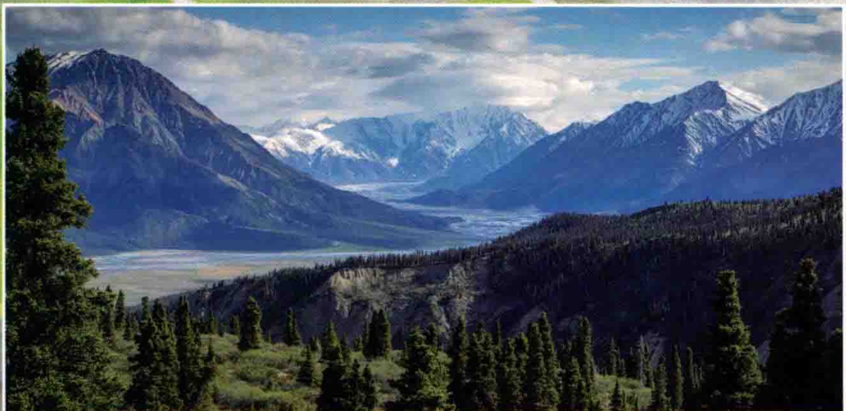
G A O D E N G S H U X U E



普 通 高 等 教 育 “十 三 五” 规 划 教 材

（理工类）高等数学 上册

（第4版）

主 编 杨海涛

同濟大學 出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

（理工类） 上册 （第4版）

主 编 杨海涛

编 写 （以编写内容顺序为序）
李克华 胡航宇 吴俊义

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是在贯彻落实教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"要求精神的基础上，按照国家非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新提出的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"，并结合当前大多数本科院校学生基础和教学特点进行编写的. 全书分上、下两册，此为上册. 内容包括函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数与空间解析几何4章；附录包括二阶和三阶行列式简介、常用曲线方程与图像、积分表、数学建模与数学实验. 书后附有习题答案与提示.

本书知识系统、结构清晰、内容详略得当、例题丰富、语言通俗、讲解透彻、难度适中. 适合作为普通高等院校工科类、理科类(非数学专业)高等数学课程的教材使用，也可供相关专业人员和广大教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：理工类. 上册 / 杨海涛主编. --4版. --上海：同济大学出版社，2018.8

ISBN 978-7-5608-7887-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第106554号

普通高等教育"十三五"规划教材

高等数学(理工类)上册(第4版)

主编 杨海涛

责任编辑 张 莉 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经　销 全国各地新华书店

印　刷 江苏句容排印厂

开　本 710 mm×960 mm 1/16

印　张 17.25

字　数 345 000

印　数 1—3 100

版　次 2018年8月第4版 2018年8月第1次印刷

书　号 ISBN 978-7-5608-7887-4

定　价 38.00元

前　言

“高等数学”在众多领域都有广泛的应用，因而成为本科教学中重要的基础课程之一. 为了适应当前我国高等教育从“精英型教育”向“大众化教育”的转变过程，满足大多数高等院校出现的新的教学形势、学生基础和教学特点，我们编写了这本高等数学教材.

本书在编写过程中，认真贯彻落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的要求精神，严格按照国家非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新提出的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，同时参考了近几年国内外出版的相关教材，并结合编者的教学实践经验以及当前多数本科院校学生基础和教学特点进行编写.

全书以通俗的语言，系统介绍了高等数学的知识. 全书分上、下两册. 上册分4章，内容包括函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数与空间解析几何;上册附录包括二阶和三阶行列式简介、常用曲线方程与图像、积分表、数学建模与数学实验. 下册分4章，内容包括多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数和微分方程;下册附录包括数学建模与数学实验. 每册书后附有习题答案与提示.

本书在编写中有以下几点考虑:

(1) 本书内容覆盖面较广，教师可根据不同专业要求的教学时数适当取舍. 讲完全书(包括习题课)约需 192 学时;删去加“ * ”号的部分约需 176 学时，降低部分较难理论的证明约需 152 学时;再对第 6, 7, 8 章作适当删减，可供 112 学时或 96 学时的课程选用.

(2) 为培养学生应用意识和实践能力，编排了一定数量的应用题，并在上、下册分别安排了与教学内容相应的数学建模与数学实验，教师可根据情况另外安排 8～16 学时的实践课.

