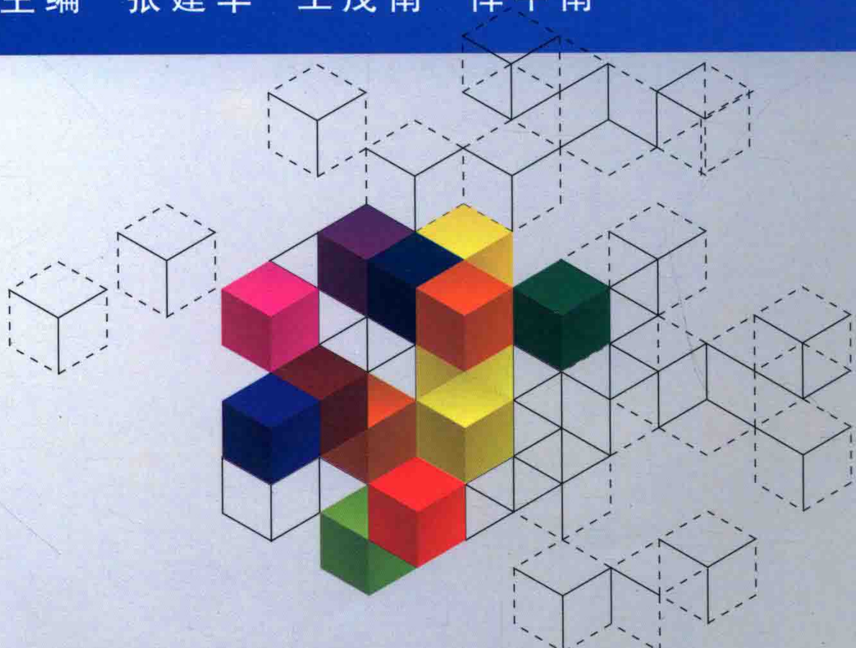
高等数学学习指导

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

主　编　曹菊生　方　正
副主编　张建华　王茂南　恽平南



苏州大学出版社
Soochow University Press

高等数学学习指导

曹菊生　方　正　主编
张建华　王茂南　恽平南　副主编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/曹菊生,方正主编. —苏州:苏州大学出版社,2018.8
ISBN 978-7-5672-2504-6

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①曹…②方… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 159451 号

高等数学学习指导
曹菊生　方　正　主编
责任编辑　征　慧

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市干将东路 200 号　邮编:215021)
宜兴市盛世文化印刷有限公司印装
(地址:宜兴市万石镇南漕河滨路 58 号　邮编:214217)

开本 787×1092　1/16　印张 21.5　字数 509 千
2018 年 8 月第 1 版　2018 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5672-2504-6　定价:43.00 元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部　电话:0512-67481020
苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

前言 Preface

为了帮助读者在数学概念、计算技能和数学思维等方面得到充分的训练，培养学生的空间想象能力、逻辑思维能力和运算能力，编者根据多年的教学经验，在对“工科类本科数学基础课程教学基本要求”和课程内容进行深入研究和理解的基础上，编写了本书，希望能为学习高等数学的读者提供辅导和帮助. 本书可供本科和职业技术学院等全日制大学、电视大学、职工大学等的学生使用，对参加考研或高等数学竞赛的学生也有较好的参考作用，还可供高校教师做教学参考.

本书共十二章，每章分为“主要内容与基本要求”“典型例题解析”“竞赛题选解”“同步练习”四个部分.“主要内容与基本要求”部分列出了知识结构、教学基本要求，并详细总结了本章主要内容——基本概念、重要定理和公式；“典型例题解析”精选了各类典型例题，给出了详尽的解答，许多题目还给出了多种解法，并注意分析比较，总结解题方法和技巧；“竞赛题选解”选取了近十几年全国数学竞赛与江苏省数学竞赛的一些真题，并给出了详尽的解答.“同步练习”配置了一定量的同步练习题与竞赛题，并给出了简明的解答. 另外，按照通常的教学安排，配置了上册、下册各四套期末试卷及解答，供学生在期末考试前复习测试之用. 本书的最后针对各章的内容还配备了 12 套单元测试卷，方便教师对学生学习过程的考核.

