜街 44 号

邮 编: 100044

印 刷 者: 北京时代华都印刷有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 185 mm×260 mm 印张: 16 字数: 399 千字

版 次: 2017 年 9 月第 1 版 2017 年 9 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5121-3355-6/O·167

定 价: 36.00 元

本书如有质量问题, 请向北京交通大学出版社质监局反映。对您的意见和批评, 我们表示欢迎和感谢。
投诉电话: 010-51686043, 51686008; 传真: 010-62225406; E-mail: press@bjtu.edu.cn。

前 言

高等数学是一门十分重要的基础课。本书作者都是多年从事高等数学教学及研究的人员，具有丰富的教学经验，对于高等数学知识体系及其应用有充分的研究，对本科生的知识结构和数学素养有足够的掌握。基于“教、学、用”三方面的需要，本书作者根据高等数学课程基本要求，结合教学实践经验，编写了本书。

本书增添了初等数学的部分知识，从而使高等数学知识体系和内容更加完整。在内容上，本书注重问题的分析方法介绍及知识应用，偏重于学生能力的培养，删除一些烦琐的理论证明，力求做到通俗易懂；在章节编排上，本书注意知识体系的衔接，选择基本的经典例题；在知识难易程度上，本书既照顾了内容体系的严谨，又照顾了学生的认知规律和接受程度。

本书不仅可以作为本科生的高等数学教材，也可以作为高职高专及普通全日制专科数学教师的教学参考用书。

本书由山东科技大学吕端良、山东科技大学岳嵘、贵州城市职业学院徐忠云、山东科技大学王云丽任主编，山东科技大学李淑英、山东科技大学盛敏奇、山东科技大学汪卫忠、山东科技大学王相国任副主编，枣庄学院韩晓瑞任主审。

囿于水平，加之时间仓促，书中难免有错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

编 者

2017年5月

目 录

第 1 章 初等数学基础	1
1.1 集合与区间	1
1.1.1 集合的概念	1
1.1.2 区间和邻域	3
习题 1.1	4
1.2 函数与反函数	4
1.2.1 函数的概念	4
1.2.2 函数的表示法	5
1.2.3 函数的几种特性	7
1.2.4 反函数	8
习题 1.2	9
1.3 反三角函数	10
1.3.1 反正弦函数	10
1.3.2 反余弦函数	10
1.3.3 反正切函数	11
1.3.4 反余切函数	11
习题 1.3	12
1.4 初等函数	12
1.4.1 基本初等函数	12
1.4.2 复合函数	13
习题 1.4	14
1.5 极坐标系与参数方程	14
1.5.1 极坐标系	15
1.5.2 极坐标与直角坐标的关系	15

1.5.3 曲线的参数方程	16
习题 1.5	17
复习题一	17
第 2 章 函数的极限与连续	18
2.1 函数极限及其运算法则	18
2.1.1 函数极限	18
2.1.2 函数极限运算法则	20
2.1.3 函数极限的性质	20
习题 2.1	22
2.2 两个重要极限	23
习题 2.2	24
2.3 函数的连续性	25
2.3.1 函数连续的定义	25
2.3.2 连续函数的性质	27
习题 2.3	28
2.4 闭区间上连续函数的性质	29
习题 2.4	30
复习题二	31
第 3 章 导数与微分	32
3.1 导数的概念	32
3.1.1 引例	32
3.1.2 导数概念	33
习题 3.1	37
3.2 函数的求导法则	38
3.2.1 导数的四则运算法则	38
3.2.2 反函数的求导法则	39
3.2.3 复合函数的求导法则	41
习题 3.2	42
3.3 高阶导数	43
习题 3.3	46
3.4 隐函数的导数及参数方程所确定的函数的导数	46

3.4.1	隐函数的导数	46
3.4.2	幂指函数的导数	48
3.4.3	参数方程所确定的函数的导数	49
	习题 3.4	50
3.5	微分及其运算	51
3.5.1	微分的定义	51
3.5.2	微分的几何意义	53
3.5.3	微分的基本公式和运算法则	54
	习题 3.5	55
	复习题三	55
第 4 章	导数的应用	57
4.1	微分中值定理	57
4.1.1	罗尔中值定理	57
4.1.2	拉格朗日中值定理	58
4.1.3	柯西中值定理	59
	习题 4.1	60
4.2	洛必达法则	60
4.2.1	$\frac{0}{0}$ 型未定式	61
4.2.2	$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	61
4.2.3	其他类型的未定式	62
4.2.4	应用洛必达法则时应注意的几个问题	63
	习题 4.2	64
4.3	函数的单调性	64
	习题 4.3	67
4.4	函数的极值和最值问题	67
4.4.1	函数极值的定义	67
4.4.2	极值判定法	68
4.4.3	最大值、最小值问题	71
	习题 4.4	74
4.5	曲线的凹凸性与拐点	74