(3) 本书编写重在基本概念、基本理论和基本方法的介绍，知识面较广，但对深入的理论和技巧不作要求.

(4) 本书在编写中，根据知识的特点，有的内容是以介绍的方式编写，有的内

容是以探讨与研究的方式编写，目的在于培养学生的数学思维和分析解决问题的能力.

(5) 适当渗透现代数学思想.

本书知识系统、结构清晰、内容详略得当、例题丰富、语言通俗、讲解透彻、难度适中，适合作为普通高等院校工科类、理科类(非数学专业)高等数学课程的教材使用，可供成教学院或申请升本的专科院校选用为教材，也可供相关专业人员和广大教师参考.

本书由杨海涛主编，参加编写的人员有(按编写教材内容顺序)：李克华、胡航宇、吴俊义、叶洪波、陈玉成、杨海涛、翟绍辉. 全书由杨海涛统稿、定稿.

在本书的编写过程中，参考了书后所列参考文献. 作者在此对这些参考文献的作者表示感谢.

感谢韩明教授，他在审阅中提出了一些宝贵而又中肯的建议，使本书避免了一些错误和不当之处.

由于时间仓促，加之我们对教材内容体系改革的研究还处于尝试阶段，虽然全力以赴，但书中一定还有不少不尽如人意之处，热忱希望专家、教师和读者提出宝贵意见.

杨海涛

2018 年 5 月

目 录

1 函数、极限与连续

函数是数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象. 极限概念是高等数学的理论基础. 连续性是函数的基本性态之一. 本章介绍函数、极限和函数连续性等基本概念以及它们的基本性质.

1.1 函　　数

1.1.1 函数的概念

1. 集合

(1) 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念. 所谓**集合**(简称**集**)是指具有某种特定性质的事物的总体. 例如，一个书柜中的书构成一个集合，全体实数构成一个集合等. 集合通常用大写拉丁字母 A, B, C, …表示;组成集合的每一个事物称为该集合的**元素**(简称**元**)，通常用小写的拉丁字母 a, b, c, …表示.

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a \in A$;否则，就说 a 不属于 A，记作 $a \notin A$. 一个集合，若它只含有有限个元素，则称为有限集;不是有限集的集合称为无限集.

表示集合的方法通常有两种:一种是列举法，就是把集合的全体元素一一列举出来表示. 例如，由元素 a_1, a_2, …, a_n 组成的集合 A 可以表示成

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\};$$

另一种是描述法，若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体组成，就可以表示成

$$M = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}.$$

例如，集合 B 是不等式 $x^2 > 1$ 的解集，就可以表示成

$$B = \{x \mid x^2 > 1\}.$$

对于数集，有时在表示数集的字母的右上角标上“*”来表示该数集内排除零的集，标上“+”来表示该数集内排除零和负数的集.

习惯上，全体非负整数即自然数的集合记作 **N**，即

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\};$$

全体正整数的集合为

$$\mathbf{N}^{+}=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\};$$

全体整数的集合为

$$\mathbf{Z}=\{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\};$$

全体非零整数的集合为

$$\mathbf{Z}^{*}=\{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 1, 2, \cdots, n, \cdots\};$$

全体有理数的集合为

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^{+} \text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\};$$

全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.

设 A, B 是两个集合，若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 是集合 B 的**子集**，记作 $A \subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B \supset A$(读作 B 包含 A).

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A \subsetneqq B$. 例如，$\mathbf{N} \subsetneqq \mathbf{Z} \subsetneqq \mathbf{Q} \subsetneqq \mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 我们规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing \subset A$.

(2) 集合的运算

集合的基本运算有四种：交、并、差、补.

