复变函数

戴滨林　杨世海　主编
许佰熹　严　阅　参编

博学·数学系列

复旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

复变函数

戴滨林　杨世海　主编
许佰熹　严　阅　参编

博学 · 数学系列

复旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

复变函数/戴滨林,杨世海主编. —上海:复旦大学出版社,2019.8
(复旦博学. 数学系列)
ISBN 978-7-309-14503-8

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①戴…②杨… Ⅲ. ①复变函数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 155829 号

复变函数
戴滨林 杨世海 主编
责任编辑/陆俊杰

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143 出版部电话:86-21-65642845
杭州日报报业集团盛元印务有限公司

开本 787×960 1/16 印张 14 字数 241 千
2019 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-14503-8/O · 671
定价:35.00 元

内容提要

本书主要分为7个章节内容：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的泰勒展式和洛朗展式、留数理论及其应用、共形映射、狄利克雷问题.

本书可作为高等院校数学与应用数学、信息与计量科学、统计学、数量经济、金融工程等专业的本科生教材，也可作为其他理工科和师范类相关专业本科生的教学参考用书.

前　　言

复变函数理论诞生于18世纪,是19世纪特别丰饶的数学分支和抽象科学中非常和谐的理论之一.复变函数是分析学的一个重要的组成部分,是数学乃至自然科学的重要基础之一,也是分析学知识应用于实际问题的一种具体工具和桥梁.复变函数理论已渗透到现代数学的许多分支,在数学、自然科学和工程技术中有着广泛应用.复变函数是数学和应用数学及相关专业非常重要的基础课之一.

除了数学和理工科专业外,目前财经类大学也开设了复变函数课程,现有的复变函数教材非常丰富,也非常好.但是传统优秀教材大多起点高,内容深奥,适合基础较好的数学和理工学科学生研究学习.为了更易于一般普通本科生和财经类本科生的学习,我们尝试结合财经类大学学生特点编写了这本教材,精选教学内容,加强基本概念部分内容,注重基本公式的推导,强调应用,简洁易懂,特别是利用MATLAB强大的数值计算和绘图功能,将复变函数论中的一些复杂难懂的理论和典型实例实现计算机的数据自动计算和可视化,从而使抽象、繁杂的内容具体化、简单化,使学生更加容易学习理解.

本书由上海财经大学数学学院教师编写,编者分别为戴滨林(第一章第1、2节,第二章第1、2节,第三章第1至第5节,第四章,第五章,第六章第1、2节)、杨世海(第六章第3节、第七章)、许佰熹和严阅(第一章第3节,第二章第3节,第三章第6节,第六章第4节,附录).本书在编写过程中得到了上海财经大学数学学院领导和老师的大力支持,特别是程晋教授给予了很多指点和帮助,在此表示衷心感谢.本书得到了上海财经大学重点课程建设项目资助,复旦大学出版社范仁梅老师和陆俊杰老师对本书的出版给予了大量帮助,在此一并表示衷心感谢!

由于编者水平有限,书中错误和缺点在所难免,盼望读者批评指正.

编　者

2019年5月

目　　录

第一章　复数与复变函数

§1.1　复数与复平面

§1.1.1　复数域

我们首先简要介绍复数的相关概念.

1. 复数的定义

定义 1.1　设 x 与 y 都是实数,我们称 $x+\mathrm{i}y$ 为复数,记为 $z=x+\mathrm{i}y$;称 x 为 z 的实部(Real),记 $\mathrm{Re}\,z=x$;称 y 为 z 的虚部(Imaginary),记 $\mathrm{Im}\,z=y$.

我们称复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 及 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相等,是指它们的实部与实部相等、虚部与虚部相等. 虚部为零的复数就可看作实数,虚部不为零的复数就称为复数,实部为零且虚部不为零的复数称为纯虚数. 我们用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数所成的集合、用 $\mathbf{C}$ 表示全体复数所成的集合,$\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{C}$ 的子集.

2. 复数的代数运算

复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的加、减、乘、除运算如下定义:

(1) $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$;

(2) $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2)$;

(3) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\dfrac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq 0)$.

复数的加法满足交换律与结合律,而且减法是加法的逆运算;复数的乘法满足交换律与结合律,且遵守乘法对加法的分配律,除法是乘法的逆运算.