4.5.1	曲线的凹凸性及其判别法	74
4.5.2	曲线的拐点	76
习题 4.5		78
4.6	函数图像的描绘	78
4.6.1	曲线的渐近线	78
4.6.2	作函数图像的一般步骤	79
习题 4.6		80
复习题四		80
第 5 章	不定积分	82
5.1	不定积分的概念与性质	82
5.1.1	原函数与不定积分的概念	82
5.1.2	不定积分的性质	84
5.1.3	不定积分的几何意义	85
5.1.4	基本积分公式	85
习题 5.1		88
5.2	换元积分法	89
5.2.1	第一类换元积分法 (凑微分法)	89
5.2.2	第二类换元积分法	93
习题 5.2		97
5.3	分部积分法	97
习题 5.3		101
复习题五		101
第 6 章	定积分及其应用	103
6.1	定积分的概念与性质	103
6.1.1	引例	103
6.1.2	定积分定义	105
6.1.3	定积分的几何意义	108
习题 6.1		109
6.2	微积分基本公式	109
6.2.1	积分上限函数及其导数	110
6.2.2	基本公式	111

习题 6.2	113
6.3 换元积分法	114
6.3.1 引例	114
6.3.2 定积分的换元积分法	115
习题 6.3	119
6.4 分部积分法	119
习题 6.4	120
6.5 定积分在几何方面的应用	120
6.5.1 定积分的微元法	120
6.5.2 平面图形的面积	122
6.5.3 旋转体的体积	124
习题 6.5	126
复习题六	126
第 7 章 常微分方程	128
7.1 微分方程的基本概念	128
7.1.1 微分方程的基本概念	128
7.1.2 简单微分方程的建立	130
习题 7.1	131
7.2 可分离变量的微分方程	132
7.2.1 最简单的一阶微分方程的解法	132
7.2.2 可分离变量的微分方程的解法	132
习题 7.2	134
7.3 一阶微分方程	134
7.3.1 齐次微分方程的定义	134
7.3.2 一阶线性微分方程的定义	136
7.3.3 一阶线性微分方程的解法	136
习题 7.3	139
7.4 二阶线性微分方程	139
7.4.1 通解形式	140
7.4.2 二阶线性常系数齐次微分方程的解法	141
7.4.3 二阶线性常系数非齐次微分方程的解法	144

习题 7.4	147
7.5 可降阶的二阶微分方程	147
7.5.1 $y''=f(x)$ 型的微分方程	147
7.5.2 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	148
7.5.3 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	148
习题 7.5	149
复习题七	149
第 8 章 无穷级数	151
8.1 常数项级数	151
8.1.1 无穷级数的基本概念	151
8.1.2 无穷级数的基本性质	152
8.1.3 级数收敛的必要条件	153
习题 8.1	154
8.2 正项级数及其审敛法	155
8.2.1 比较审敛法	155
8.2.2 比值审敛法	157
习题 8.2	158
8.3 任意项级数	159
8.3.1 交错级数	159
8.3.2 绝对收敛与条件收敛	160
习题 8.3	161
8.4 幂级数	161
8.4.1 幂级数的收敛性	162
8.4.2 幂级数的性质	164
习题 8.4	165
8.5 函数的幂级数展开	166
8.5.1 麦克劳林级数	166
8.5.2 将函数展开成幂级数的两种方法	167
习题 8.5	169
复习题八	170

第 9 章 向量代数与空间解析几何	172
9.1 空间直角坐标系	172
9.1.1 空间直角坐标系	172
9.1.2 空间两点间的距离	173
习题 9.1	174
9.2 空间向量	175
9.2.1 向量及其几何表示	175
9.2.2 向量的线性运算	175
9.2.3 向量的坐标表示	177
9.2.4 向量的数量积及坐标表示	179
9.2.5 向量的向量积及坐标表示	180
习题 9.2	181
9.3 空间平面及其方程	182
9.3.1 空间平面的点法式方程	182
9.3.2 空间平面的一般方程	183
9.3.3 空间两平面的夹角	184
习题 9.3	185
9.4 空间直线及其方程	186
9.4.1 空间直线的点向式方程与参数方程	186
9.4.2 空间直线的一般方程	187
9.4.3 空间两直线的夹角	188
习题 9.4	188
9.5 空间曲面与空间曲线方程	189
9.5.1 曲面方程的概念	189
9.5.2 球面方程	190
9.5.3 柱面方程	190
9.5.4 旋转曲面的方程	191
9.5.5 空间曲线	193
习题 9.5	194
复习题九	194

