国家新闻出版改革发展项目库入库项目

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学（下）

经管类

Gaodeng Shuxue

主　编　王锦升　曾国斌

主　审　邹德玉

“互联网+”创新型教材

北邮智信

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

国家新闻出版改革发展项目库入库项目
普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学(下)

经管类

主　编　王锦升　曾国斌
副主编　杨伟芳　闫　岩　刘子龙
主　审　邹德玉

本书资源操作说明

北京邮电大学出版社
·北京·

内容简介

本书是根据高等数学课程的最新教学大纲和考研大纲,结合作者授课经验,在《高等数学讲义》的基础上,参考国内外同类教材编写而成的.

全书分上、下两册:上册主要介绍一元函数的极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学等内容;下册主要介绍空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学、微分方程和级数理论.

本书可作为应用型本科非数学专业教材使用,也可供科技工作者和准备参加研究生入学考试的高年级学生以及工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:经管类.下 / 王锦升,曾国斌主编. --北京:北京邮电大学出版社,2018.8
ISBN 978-7-5635-5579-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王…②曾… Ⅲ.①高等数学—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 191309 号

书　　名	高等数学(经管类・下)
主　　编	王锦升　曾国斌
责任编辑	付小霞
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
网　　址	www.buptpress3.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京泽宇印刷有限公司
开　　本	787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张	11.5
字　　数	283 千字
版　　次	2018 年 8 月第 1 版　2018 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5579-6　　定价:32.00 元

如有质量问题请与发行部联系
版权所有　侵权必究

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

前　言

本书是根据高等数学课程的最新教学大纲和考研大纲，在作者多年来所使用的《高等数学讲义》基础上，参考国内外同类教材进行补充和修改而成的.

全书分上、下两册：上册主要介绍一元函数的极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学等内容；下册主要介绍空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学、微分方程和级数理论.

本书的编写特点及说明如下.

1. 本套教材是为应用型本科院校非数学专业的学生编写的，也可供各类需要提高高等数学素质的人员使用. 在编写过程中，参考了高等数学课程的最新教学大纲和考研大纲，淡化了定理证明和理论推导，强调了技巧和方法，对各种常用的解题技巧都作了归纳，例题和习题的配备均经过仔细斟酌，对读者理解和巩固基本知识原理有很大的帮助.

2. 在内容安排上，充分考虑了大纲关于学时的要求，但又不完全受其限制. 本书可供 90 学时、108 学时、132 学时、154 学时的应用型本科院校非数学专业使用. 另外，考虑经管类学生和理工类学生的教学内容总体区别不大，仅仅是部分章节的区别，例如，本套教材特别介绍了导数、积分以及微分方程在经济、管理和社会生活中的应用，而对于曲线积分和曲面积分，经管类的学生可以不讲，因此，内容上，讲多讲少讲什么，由任课教师自行取舍.

本书由王锦升、曾国斌担任主编，由杨伟芳、闫岩、刘子龙担任副主编，由邹德玉主审. 在编写过程中还有很多同志提出了宝贵的意见，在此一并表示衷心感谢.

限于客观条件及作者的学识能力，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正，以便今后继续完善.

编　者

2018 年 6 月

CONTENTS 目录

第7章 向量与空间解析几何

由于坐标系的建立，使几何问题可以用代数的方法来研究，这就是解析几何.平面解析几何是我们已经熟悉的，本章主要介绍向量的概念及某些运算，然后以向量作为工具讨论空间解析几何的一些基本问题，这些内容是多元函数微积分学必备的基础知识.

§7.1 空间直角坐标系、向量

7.1.1 空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

在平面解析几何中，通过建立平面直角坐标系使平面中的点与有序数组之间建立了一一对应关系.同样，可以通过建立空间直角坐标系使空间中的点与有序数组之间建立一一对应关系.