引进上述运算后,复数全体就称为复数域,正好是代数学中所研究的“域”的实例. 不过,和实数域不同的是,在复数域中的复数是不能比较大小的.

3. 共轭复数及其性质

定义 1.2　设复数 $z=x+\mathrm{i}y$,则称复数 $x-\mathrm{i}y$ 为 z 的共轭复数,记作 $\bar{z}$.

我们容易得到如下重要性质:

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\quad(z_2\neq 0)$;

(2) $\overline{(\overline{z})}=z$;

(3) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}\quad(z_2\neq 0)$;

(4) $z\bar{z}=(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2$;

(5) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\,z$, $z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}\,z$.

例 1.1 计算复数 $\dfrac{2-3\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$.

【解】 解法一(应用商的公式)

$$\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)+\mathrm{i}\left(\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)=\frac{2\cdot 3+(-3)\cdot 4}{3^2+4^2}+\mathrm{i}\,\frac{3\cdot(-3)-2\cdot 4}{3^2+4^2}$$
$$=-\frac{6}{25}-\frac{17}{25}\mathrm{i}.$$

解法二(应用共轭复数性质)

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\frac{(2-3\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}=\frac{(6-12)+\mathrm{i}(-8-9)}{3^2+4^2}=-\frac{6}{25}-\frac{17}{25}\mathrm{i}.$$

例 1.2 设 $(x+2y-2)+\mathrm{i}(x^2+2y)=-4$,求实数 x, y.

【解】 由题意得 $\begin{cases}x+2y-2=-4,\\x^2+2y=0,\end{cases}$ 解得

$$\begin{cases}x=-1,\\y=-\dfrac{1}{2},\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=2,\\y=-2.\end{cases}$$

例 1.3 设复数 $z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$,求 $\mathrm{Re}\,z$, $\mathrm{Im}\,z$ 和 $z\bar{z}$.

【解】 $z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}-\dfrac{3\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}.$

$$\mathrm{Re}\,z=\frac{3}{2},\ \mathrm{Im}\,z=-\frac{1}{2},\ z\bar{z}=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$$

例 1.4 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 为两个任意复数,试证明:$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

【证明】 证法一

$$
\begin{aligned}
&z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\\
&=(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2)+(x_1x_2+y_1y_2)-\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2)\\
&=2(x_1x_2+y_1y_2)=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).
\end{aligned}
$$

证法二

$$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=2\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2).$$

例 1.5　设复数 $a+\mathrm{i}b$ 是实系数方程 $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$ 的根,证明 $a-\mathrm{i}b$ 一定也是该方程的根.

【证明】 由于 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是实数,因此 $\overline{a_0}=a_0, \overline{a_1}=a_1, \cdots, \overline{a_n}=a_n$. 因为 $\overline{z^k}=(\bar{z})^k$,所以由共轭复数的性质有:$\overline{P(z)}=P(\bar{z})$. 因为 $P(a+\mathrm{i}b)\equiv 0$,两边共轭得到

$$\overline{P(a+\mathrm{i}b)}=P(\overline{a+\mathrm{i}b})\equiv\bar{0}=0.$$

所以 $P(a-\mathrm{i}b)\equiv 0$,即 $a-\mathrm{i}b$ 也是 $P(z)=0$ 的根.

§1.1.2　复平面

如图 1.1 所示,我们也可以用平面上横坐标为 x、纵坐标为 y 的点来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$,这样,平面上全部的点和全体复数间建立了一一对应的关系.

x 轴上的点对应的是实数,故 x 轴称为实轴;y 轴上的非原点的点对应着纯虚数,故 y 轴称为虚轴. 我们称这样表示复数 z 的平面为复平面或 z 平面.

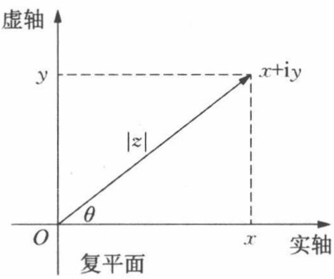

图 1.1

§1.1.3　复平面的向量表示

在复平面上,我们也可以用从原点到点 $z=x+\mathrm{i}y$ 所引的向量表示这个复数 z,复数和向量之间也构成一一对应关系,如图 1.1 所示,我们用向量 $\overrightarrow{Oz}$ 来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$,其中 x, y 顺次等于 $\overrightarrow{Oz}$ 沿 x 轴与 y 轴的分量. 由图 1.2 容易看出,这种对应关系使复数的加(减)法与向量的加(减)法是一致的.