本书由曹菊生、方正担任主编，张建华、王茂南、恽平南担任副主编，李莉、刘维龙、杨志荣、庄桂芬、严洁、张筛艳、金锡嘉、秦云、袁玩贵、宋娟、陈燕、黄芳等参与编写. 全书由曹菊生统稿.

本书由李连忠教授主审，并提出许多宝贵意见. 本书的编写得到了编者所在单位江南大学理学院的大力支持和帮助，在此一并表示衷心感谢.

由于编者水平所限，加之时间仓促，书中缺陷和错误在所难免，诚请广大专家、同仁和读者批评指正.

本书受江苏省教改课题（编号：2017JSJG448）和江南大学教改课题（编号：JG2017090）的资助，在此表示感谢.

编 者

2018 年 6 月

目录 Contents

第一章 函数与极限

主要内容与基本要求

一、知识结构

- 函数与极限
  - 函数
    - 函数的定义
    - 函数的特性
    - 复合函数、反函数、分段函数
    - 基本初等函数与初等函数
  - 极限
    - 极限的概念
      - 数列极限
      - $x \to x_0$ 时函数的极限
      - $x \to \infty$ 时函数的极限
      - 左、右极限
    - 极限的性质
      - 唯一性
      - 有界性
      - 保号性
    - 无穷小与无穷大
      - 无穷小与无穷大的定义
      - 无穷小与无穷大的关系
      - 极限与无穷小的关系
      - 无穷小的比较
    - 极限的运算
      - 极限运算法则
      - 极限存在准则
      - 两个重要极限
      - 等价无穷小的替换
  - 连续
    - 函数的连续性
      - 连续的概念
      - 连续函数的运算性质
      - 初等函数的连续性
    - 函数的间断点
      - 第一类间断点
      - 第二类间断点
    - 闭区间上连续函数的性质
      - 最大、最小值定理
      - 有界性定理
      - 介值定理
      - 零点定理

二、基本要求

(1) 在中学已有函数知识的基础上,加深对函数概念的理解和函数性质(奇偶性、单调性、周期性和有界性)的了解.

(2) 理解复合函数的概念,了解反函数的概念.

(3) 会建立简单实际问题中的函数关系式.

(4) 理解极限的概念,了解极限的 ε-N,ε-δ 定义.

(5) 掌握极限的有理运算法则,会用变量代换求某些简单复合函数的极限.

(6) 了解极限的性质(唯一性、有界性、保号性)和两个存在准则(夹逼准则与单调有界收敛准则),会用两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 求极限.

(7) 了解无穷小、无穷大、高阶无穷小和等价无穷小的概念,会用等价无穷小求极限.

(8) 理解函数在一点连续和在一区间上连续的概念.

(9) 了解函数间断点的概念,会判别间断点的类型.

(10) 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的最大值、最小值定理,介值定理与零点定值.

三、内容提要

1. 映射的概念

设 X,Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对 $\forall x\in X$,按法则 f,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记为

$$f:\ X\to Y,y=f(x),x\in X,$$

其中 X 称为映射 f 的定义域,记为 D_f,即 $D_f=X$;X 中所有元素的像组成的集合称为映射 f 的值域,记为 R_f,即 $R_f=f(X)=\{y:y=f(x),x\in X\}$.

注 对每个 $x\in X$,元素 x 的像 y 是唯一的;而对每个 $y\in R_f$,y 的原像不一定唯一;映射 f 的值域 R_f 是 Y 的子集,即 $R_f\subset Y$.

2. 函数的概念

设数集 $D\subset\mathbf{R}$,则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数,记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为函数 f 的定义域,函数值全体 $R_f=f(D)$ 称为 f 的值域.

注 ① 确定函数的两个要素:定义域和对应法则.
② 两个函数相同的条件:定义域相同,且对应法则相同.

3. 函数的特性

(1) 有界性:设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$. 如果存在正数 M,使得 $|f(x)|\leqslant M$ 对任一 $x\in X$ 都成立,那么称函数 $f(x)$ 在 X 内有界;如果这样的 M 不存在,那么称函数 $f(x)$ 在 X 内无界.