以空间一定点O为原点，作3条两两互相垂直的数轴，分别记为x轴(横轴)、y轴(纵轴)、z轴(竖轴)，统称**坐标轴**.它们的正方向按右手法则确定，即以右手握住z轴，当四指指向x轴的正向，以$\frac{\pi}{2}$角度转向y轴的正向时，大拇指的指向就是z轴的正向，如图7-1所示.这样的3条坐标轴就组成了空间直角坐标系$Oxyz$.

3条坐标轴两两分别确定一个平面，这样就可以定出3个平面：xOy，yOz，zOx，且3个平面两两相互垂直，统称为**坐标面**.3个坐标面把空间分成8个部分，每一个部分称为一个卦限.上半空间($z>0$)中，$x>0$，$y>0$，$z>0$的那个卦限称为第Ⅰ卦限，按逆时针方向分别确定第Ⅱ、第Ⅲ、第Ⅳ卦限；下半空间($z<0$)

中，与第Ⅰ、第Ⅱ、第Ⅲ、第Ⅳ4个卦限依次对应的分别叫作第Ⅴ、第Ⅵ、第Ⅶ、第Ⅷ卦限，如图7-2所示.

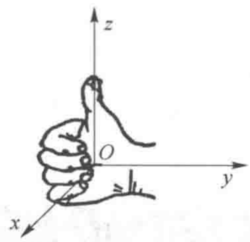

图7-1

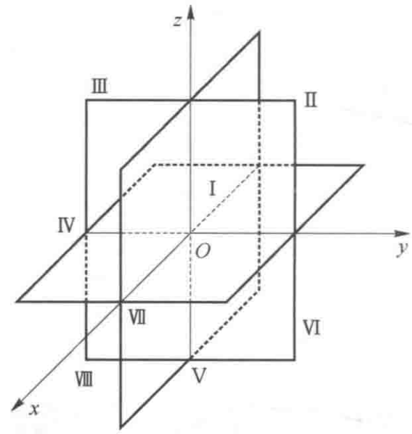

图7-2

建立了空间直角坐标系后，就可以建立空间点与数组之间的一一对应关系.

设 M 为空间的一点，过点 M 作3个平面，分别垂直于3条坐标轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P,Q,R，如图7-3所示. 这3点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x,y,z. 这样，空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z)，把它称为点 M 的**坐标**，并把 x,y 和 z 分别叫作点 M 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**. 坐标为 (x,y,z) 的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$.

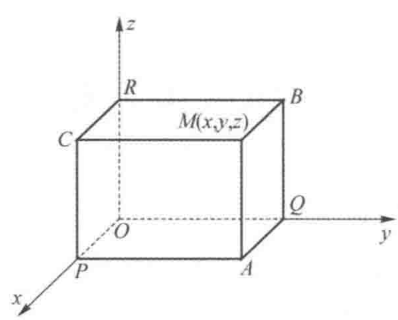

图7-3

反过来，给定了一有序数组 (x,y,z)，我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，然后通过 P,Q 与 R 分别作 x 轴、y 轴与 z 轴的垂直平面，这3个平面的交点就是由有序数组 (x,y,z) 所确定的唯一的点 M，如图7-3所示. 所以，对应于一有序数组 (x,y,z)，必有空间的一个确定的点 M. 这样就建立了空间的点 M 和有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系.

二、空间两点间的距离

空间直角坐标系中任意两点间的距离公式是平面直角坐标系中的两点间距离公式的平行推广. 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，这两点间的距离公式为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

7.1.2 向量

只有大小、没有方向的量称为**标量**，如时间、温度、距离、质量等；而既有大小又有方向的量称为**向量(矢量)**，如速度、加速度、力等.

一、向量的几何表示与几何运算

1. 向量几何表示

在几何上，可以用一条有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 如图 7-4 所示，以 M_1 为始点、M_2 为终点的有向线段所表示的向量，用记号 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 表示. 有时，也用一个字母来表示向量，如向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 可记为 $\boldsymbol{a}$ 或 $\vec{a}$.

