普通高等学校“十三五”规划教材

高等数学

主　编　吕端良　岳　嵘　徐忠云　王云丽
副主编　李淑英　盛敏奇　汪卫忠　王相国
主　审　韩晓瑞

北京交通大学出版社
http://www.bjtup.com.cn

普通高等学校“十三五”规划教材

高等数学

主　编　吕端良　岳　嵘　徐忠云　王云丽
副主编　李淑英　盛敏奇　汪卫忠　王相国
主　审　韩晓瑞

北京交通大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书既保持高等数学知识体系的完备性，又注重高等数学知识的应用性。本书的主要内容有初等数学基础、函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用等。

本书既可以作为本科生的高等数学教材，也可以作为高职高专及普通全日制专科数学老师的教学参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/吕端良等主编. —北京：北京交通大学出版社，2017.9
ISBN 978-7-5121-3355-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①吕… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 218737 号

高等数学
GAODENG SHUXUE

策划编辑：刘建明 严慧明　　责任编辑：韩 乐　　助理编辑：严慧明
出版发行：北京交通大学出版社　　电 话：010-51686414
地 址：北京市海淀区高梁桥斜街 44 号　　邮 编：100044
印 刷 者：北京时代华都印刷有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185 mm×260 mm　印张：16　字数：399 千字
版 次：2017 年 9 月第 1 版　2017 年 9 月第 1 次印刷
书 号：ISBN 978-7-5121-3355-6/O·167
定 价：36.00 元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。
投诉电话：010-51686043，51686008；传真：010-62225406；E-mail：press@bjtu.edu.cn。

前　言

高等数学是一门十分重要的基础课。本书作者都是多年从事高等数学教学及研究的人员，具有丰富的教学经验，对于高等数学知识体系及其应用有充分的研究，对本科生的知识结构和数学素养有足够的掌握。基于“教、学、用”三方面的需要，本书作者根据高等数学课程基本要求，结合教学实践经验，编写了本书。

本书增添了初等数学的部分知识，从而使高等数学知识体系和内容更加完整。在内容上，本书注重问题的分析方法介绍及知识应用，偏重于学生能力的培养，删除一些烦琐的理论证明，力求做到通俗易懂；在章节编排上，本书注意知识体系的衔接，选择基本的经典例题；在知识难易程度上，本书既照顾了内容体系的严谨，又照顾了学生的认知规律和接受程度。

本书不仅可以作为本科生的高等数学教材，也可以作为高职高专及普通全日制专科数学教师的教学参考用书。

本书由山东科技大学吕端良、山东科技大学岳嵘、贵州城市职业学院徐忠云、山东科技大学王云丽任主编，山东科技大学李淑英、山东科技大学盛敏奇、山东科技大学汪卫忠、山东科技大学王相国任副主编，枣庄学院韩晓瑞任主审。

囿于水平，加之时间仓促，书中难免有错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2017 年 5 月

目 录

第 1 章　初等数学基础

1.1　集合与区间

1.1.1　集合的概念

集合是数学中的一个基本概念，下面通过具体例子来说明这个概念．比如，某个学校里的全体学生构成一个集合；字母 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 构成一个集合．一般地，所谓集合（或简称集）是指具有某种特定性质的事物的总体．组成这个集合的事物的个体称为该集合的元素．

集合通常用大写字母 A，B，C，…表示，用小写字母 a，b，c，…表示集合的元素．如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$．一个集合，若它只含有限个元素，则称为有限集；不是有限集的集合称为无限集．

集合的表示方法通常有以下两种．

一种是列举法，就是把集合的全体元素一一列举出来．例如，由元素 1，2，3，4，5 组成的集合 A，可以表示成

$$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

另一种是描述法，若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体组成的，可以表示成

$$M=\{x\,|\,x\ \text{具有性质}\ P\}$$

例如，集合 B 是方程 $x^2-2x=0$ 的解集，可以表示成

$$B=\{x\,|\,x^2-2x=0\}$$

习惯上，全体非负整数即自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N}=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}$$

全体正整数的集合记作 $\mathbf{N}^*$，即

$$\mathbf{N}^*=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$，$\mathbf{R}^*$ 为排除数 0 的实数集，$\mathbf{R}_+$ 为全体正实数的集合.

设 A，B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$（读作 A 包含于 B）或 $B\supseteq A$（读作 B 包含 A）. 如 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}\supseteq\mathbf{Q}$，$\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$ 等.

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $B\subseteq A$ 且 $A\subseteq B$，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$. 例如，设 $A=\{1, 5\}$，$B=\{x\,|\,x^2-6x+5=0\}$，则 $A=B$.

特别地，不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$. 规定空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$. 例如，$\{x\,|\,x\in\mathbf{R}, x^2+1=0\}$是空集.