注　① 正数 M 不是唯一的. 例如，函数 $f(x)=\sin x$ 对任一 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $|\sin x|\leqslant 1$，也有 $|\sin x|<2$，故 $\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 这里可取 $M=1$，也可取 $M=2$. 由于 M 不是唯一的，所以定义中的 $|f(x)|\leqslant M$ 也可以换成 $|f(x)|<M$.

② 函数 $f(x)$ 是否有界与讨论的区间有关. 例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界，但在 $(0,+\infty)$ 内无界.

(2) 单调性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 与 x_2，当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ $[f(x_1)>f(x_2)]$，那么称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加（减少）的.

(3) 奇偶性：设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$ $[f(-x)=-f(x)]$，那么称 $f(x)$ 为偶（奇）函数.

(4) 周期性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 l，使得对于任一 $x\in D$，都有 $(x\pm l)\in D$ 且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，那么称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们所说的周期函数的周期是指最小正周期.

注　不是任何周期函数都有最小正周期. 例如 $f(x)=c$（c 为常数），任意正数都是它的周期，但由于没有最小正数，因此周期函数 $f(x)=c$ 没有最小正周期.

4. 反函数与复合函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $f(D)$. 对于任一 $y\in f(D)$，在 D 上必有唯一的数值 x 与 y 对应，这个数值 x 适合关系 $f(x)=y$，这时 x 也是 y 的函数，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$. 若 $y=f(x)$ 是单值单调增加（减少）的，则 $x=f^{-1}(y)$ 也是单值单调增加（减少）的，且有 $f^{-1}[f(x)]=x$.

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(D)\subset D_1$，则称函数 $y=f[g(x)]$ 为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D，变量 u 称为中间变量.

5. 基本初等函数与初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算构成，并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

注　① 不能说“凡分段函数都不是初等函数”. 例如：

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

是一个分段函数，但它可用一个式子 $y=\sqrt{x^2}$ 表示，它是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2$ 复合而成的.

② 双曲正弦函数　$\mathrm{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$；

双曲余弦函数　$\mathrm{ch}x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$；

双曲正切函数　$\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$；

反双曲正弦函数　$y=\text{arcsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$;

反双曲余弦函数　$y=\text{arcch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$;

反双曲正切函数　$y=\text{arcth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

6. 极限的概念

(1) 数列极限.

若对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 正整数 N,当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立,则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限,或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$.

注　① ε 是任意给定的正数,它的作用是用来刻画变量 x_n 与常数 a 的接近程度. 首先 ε 是任意的,只有这样,不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 才能刻画变量 x_n 无限接近常数 a;其次 ε 是给定的,一经给定就相对固定下来了,就可以找到 N,否则验证工作无法进行.

② N 是正整数,它的作用是用来刻画当 x_n 与 a 接近到某种程度时数列的项数 n 应大到什么程度,N 是随着 ε 的给定而确定的. 一般地,ε 越小,N 就越大,但 N 不是唯一的. 若 N 能满足定义,则大于 N 的正整数都能满足定义.

③ 当 $n>N$ 时 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立,是指对第 N 项后面所有项 x_n 都有 $|x_n-a|<\varepsilon$,即 n 充分大时,$|x_n-a|$ 任意小,并保持任意小.

(2) $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 若对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

定义中,若把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$,就是左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 的定义;若改为 $x_0<x<x_0+\delta$,就是右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 的定义.

注　① 任意给定的正数 ε 的作用是用来刻画变量 $f(x)$ 与常数 A 的接近程度. 由于 ε 具有任意性,所以 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 能刻画变量 $f(x)$ 无限接近于 A;由于 ε 具有给定性,所以就可以找到 δ.

② δ 是正数,它的作用是用来刻画 x 与 x_0 的接近程度,定义中的 δ 是否存在,说明函数 $f(x)$ 是否以 A 为极限. 若 δ 存在,则 δ 与 ε 和 x_0 有关,当 x_0 给定后,δ 依赖于 ε. 并且 δ 不是唯一的,若 δ 满足定义,则小于 δ 的正数都能满足定义.

③ 定义中 $|x-x_0|>0$ 即为 $x\neq x_0$,它说明函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限与 $f(x)$ 在 x_0 点处的定义无关.