图 7-4

说明

① 与始点位置无关的向量称为**自由向量**(向量可以在空间平行移动，所得向量与原向量相等). 我们研究的向量均为自由向量，必要时可以把一个向量平行移动到空间任意位置.

② 向量的大小称为**向量的模**，向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$. 特别地，

• 若 $|\boldsymbol{a}|=1$，则称 $\boldsymbol{a}$ 为**单位向量**，一般记为 $\boldsymbol{e}$. 空间直角坐标系中 x 轴、y 轴、z 轴正向的单位向量一般分别记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$.

• 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**逆向量**，记为 $-\boldsymbol{a}$.

• 模等于 0 的向量称为**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$. 零向量没有确定的方向，也可以说它的方向是任意的.

③ 向量的方向：从起点指向终点的方向(箭头指向的方向)称为向量的正方向.

④ 两向量之间的平行关系和相等关系.

• 两向量平行：如果两个非零向量方向相同或相反，就称这两个向量平行. 特别地，零向量平行于任何向量.

• 两向量相等：如果两个非零向量方向相同且大小相等，就称这两个向量相等.

⑤ 两向量的夹角.

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则称这两向量正向间的夹角 θ 为两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**，如图 7-5 所示，记作

$$\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) \text{ 或 } \theta=(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}}),0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

特别地，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\theta=0$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\theta=\pi$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

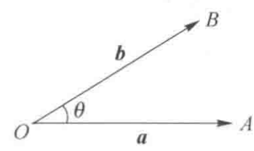

图 7-5

2. 向量几何运算

(1) 向量的加法

定义 7.1.1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，把 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平移使它们的起点重合于点 M，并以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，称对角线向量$\overrightarrow{MN}$ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ **的和**，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 7-6 所示.

说明 根据向量加法的定义求两向量和的方法通常称为**平行四边形法则**.

用平行四边形法则求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 也可以简化为：把 $\boldsymbol{b}$ 平移，使它的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，这时，从 $\boldsymbol{a}$ 的始点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的有向线段$\overrightarrow{MN}$ 就表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 如图 7-7 所示. 这个方法称为**三角形法则**.

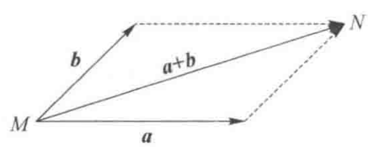

图 7-6

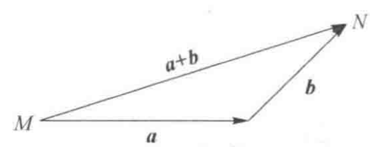

图 7-7

说明

① 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. 由平行四边形法则很容易得到：把向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，则由 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，如图 7-8 所示.

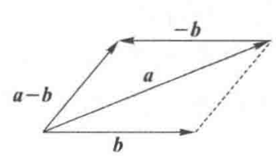

图 7-8

② 实际上，在加法定义中，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 可以是零向量，任何向量与零向量的和与差都等于该向量自己.

向量的加法满足下列性质.

交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

(2) 向量与数的乘法

定义 7.1.2 设 λ 为实数，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积仍是向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$.

(1) 它的模等于 $|\boldsymbol{a}|$ 的 $|\lambda|$ 倍，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量.

向量与数量的乘法满足下列性质(λ,μ 为实数).

结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$.

分配律:$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.

(3) 向量的单位化

定义 7.1.3 称与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量 $\boldsymbol{e}_a$ 为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量**,也常记作 $\boldsymbol{a}^\circ$.

根据向量与数量的乘法,可以将向量 a 写成

$$a = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a,$$

所以

$$\boldsymbol{e}_a = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

二、向量的代数表示与代数运算

1. 向量代数表示

(1) 向量的坐标分解式

一般地,称起点在原点 O、终点为 M 的向量 $\overrightarrow{OM}$ 为点 M 的**向径**,如图 7-9 所示.