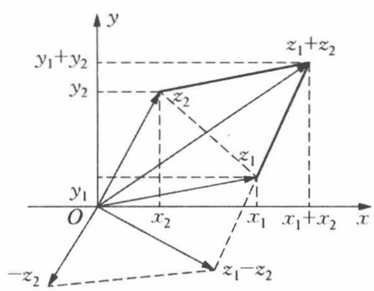

图 1.2

§1.1.4 复数的模与辐角

如图 1.1 所示,向量$\overrightarrow{Oz}=x+\mathrm{i}y$. 向量$\overrightarrow{Oz}$的长度称为复数$z$的模或绝对值,以符号$|z|$或$r$表示,因而有$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$,很显然有$|x|\leqslant|z|$,$|y|\leqslant|z|$,$|z|\leqslant|x|+|y|$.

我们可以得到如下常用不等式:

(1) 三角形两边之和大于第三边:$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$;

(2) 三角形两边之差小于第三边:$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|$.

我们把实轴正向到非零复数$z=x+\mathrm{i}y$所对应的向量$\overrightarrow{Oz}$间的夹角θ称为复数z的辐角(Argument),记为$\theta=\mathrm{Arg}\,z$.

我们知道,任一非零复数z有无穷多个辐角,我们用$\arg z$表示其中一个符合条件$-\pi<\arg z\leqslant\pi$的角,称为$\mathrm{Arg}\,z$的主值,或称为z的主辐角. 我们有

$$\theta=\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

注 复数为 0 时,辐角无意义.

§1.1.5 欧拉公式与复数的三角形式和指数形式

欧拉(Euler)在 1740 年左右发现了如下非常奇妙的公式:

$$e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta,$$

现在它被称为欧拉公式以纪念他.

这里,我们不去证明欧拉公式,而是用幂级数理论对欧拉公式给以一个简要解释.

对任意实数x,我们有:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

在上式中,当取$x=\mathrm{i}\theta$时,就可以得到欧拉公式:

$$\begin{aligned}e^{\mathrm{i}\theta}&=1+\mathrm{i}\theta+\frac{(\mathrm{i}\theta)^2}{2!}+\frac{(\mathrm{i}\theta)^3}{3!}+\cdots+\frac{(\mathrm{i}\theta)^n}{n!}+\cdots\\&=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots\right)+\mathrm{i}\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots\right)\\&=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta.\end{aligned}$$

利用直角坐标与极坐标的关系:$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,我们得到复数的三角表示式:

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$
$$\bar{z} = r(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) = r[\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)].$$

利用欧拉公式,就可以得到复数 z 的指数形式:

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

我们称 $z = x + \mathrm{i}y$ 为复数 z 的代数形式. 于是:

$$z = x + \mathrm{i}y\text{(代数形式)} \xleftrightarrow{x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta;\ r = \sqrt{x^2+y^2},\ \theta = \arctan\frac{y}{x}}$$

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\text{(三角形式)} \xleftrightarrow{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta} z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\quad\text{(指数形式)}.$$

注　因为辐角有无穷多种选择,所以复数的三角表示式不是唯一的. 如果有两个三角表示式相等: $r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$,则可以推出 $r_1 = r_2$, $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$,其中 k 为整数.

例 1.6　将 $z = -1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$ 化为三角表示式和指数表示式.

【解】　复数 z 的模 $|z| = r = 2$, z 的辐角 θ 在第三象限,于是

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \sqrt{3},\ \theta \in \left(\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right) \Rightarrow \tan\theta = \tan(\theta - 2\pi) = \sqrt{3},$$

$$\theta - 2\pi \in \left(-\pi,\ -\frac{1}{2}\pi\right) \Rightarrow \theta = \pi + \arctan\sqrt{3} - 2\pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2}{3}\pi.$$

故 $z = 2\left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right]$.

例 1.7　将 $z = -2 + 3\mathrm{i}$ 化为三角表示式和指数表示式.