(3) $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限.

设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某一正数时有定义,若对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$,当 $|x|>X$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

定义中，若把$|x|>X$改为$x>X$，就是极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$的定义；若改为$x<-X$，就是极限$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$的定义.

(4) 极限存在的充要条件：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A;$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

7. 极限的性质

(1) 极限的唯一性：若数列或函数的极限存在，则极限值一定唯一.

(2) 收敛数列的有界性：若数列$\{x_n\}$收敛，则数列$\{x_n\}$一定有界；反之，结论不真.

(3) 函数极限的局部有界性：如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么存在常数$M>0$和$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)|\leqslant M$.

(4) 函数极限的局部保号性：如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且$A>0$(或$A<0$)，那么存在点$x_0$的某一去心邻域$\mathring{U}(x_0)$，当$x\in\mathring{U}(x_0)$时，有$f(x)>0$(或$f(x)<0$). 特别地，当$A\neq0$时，存在点$x_0$的某一去心邻域$\mathring{U}(x_0)$，当$x\in\mathring{U}(x_0)$时，有$|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$.

(5) 保不等式性：如果在点x_0的某一去心邻域内，$f(x)\geqslant0$[或$f(x)\leqslant0$]，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么$A\geqslant0$(或$A\leqslant0$).

(6) 函数极限与数列极限的关系：如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，$\{x_n\}$为函数$f(x)$的定义域内任一收敛于$x_0$的数列，且满足$x_n\neq x_0(n\geqslant1)$，那么函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

8. 无穷小与无穷大

如果函数$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的极限为零，那么称$f(x)$为当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷小.

如果当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时$|f(x)|$无限增大，那么称$f(x)$为当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷大.

在自变量的同一变化过程中，若$f(x)$为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，若$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

9. 无穷小的比较

(1) 设α,β是同一极限过程中的两个无穷小，且$\alpha\neq0$.

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记作$\beta=o(\alpha)$；

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小；

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq0$，则称$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小，这里若$c=1$，则称$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记作$\alpha\sim\beta$；

若$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq0(k>0)$，则称$\beta$是关于$\alpha$的$k$阶无穷小.

(2) 等价无穷小的性质：若$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在，则$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$.

(3) 常用的等价无穷小：当$x\to0$时，有

$$\sin x\sim x,\tan x\sim x,1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x,a^x-1\sim x\ln a(a>1,a\neq1),\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}.$$

10. 极限的运算法则

(1) 有限个无穷小的和是无穷小.

(2) 有界函数与无穷小的积是无穷小.

(3) 有限个无穷小的积是无穷小.

(4) 若$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

① $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

② $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

③ $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq0)$.

(5) 设$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，且在点$x_0$的某去心邻域内$g(x)\neq u_0$. 若$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

把$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$换成$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$，同时把$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$换成$\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=A$，可得与上述类似的结论.

11. 极限存在准则

(1) 单调有界原理：单调有界数列必有极限.

(2) 夹逼准则：若$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$. 特别地，若$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

12. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\left[\text{或}\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\right]$.

13. 函数连续的概念

(1) 连续的定义.

设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么称函数$f(x)$在点$x_0$处连续. 如果$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)\left[\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)\right]$，那么称函数$f(x)$在点$x_0$左(右)连续.

$f(x)$在点x_0处连续$\Leftrightarrow f(x)$在点x_0处既是左连续又是右连续.

(2) 间断点的定义.

若函数具有下列三种情形之一:①在 $x=x_0$ 处没有定义;②虽然 $f(x_0)$ 有定义,但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在;③虽然 $f(x_0)$ 有定义且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$,则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

(3) 间断点的分类.

若 $f(x)$ 在间断点 x_0 处 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$,$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在,则称 x_0 为第一类间断点.特别地,当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 时,称 x_0 为可去间断点;当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 时,称 x_0 为跳跃间断点.不是第一类间断点的间断点都称为第二类间断点.

14. 连续函数的性质

(1) 若 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续,则 $f(x)\pm g(x)$,$f(x)g(x)$,$\dfrac{f(x)}{g(x)}[g(x_0)\neq 0]$ 都在 $x=x_0$ 处连续.