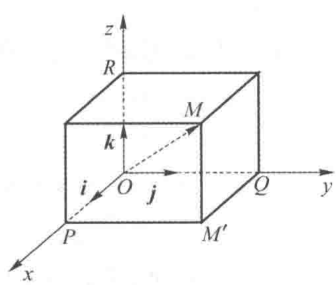

图 7-9

设向径 $\overrightarrow{OM}$ 的终点 M 的坐标为 (x,y,z),过点 M 分别作与 3 条坐标轴垂直的平面,依次交坐标轴于 P,Q,R. 根据向量的加法,有

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}.$$

向量 $\overrightarrow{OP}$,$\overrightarrow{OQ}$,$\overrightarrow{OR}$ 分别称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 x,y,z 轴上的分向量,且可以表示为

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k},$$

因此,有

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

上式就是向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标分解式.

说明 设空间直角坐标系中任意两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 及 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,根据向量的加法容易得出

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

(2) 向量的坐标式

空间中任意一个向量 $\boldsymbol{r}$ 都可以平移到以起点为原点、终点为 M 的向量 $\overrightarrow{OM}$. 所以,如果给定向量 $\boldsymbol{r}$,就可以确定点 $M(x,y,z)$ 及向量 $\overrightarrow{OM}$ 的 3 个分向量,也就确

定了 3 个有序数 x,y,z;反之,如果给定 3 个有序数 x,y,z,就可以确定点 $M(x,y,z)$,进而可以确定向量$\overrightarrow{OM}$ 及 $\boldsymbol{r}$. 这里称有序数 x,y,z 为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标**,记为

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z).$$

说明　向量的坐标分解式和向量的坐标式是向量的两种表示方法,本质上没有区别. 对于空间直角坐标系中任意两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 及 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

(3) 向量的模与方向

如图 7-9 所示,设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,作向量$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$.

① 向量 $\boldsymbol{r}$ 的模为:$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

② 向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向可以用向量 $\boldsymbol{r}$ 与 3 条坐标轴(正向)的夹角 α,β,γ 来表示,α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**,通常称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**,且

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

显然,$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$,且容易验证 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦所组成的向量

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

是向量 $\boldsymbol{r}$ 的单位向量$\boldsymbol{e}_r$,即

$$\boldsymbol{e}_r=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}.$$

例

例 7.1.1　已知两点 $A(1,2,0)$ 和 $B(3,1,5)$,求$\overrightarrow{AB}$ 的单位向量 $\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}}$.

解　$\overrightarrow{AB}=(3-1,1-2,5-0)=(2,-1,5)$,$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+5^2}=\sqrt{30}$,所以 $\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,5)$.

例 7.1.2　设已知两点 $A(1,1,9)$ 和 $B(6,0,4)$,求向量$\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦.

解　$\overrightarrow{AB}=(6-1,0-1,4-9)=(5,-1,-5)$,所以

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5^2+(-1)^2+(-5)^2}=\sqrt{51},$$

$$\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{51}},\quad \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{51}},\quad \cos\gamma=-\frac{5}{\sqrt{51}}.$$

2. 向量的代数运算

设 λ 为实数,$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}\\&=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2),\\\lambda\boldsymbol{a}&=(\lambda x_1)\boldsymbol{i}+(\lambda y_1)\boldsymbol{j}+(\lambda z_1)\boldsymbol{k}\\&=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1).\end{aligned}$$

例 7.1.3 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-4\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，求 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的单位向量.

解 因为 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=3(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})-(-4\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})=13\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$，所以

$$|3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{13^2+(-1)^2+(10)^2}=\sqrt{270}=3\sqrt{30},$$

于是 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的单位向量为 $\dfrac{3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{|3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{3\sqrt{30}}(13\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k})$.

三、向量在轴上的投影

如图 7-10 所示，设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的两端点 A，B 在 x 轴上的投影分别为 A'，B'，若实数 λ 满足 $\overrightarrow{A'B'}=\lambda\boldsymbol{i}$，则称数 λ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴上的**投影**，记作 $\mathrm{Prj}_x\overrightarrow{AB}$，$x$ 轴叫作**投影轴**.