第 10 章 多元函数微分学	195
10.1 多元函数的基本概念	195
10.1.1 平面区域	195
10.1.2 多元函数概念	196
10.1.3 二元函数的极限与连续性	197
习题 10.1	199
10.2 偏导数	200
10.2.1 偏导数的概念	200
10.2.2 高阶偏导数	202
习题 10.2	203
10.3 全微分	204
习题 10.3	206
10.4 复合函数与隐函数的微分法	207
10.4.1 复合函数的微分法	207
10.4.2 隐函数的微分法	208
习题 10.4	209
10.5 多元函数的极值	210
10.5.1 二元函数的极值	210
10.5.2 二元函数的最大值与最小值	213
10.5.3 条件极值与拉格朗日乘数法	214
习题 10.5	215
复习题十	215
第 11 章 多元函数的积分	217
11.1 二重积分的概念	217
11.1.1 引例——求曲顶柱体的体积	217
11.1.2 二重积分的概念	218
11.1.3 二重积分的性质	219
习题 11.1	220
11.2 二重积分的计算	220
11.2.1 直角坐标系下二重积分的计算	220
11.2.2 极坐标系下二重积分的计算	225

习题 11.2	227
11.3 对弧长的曲线积分	228
11.3.1 对弧长的曲线积分的概念与性质	228
11.3.2 对弧长的曲线积分的计算方法	230
习题 11.3	232
11.4 对坐标的曲线积分	232
11.4.1 对坐标的曲线积分的概念与性质	232
11.4.2 对坐标的曲线积分的计算	234
11.4.3 格林公式	236
习题 11.4	238
复习题十一	239

第 1 章 初等数学基础

1.1 集合与区间

1.1.1 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念，下面通过具体例子来说明这个概念。比如，某个学校里的全体学生构成一个集合；字母 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 构成一个集合。一般地，所谓集合（或简称集）是指具有某种特定性质的事物的总体。组成这个集合的事物的个体称为该集合的元素。

集合通常用大写字母 A, B, C, \dots 表示，用小写字母 a, b, c, \dots 表示集合的元素。如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A ，记作 $a \in A$ ；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A ，记作 $a \notin A$ 。一个集合，若它只含有限个元素，则称为有限集；不是有限集的集合称为无限集。

集合的表示方法通常有以下两种。

一种是列举法，就是把集合的全体元素一一列举出来。例如，由元素 1, 2, 3, 4, 5 组成的集合 A ，可以表示成

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

另一种是描述法，若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体组成的，可以表示成

$$M = \{x | x \text{ 具有性质 } P\}$$

例如，集合 B 是方程 $x^2 - 2x = 0$ 的解集，可以表示成

$$B = \{x | x^2 - 2x = 0\}$$

习惯上，全体非负整数即自然数的集合记作 \mathbf{N} ，即

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

全体正整数的集合记作 \mathbf{N}^* ，即

$$\mathbf{N}^* = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$$

全体整数的集合记作 \mathbf{Z} , 即

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

全体有理数的集合记作 \mathbf{Q} , 全体实数的集合记作 \mathbf{R} , \mathbf{R}^* 为排除数 0 的实数集, \mathbf{R}_+ 为全体正实数的集合.

设 A, B 是两个集合, 如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 则称 A 是集合 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ (读作 A 包含于 B) 或 $B \supseteq A$ (读作 B 包含 A). 如 $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z} \supseteq \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$ 等.

如果集合 A 与集合 B 互为子集, 即 $B \subseteq A$ 且 $A \subseteq B$, 则称集合 A 与 B 相等, 记作 $A = B$. 例如, 设 $A = \{1, 5\}$, $B = \{x | x^2 - 6x + 5 = 0\}$, 则 $A = B$.

特别地, 不含任何元素的集合称为空集, 记作 \emptyset . 规定空集是任何集合的子集, 即 $\emptyset \subseteq A$. 例如, $\{x | x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0\}$ 是空集.

下面介绍集合的运算.

并集 设 A, B 是两个集合, 由属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

交集 由属于 A 且属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

差集 由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集, 记作 $A - B$, 即

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

有时, 研究某个问题须限定在一个集合 I 中进行, 所研究的其他集合 A 都是 I 的子集. 此时, 称集合 I 为全集.