(2) 若函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调且连续,则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在对应区间 $I_y=\{y|y=f(x),x\in I_x\}$ 上也单调且连续.

(3) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$,函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续,则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$$

或

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=f[\lim_{x\to x_0}g(x)]=f(u_0).$$

(4) 若 $y=f(u)$ 在点 u_0 处连续,$u=g(x)$ 在点 x_0 处连续,且 $g(x_0)=u_0$,则 $f[g(x)]$ 在点 x_0 处连续.

(5) 初等函数的连续性:基本初等函数在其定义域上是连续的,初等函数在其定义区间(包含在定义域内的区间)上是连续的.

15. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最值定理:闭区间上的连续函数一定有最大值和最小值.

(2) 介值定理:设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,c 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何一个值 $[f(a)\neq f(b)]$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=c$.

(3) 零点定理:设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号,即 $f(a)f(b)<0$,则在 (a,b) 内至少有一点 ξ,使 $f(\xi)=0$.

典型例题解析

一、函数的概念与特性

【例 1】 求下列函数的定义域:

(1) $y=\ln(x^2-1)+\arcsin\dfrac{1}{x+1}$;

(2) $y=f(\sin 2x)$,已知 $f(x)$的定义域为$[0,1]$;

(3) $f(x)=\sqrt{1-x}, g(x)=\sqrt{x-1}$,求复合函数 $f[g(x)]$的定义域.

解 (1) 要使 y 有意义,必须$\begin{cases} x^2-1>0, \\ x+1\neq 0, \\ \left|\dfrac{1}{x+1}\right|\leqslant 1. \end{cases}$

由 $x^2-1>0$,得 $x<-1$ 或 $x>1$;由$\left|\dfrac{1}{x+1}\right|\leqslant 1$,得 $x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 0$. 故定义域为$(-\infty, -2]\cup(1,+\infty)$.

(2) 由条件得 $0\leqslant \sin 2x\leqslant 1$,所以

$$2n\pi\leqslant 2x\leqslant (2n+1)\pi, n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots,$$

故所求定义域为$\left[n\pi, \dfrac{2n+1}{2}\pi\right], n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

(3) $f[g(x)]=\sqrt{1-\sqrt{x-1}}$,定义域满足

$$\begin{cases} 1-\sqrt{x-1}\geqslant 0, \\ x-1\geqslant 0, \end{cases}$$

即 $1\leqslant x\leqslant 2$. 故所求定义域为$[1,2]$.

【例 2】 求函数 $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$的反函数.

解 令 $t=\sqrt{1+4x}$,则 $y=\dfrac{1-t}{1+t}$,得 $t=\dfrac{1-y}{1+y}$,故

$$\sqrt{1+4x}=\frac{1-y}{1+y},$$

于是
$$x=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2-1\right]=-\frac{y}{(1+y)^2}.$$

由此可得反函数为 $y=-\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

【例 3】 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<1, \\ x, & x\geqslant 1, \end{cases} \varphi(x)=\begin{cases} x+2, & x<0, \\ x^2-1, & x\geqslant 0, \end{cases}$求复合函数 $f[\varphi(x)]$.

解 令 $y=f(u)=\begin{cases} e^u, & u<1, \\ u, & u\geqslant 1, \end{cases} u=\varphi(x)=\begin{cases} x+2, & x<0, \\ x^2-1, & x\geqslant 0. \end{cases}$

当 $u=\varphi(x)<1$ 时,

若 $x<0, u=x+2<1$,得 $x<-1$,此时 $f[\varphi(x)]=e^{x+2}$;

若 $x\geqslant 0, u=x^2-1<1$,得 $0\leqslant x<\sqrt{2}$,此时 $f[\varphi(x)]=e^{x^2-1}$.

当 $u=\varphi(x)\geqslant 1$ 时,

若 $x<0, u=x+2\geqslant 1$,得$-1\leqslant x<0$,此时 $f[\varphi(x)]=x+2$;

若 $x\geqslant 0, u=x^2-1\geqslant 1$,得 $x\geqslant\sqrt{2}$,此时 $f[\varphi(x)]=x^2-1$.