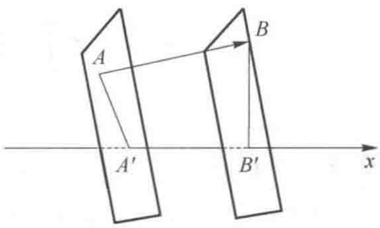

图 7-10

说明 投影不是向量，而是数，它可正可负，也可以是零.

关于向量的投影，有性质如下.

性质 1 $\mathrm{Prj}_x\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\alpha$（$\alpha$ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 x 轴的夹角）.

显然，当 α 是锐角时，投影为正值；当 α 是钝角时，投影为负值；当 α 是直角时，投影为 0.

性质 2 $\mathrm{Prj}_x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{b}$.

性质 3 $\mathrm{Prj}_x(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}$.

习题 7.1

1. 在空间直角坐标系中确定下列各点的位置.

$A(1,2,3)$，$B(-2,3,4)$，$C(2,-3,-4)$，$D(3,4,0)$，$E(0,4,3)$，$F(3,0,0)$.

2. xOy 坐标面上的点的坐标有什么特点？yOz 面上的呢？zOx 面上的呢？

3. 求点 $(1,1,0)$ 与点 $(2,2,3)$ 之间的距离.

4. 求点 $(4,-3,5)$ 分别到坐标原点和各坐标轴间的距离.

5. 在 z 轴上求一点，使该点与 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 两点等距离.

6. 求点 $(-3,2,-1)$ 分别关于各坐标面、各坐标轴、坐标原点对称的点的坐标.

7. 试证：以 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 3 点为顶点的三角形是等腰直角三角形.

8. 验证：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

9. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

10. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边分成 5 等份，设分点依次为 D_1，D_2，D_3，D_4，再把各分点与 A 连接，试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_2A}$，$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

11. 设向量 $\overrightarrow{OM}$ 的模是 4，它与投影轴的夹角是 $60°$，求这向量在该轴上的投影.

12. 一向量的起点是 $P_1(4,0,5)$，终点是 $P_2(7,1,3)$，试求：

(1) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在各坐标轴上的投影；　(2) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模；

(3) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向余弦；　(4) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 方向的单位向量.

13. $\boldsymbol{F}_1=(1,2,3)$，$\boldsymbol{F}_2=(-2,3,-4)$，$\boldsymbol{F}_3=(3,-4,5)$ 同时作用于一点，求合力 $\boldsymbol{F}_{\text{sum}}$ 的大小和方向余弦.

14. 已知两点 $M_1(2,5,-3)$，$M_2(3,-2,5)$，点 M 在线段 M_1M_2 上，且 $\overrightarrow{M_1M}=3\overrightarrow{MM_2}$，求向径 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标.

§7.2　向量的内积与外积

7.2.1　向量的内积

如图 7-11 所示，在物理学中，当物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下产生位移 $\boldsymbol{s}$ 时，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功

$$W=|\boldsymbol{F}|\,|\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

其中，θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角.

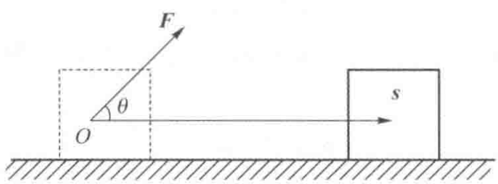

图 7-11

在物理学和力学的很多问题中，都可以通过计算两个向量的模与它们夹角的余弦的乘积来解决. 在数学中，我们把这种运算抽象为两向量的**内积**.

一、内积的概念

向量积的计算

定义 7.2.1　向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模与它们的夹角余弦的乘积，叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**内积**，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 或 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

其中，θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

说明　因 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$，故内积又可表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}.$$

同理，也可表示为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

内积满足以下运算性质.