下面介绍集合的运算.

并集　设 A，B 是两个集合，由属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A\text{或}\,x\in B\}$$

交集　由属于 A 且属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A\text{且}\,x\in B\}$$

差集　由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集，记作 $A-B$,即

$$A-B=\{x\,|\,x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$$

有时，研究某个问题须限定在一个集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集. 此时，称集合 I 为全集.

余集（或补集）　设集合 I 为全集，称 $I-A$ 为 A 的余集（或补集），记作 $\complement_I A$.

例如，在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A=\{x\,|\,x\leqslant -3\text{ 或 }x>1\}$的余集就是

$$\complement_I A=\{x\,|\,-3<x\leqslant 1\}$$

设 A，B，C 是任意三个集合，则有下列集合的运算法则.

(1) **交换律**：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

(2) **结合律**：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) **分配律**：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) **对偶律**：$\complement_I(A\cup B) = \complement_I A\cap \complement_I B$，

$\complement_I(A\cap B) = \complement_I A\cup \complement_I B$.

1.1.2　区间和邻域

区间是由实数组成的一类集合，在高等数学中常用．设 a 和 b 都是实数且 $a<b$，则称实数集 $\{x|a<x<b\}$ 为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\} \tag{1-1}$$

类似地，闭区间和半开半闭区间的定义和记号为：

闭区间

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\} \tag{1-2}$$

半开半闭区间

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\} \tag{1-3}$$

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\} \tag{1-4}$$

以上这些区间都称为有限区间，a 和 b 称为区间的端点，数 $b-a$ 称为区间的长度.

此外还有所谓无限区间．引进记号“$+\infty$”（读作正无穷大）及“$-\infty$”（读作负无穷大），它的定义与记号举例如下：

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\};\quad (a,+\infty)=\{x|x>a\};$$

$$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\};\quad (-\infty,b)=\{x|x<b\}.$$

无限区间在数轴上对应长度为无限且只可向一端无限延伸的直线.

以后会看到有些定理的成立与区间的开、闭有很大关系，因此在学习时要多加注意．但有些情形不需要区分上述各种情形，简单地称为“区间”即可，且常用 I 表示.

邻域也是高等数学中经常用到的集合，它可以看作是一类特殊的开区间.

实数集 $\{x\,\|\,x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$，它在数轴上表示以点 x_0 为中心、以 δ 为半径的开区间，这一点集称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x|x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

其中称点 x_0 为这邻域的中心，称 δ 为这邻域的半径，如图 1-1 所示.

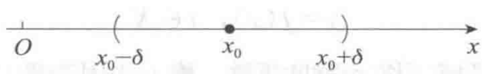

图 1-1

因为绝对值 $|x-x_0|$ 表示点 x 与点 x_0 之间的距离，所以 $U(x_0,\delta)$ 表示与点 x_0 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

有时需要把邻域的中心 x_0 去掉，点 x_0 的 δ 邻域去中心 x_0 后，称为点 x_0 的去心 δ 邻域，如图 1－2 所示，记作 $\mathring{U}(x_0, \delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0, \delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

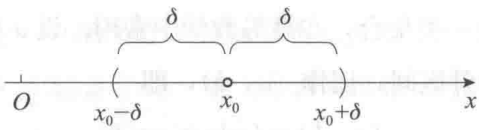

图 1－2

为了方便，有时把开区间 $(x_0-\delta, x_0)$ 称为点 x_0 的左 δ 邻域，把开区间 $(x_0, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的右 δ 邻域.

习题 1.1

1. 已知全集 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，$A=\{2, 4, 5\}$，$B=\{1, 3, 5, 7\}$，求 $A\cap \complement_I B$，$\complement_I A\cap \complement_I B$，$A\cup B$.

2. $A=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x \mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

1.2 函数与反函数

1.2.1 函数的概念

在自然现象或社会现象中，往往同时存在几个不断变化的量，这些变量不是孤立的，而是相互联系并遵循一定的规律. 函数就是描述这种联系的一个法则. 比如，对于一个运动着的物体，它的速度和位移都是随时间的变化而变化的，它们之间的关系就是一种函数关系.

定义 1.1 设 x，y 是两个变量，X 是给定的一个数集，若对任意确定的 $x\in X$，根据某一对应法则 f，变量 y 都有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数. 记作

$$y=f(x), \quad x\in X$$

其中称 X 为该函数的定义域，称 x 为自变量，称 y 为因变量.

对于确定的 $x_0\in X$，函数 y 有唯一确定的值 y_0 与之对应，则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作 $y_0=y\mid_{x=x_0}=f(x_0)$. 函数值的集合称为函数的值域，常记作 Y，即

$$Y=\{y \mid y=f(x), x\in X\}$$