综合,得

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1,\\ x+2, & -1\leqslant x<0,\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2},\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}.\end{cases}$$

注　要求两个分段函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，实际上就是将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$. 关键是要搞清 $u=\varphi(x)$ 的函数值落在 $y=f(u)$ 的定义域的哪一部分.

【例 4】　证明：函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证　$|f(x)|=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}\leqslant\dfrac{(x^2+1)^2}{x^4+1}=\dfrac{x^4+1+2x^2}{x^4+1}=1+\dfrac{2x^2}{x^4+1}\leqslant1+1=2$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

【例 5】　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；

(2) 设 $f(0)=0$，且 $x\neq0$ 时 $f(x)$ 满足

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}\ (a,b,c\text{ 为常数},|a|\neq|b|).$$

解　(1) 因为
$$\begin{aligned}f(x)+f(-x)&=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln[-x+\sqrt{(-x)^2+1}]\\&=\ln[(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)]\\&=\ln1=0,\end{aligned}$$

所以 $f(-x)=-f(x)$，从而所给函数 $f(x)$ 是奇函数.

(2) 先求 $f(x)$. 当 $x\neq0$ 时，令 $x=\dfrac{1}{t}$，得

$$af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct,$$

这等价于

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx.$$

把它与条件 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$ 联立，消去 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，得

$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right),$$

因此

$$f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left[\frac{a}{-x}-b(-x)\right]=-\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)=-f(x).$$

又 $f(0)=0$，故 $f(x)$ 为奇函数.

【例 6】　设 $f(x)$ 是定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，求证 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证　设 x_1,x_2 为 $(-l,0)$ 内的任意两点，且 $x_1<x_2$，则 $-x_1,-x_2\in(0,l)$，$-x_1>-x_2$.

因为 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，所以 $f(-x_1)>f(-x_2)$. 又由题设 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内是奇函数，则有

$$f(-x_1)=-f(x_1),f(-x_2)=-f(x_2),$$

因而

$$-f(x_1)>-f(x_2).$$

即当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

二、用定义证明极限

【例 7】 用 ε-N 定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{2n-1}=\dfrac{3}{2}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^3-4n}=0$.

证 (1) **分析** 证明的关键是，对于 $\forall\varepsilon>0$，找出正整数 N，使得当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{3n-2}{2n-1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$ 成立.

对于 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{3n-2}{2n-1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$ 成立，因为

$$\left|\frac{3n-2}{2n-1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n-1}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}, \qquad (*)$$

故只要 $\dfrac{1}{2n}<\varepsilon$，即只要 $n>\dfrac{1}{2\varepsilon}$. 所以只要取 $N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，就有 $\dfrac{1}{2n}<\varepsilon$ 成立，从而有 $\left|\dfrac{3n-2}{2n-1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$ 成立.

这就证明了对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]+1$，使得当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\dfrac{3n-2}{2n-1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$ 成立，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3n-2}{2n-1}=\frac{3}{2}.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{n^2+1}{n^3-4n}\right|<\varepsilon$，因为 $n\geqslant3$ 时，有 $n^3\geqslant9n$，故

$$\left|\frac{n^2+1}{n^3-4n}\right|=\frac{n^2+1}{n^3-4n}\leqslant\frac{2}{n},$$

所以 $\dfrac{2}{n}<\varepsilon$，只要 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}$，故取 $N=\max\left\{\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right],3\right\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{n^2+1}{n^3-4n}-0\right|<\varepsilon,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^3-4n}=0.$$

注 在(1)的证明过程中，将 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2n-1}$ 放大的(*)式，对论证存在 N，使得当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{3n-2}{2n-1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$ 成立起到简化的作用. 如果不用(*)式，而直接由 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2n-1}<\varepsilon$ 解得 $n>\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\varepsilon}+1\right)$，再取 $N=\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\varepsilon}+1\right)\right]$ 也是可以的；但在(2)中直接从不等式 $\left|\dfrac{n^2+1}{n^3-4n}\right|<\varepsilon$ 中解出 n 是很困难的. 所以读者一定要学会放大不等式，但必须注意放大后的式子仍是当 $n\to\infty$ 时的无穷小.