交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

由内积的定义，容易得出下面的结论.

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

(2) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

二、内积的代数运算

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，则根据向量内积的定义容易得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

根据内积的定义 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量时，有

$$\cos\theta=\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

从上式容易得出，两非零向量互相垂直的充要条件为

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

例

例 7.2.1 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,-4)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,-2,2)$，求：

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

(2)$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

解 (1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+1\times(-2)+(-4)\times2=-9$.

(2) 因 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}=3\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(2)^2}=3$，所以

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-9}{3\sqrt{2}\times3}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

故 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\frac{3}{4}\pi$.

例 7.2.2 求向量 $\boldsymbol{a}=(4,-1,2)$ 在 $\boldsymbol{b}=(3,1,0)$ 上的投影.

解 因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\cdot3+(-1)\cdot1+2\cdot0=11$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3^2+1^2+0^2}=\sqrt{10}$，所以

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{11}{\sqrt{10}}.$$

7.2.2 向量的外积

在研究物体转动问题时，不但要考虑此物体所受的力，还要分析这些力所产生的力矩. 下面举例说明表示力矩的方法.

设 O 为杠杆 L 的支点，力 $\boldsymbol{F}$ 作用于这杠杆上点 P 处，$\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ，如图 7-12 所示.

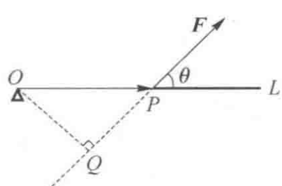

图 7-12

由力学知识可知，力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一个向量 $\boldsymbol{M}$，它的模

$$|\boldsymbol{M}|=|OQ||\boldsymbol{F}|=|\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta,$$

它的方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 所确定的平面（$\boldsymbol{M}$ 既垂直于 $\overrightarrow{OP}$，又垂直于 $\boldsymbol{F}$），而且指向

是按右手法则从$\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向 $\boldsymbol{F}$ 来确定的.即当右手的四指从$\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的再转向 $\boldsymbol{F}$ 握拳时,大拇指所指的方向就是 $\boldsymbol{M}$ 的方向.

这种由两个向量按上面的规则确定另一个向量的情况,在其他力学和物理问题中也会遇到,从而抽象出两个向量的外积概念.

一、外积的概念

定义 7.2.2 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个向量,θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足:

(1) 向量 $\boldsymbol{c}$ 的模为 $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$;

(2) 向量 $\boldsymbol{c}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,并且按顺序 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 符合右手法则,

则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**外积**,记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,如图 7-13 所示,即

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

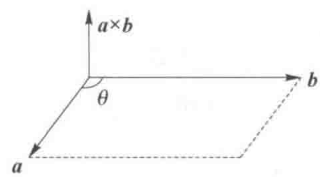

图 7-13

外积满足下列规律.

反交换律:$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

分配律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

结合律:$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$.

由外积的定义,容易得出下面的结论.

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

(2) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相平行的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

二、外积的代数运算

设 $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$,根据向量外积的定义得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (y_1z_2 - z_1y_2)\boldsymbol{i}+(x_2z_1 - x_1z_2)\boldsymbol{j}+(x_1y_2 - x_2y_1)\boldsymbol{k}.$$

说明 这个公式可以用行列式写成下列便于记忆的形式,即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

根据行列式的性质,显然两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相平行的充要条件为

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

例 7.2.3 设 $\boldsymbol{a} = (1,0,1)$ 和 $\boldsymbol{b} = (3,7,0)$,计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (0\times0-7\times1)\boldsymbol{i}-(1\times0-3\times1)\boldsymbol{j}+(1\times7-3\times0)\boldsymbol{k}$$
$$= -7\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}.$$

例 7.2.4 已知 $\boldsymbol{a} = (2,-3,1)$,$\boldsymbol{b} = (1,-1,3)$,$\boldsymbol{c} = (1,-2,0)$,求 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com