余集 (或补集) 设集合 I 为全集, 称 $I - A$ 为 A 的余集 (或补集), 记作 $\complement_I A$.

例如, 在实数集 \mathbf{R} 中, 集合 $A = \{x | x \leq -3 \text{ 或 } x > 1\}$ 的余集就是

$$\complement_I A = \{x | -3 < x \leq 1\}$$

设 A, B, C 是任意三个集合, 则有下列集合的运算法则.

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

(3) 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

(4) 对偶律: $\complement_I(A \cup B) = \complement_I A \cap \complement_I B,$

$$\complement_I(A \cap B) = \complement_I A \cup \complement_I B.$$

1.1.2 区间和邻域

区间是由实数组成的一类集合, 在高等数学中常用. 设 a 和 b 都是实数且 $a < b$, 则称实数集 $\{x | a < x < b\}$ 为开区间, 记作 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\} \quad (1-1)$$

类似地, 闭区间和半开半闭区间的定义和记号为:

闭区间

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\} \quad (1-2)$$

半开半闭区间

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\} \quad (1-3)$$

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\} \quad (1-4)$$

以上这些区间都称为有限区间, a 和 b 称为区间的端点, 数 $b - a$ 称为区间的长度.

此外还有所谓无限区间. 引进记号 “ $+\infty$ ” (读作正无穷大) 及 “ $-\infty$ ” (读作负无穷大), 它的定义与记号举例如下:

$$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}; \quad (a, +\infty) = \{x | x > a\};$$

$$(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}; \quad (-\infty, b) = \{x | x < b\}.$$

无限区间在数轴上对应长度为无限且只可向一端无限延伸的直线.

以后会看到有些定理的成立与区间的开、闭有很大关系, 因此在学习时要多加注意. 但有些情形不需要区分上述各种情形, 简单地称为“区间”即可, 且常用 I 表示.

邻域也是高等数学中经常用到的集合, 它可以看作是一类特殊的开区间.

实数集 $\{x | |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 它在数轴上表示以点 x_0 为中心、以 δ 为半径的开区间, 这一点集称为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$, 即

$$U(x_0, \delta) = \{x | x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$

其中称点 x_0 为这邻域的中心, 称 δ 为这邻域的半径, 如图 1-1 所示.

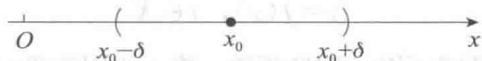


图 1-1

因为绝对值 $|x - x_0|$ 表示点 x 与点 x_0 之间的距离, 所以 $U(x_0, \delta)$ 表示与点 x_0 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

有时需要把邻域的中心 x_0 去掉, 点 x_0 的 δ 邻域去中心 x_0 后, 称为点 x_0 的去心 δ 邻域, 如图 1-2 所示, 记作 $\dot{U}(x_0, \delta)$, 即

$$\dot{U}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

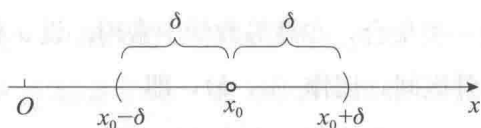


图 1-2

为了方便, 有时把开区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 称为点 x_0 的左 δ 邻域, 把开区间 $(x_0, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的右 δ 邻域.

习题 1.1

1. 已知全集 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, 求 $A \cap \complement B$, $\complement A \cap \complement B$, $A \cup B$.
2. $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$, 求 $A \cup B$, $A \cap B$.

1.2 函数与反函数

1.2.1 函数的概念

在自然现象或社会现象中, 往往同时存在几个不断变化的量, 这些变量不是孤立的, 而是相互联系并遵循一定的规律. 函数就是描述这种联系的一个法则. 比如, 对于一个运动着的物体, 它的速度和位移都是随时间的变化而变化的, 它们之间的关系就是一种函数关系.

定义 1.1 设 x, y 是两个变量, X 是给定的一个数集, 若对任意确定的 $x \in X$, 根据某一对应法则 f , 变量 y 都有唯一确定的值与之对应, 则称 y 是 x 的函数. 记作

$$y = f(x), x \in X$$

其中称 X 为该函数的定义域, 称 x 为自变量, 称 y 为因变量.

对于确定的 $x_0 \in X$, 函数 y 有唯一确定的值 y_0 与之对应, 则称 y_0 为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值, 记作 $y_0 = y \mid_{x=x_0} = f(x_0)$. 函数值的集合称为函数的值域, 常记作 Y , 即

$$Y = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$$