【解】　复数 z 的模 $r = |-2 + 3\mathrm{i}| = \sqrt{13}$,主辐角

$$\theta = \arctan\frac{3}{-2} = \pi - \arctan\frac{3}{2}.$$

$$z = \sqrt{13}\left[\cos\left(\pi - \arctan\frac{3}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\pi - \arctan\frac{3}{2}\right)\right] = \sqrt{13}\,\mathrm{e}^{\left(\pi - \arctan\frac{3}{2}\right)\mathrm{i}}.$$

§1.1.6　用复数的三角形式和指数形式表示复数的乘除法

设两复数 $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) = |z_1|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$ 和 $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) = |z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$,则有:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| [(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$$
$$= |z_1| \cdot |z_2| [\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)] = |z_1| \cdot |z_2| \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}.$$

即:模 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,辐角 $\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$.

定理 1.1 两个复数乘积的模等于它们模的乘积,辐角等于它们的辐角之和.

注 1 由于辐角是多值的,多值函数相等时,$\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$ 理解为:对于左端的任一个值,右端有一值与它对应;反之也一样.

注 2 当用向量表示复数时,表示乘积 $z_1 \cdot z_2$ 的向量是从表示 z_1 的向量旋转一个角度 $\mathrm{Arg}\, z_2$,并伸长(缩短)到 $|z_2|$ 倍得到.

令 $z_1 = \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$, $z_2 = |z_2| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则 $z_1 \cdot z_2 = \mathrm{i}z_2 = |z_2| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$, $z_1 \cdot z_2$ 可以看成 z_2 通过逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$得到,而 $-z = z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}$ 可以看成 z 通过顺时针旋转 π 而得.

定理 1.2 两个复数的商的模等于它们模的商,辐角等于被除数与除数的辐角之差.

【证明】 $z_1 = |z_1| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $z_2 = |z_2| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, $|z_1| \neq 0$.

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{|z_2| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}}{|z_1| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}} = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)}.$$

即:模 $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$,辐角 $\mathrm{Arg}\,\frac{z_2}{z_1} = \mathrm{Arg}\, z_2 - \mathrm{Arg}\, z_1$.

例 1.8 用三角表示式和指数表示式计算下列复数:

(1) $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(-\sqrt{3}-\mathrm{i})$; (2) $\frac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$;

(3) $\frac{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{(1-\mathrm{i})(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)}$; (4) $\frac{(\cos 5\varphi+\mathrm{i}\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-\mathrm{i}\sin 3\varphi)^3}$.

【解】 (1) $1+\sqrt{3}\mathrm{i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$, $-\sqrt{3}-\mathrm{i} = 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] = 2\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}$,所以

$$(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(-\sqrt{3}-\mathrm{i}) = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 4\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = -4\mathrm{i}.$$

(2) $2+\mathrm{i}=\sqrt{5}\left[\cos\left(\arctan\dfrac{1}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\arctan\dfrac{1}{2}\right)\right]=\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\frac{1}{2}}$,

$$1-2\mathrm{i}=\sqrt{5}\,\{\cos[\arctan(-2)]+\mathrm{i}\sin[\arctan(-2)]\}=\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan(-2)},$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}&=\left[\cos\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan 2\right)+\mathrm{i}\sin\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan 2\right)\right]\\&=\mathrm{e}^{\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan 2\right)\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&\frac{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{(1-\mathrm{i})(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)}\\&=\frac{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right](\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right][\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]}\\&=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right](\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta)\\&=\sqrt{2}\left[\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)\right]=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\frac{(\cos 5\varphi+\mathrm{i}\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-\mathrm{i}\sin 3\varphi)^3}&=\frac{\cos 10\varphi+\mathrm{i}\sin 10\varphi}{\cos(-9\varphi)+\mathrm{i}\sin(-9\varphi)}=\cos 19\varphi+\mathrm{i}\sin 19\varphi\\&=\mathrm{e}^{19\varphi\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

§1.1.7　复数的乘幂与方根

1. 乘方公式

设复数 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则乘方 $z^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$. 当 $|z|=1$ 时,有

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta.$$

这个公式称为棣莫弗(De Moivre)公式.

2. 开方公式

下面求非零复数 z 的 n 次方根 $w=\sqrt[n]{z}$ $(n\geqslant 2$,整数).

设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 因为 $w^n=z$,则有 $\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,从而得 $\rho^n=r$, $n\varphi=\theta+2k\pi$,解出得 $\rho=\sqrt[n]{r}$(取算术方根),$\varphi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}$.

所以 z 的 n 次方根为