设 A，B 是两个集合，由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**(简称**并**)，记作 $A \cup B$，即

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

由所有既属于 A 且属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**(简称**交**)，记作 $A \cap B$，即

$$A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**差集**(简称**差**)，记作 $A \backslash B$，即

$$A \backslash B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

有时，我们研究问题限定在一个大的集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集. 此时，集合 I 称为**全集**或**基本集**；$I \backslash A$ 称为 A 的**余集**或**补集**，记作 A^{C}. 例如，在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A=\{x \mid x \geqslant 1\}$ 的余集是

$$A^C = \{x \mid x < 1\}.$$

集合的并、交、余运算满足下列法则：

设 A, B, C 为任意三个集合，则有下列法则成立：

① 交换律. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

② 结合律. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

③ 分配律. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

④ 对偶律. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

以上这些法则都可以根据集合相等的定义进行验证.（请读者自证.）

还可以定义两个集合的**直积**或**笛卡尔**(Descartes)**乘积**. 设 A, B 是任意两个集合，称集合

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ 且 } y \in B\}$$

为集合 A 与 B 的**直积**. 例如，$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ 即为 xOy 平面，$\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 也记作 $\mathbf{R}^2$.

(3) 区间和邻域

区间是一类常见的数集. 设 a 和 b 都是实数，且 $a < b$. 数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为开区间，记作 (a, b)，即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为闭区间，记作 $[a, b]$，即

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

类似地，数集

$$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$$

称为**半开区间或半闭区间**.

以上这些都是有限区间，此外还有所谓无限区间. 例如

$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$, $(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$, $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$.

邻域也是一类常见的数集. 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 **δ 邻域**，记作 $U(a, \delta)$，即

$$U(a, \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

点 a 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**.

类似地，数集

$$\mathring{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的**去心 δ 邻域**. 开区间 $(a-\delta, a)$ 称为点 a 的**左 δ 邻域**，开区间 $(a, a+\delta)$ 称为点 a 的**右 δ 邻域**.

2. 映射

(1) 映射的概念

定义 1.1.1 设 X, Y 是两个非空集合，若存在一个法则 f，使得对 X 中每一个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的**映射**，记作

$$f: X \rightarrow Y.$$

其中，y 称为元素 x（在映射 f 下）的**像**，记作 $f(x)$，即

$$y=f(x).$$

而 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个原像；集合 X 称为映射 f 的**定义域**，记作 D_f，即 $D_f=X$；X 中所有元素的像组成的集合称为映射 f 的**值域**，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f=f(X)=\{f(x) \mid x \in X\}.$$

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，则称 f 为 **X 到 Y 上的映射**或**满射**；若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$，它们的像满足 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 的**单射**；若映射 f 既是单射又是满射，则称 f 为**一一映射**（或**双射**）.

(2) 逆映射与复合映射

设 f 是从 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y \in R_f$ 有唯一的 $x \in X$，满足 $f(x)=y$，于是，可以定义一个新映射

$$f^{-1}: R_f \rightarrow X,$$

对每一个 $y \in R_f$，规定 $f^{-1}(y)=x$，其中 x 满足 $f(x)=y$. 映射 f^{-1} 称为 f 的**逆映射**，其定义域为 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域为 $R_{f^{-1}}=X$.

设有两个映射

$$g: X \rightarrow Y_1, \quad f: Y_2 \rightarrow Y,$$

其中 $Y_1 \subset Y_2$，则由映射 g 和 f 可以定义出一个从 X 到 Y 的映射

$$f \circ g: X \to Y,\ (f \circ g)(x) = f[g(x)],\ x \in X.$$

该映射 $f \circ g$ 称为映射 g 和 f 构成的**复合映射**.

由复合映射的定义可以看出，映射 g 和 f 构成复合映射的条件是：g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域 D_f 内，即 $R_g \subseteq D_f$. 由此可知，映射 g 和 f 的复合是有顺序的，$f \circ g$ 有意义并不表示 $g \circ f$ 也有意义. 即使 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 都有意义，复合映射 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 也未必相同.

3. 函数

定义 1.1.2 设 $D \subseteq \mathbf{R}$ 是一非空数集，那么映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 称为定义在 D 上的**函数**，通常简记为

$$y = f(x),\ x \in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，集合 D 称为函数的**定义域**，记作 D_f，即 $D_f = D$.

对于每个 $x \in D$，按定义有唯一确定的 y 与之对应. 这个值称为函数 f 在 x 处的**函数值**，记作 $f(x)$，即 $y = f(x)$. 全体函数值的集合称为函数 f 的**值域**，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}.$$

表示函数的记号是可以任意选取的，除了常用的 f 外，还可以用 g, G, F, φ, h, ψ 等表示.

由函数的定义可知，两个函数相等的充分必要条件是定义域及对应法则分别相同.

函数的定义域通常按以下两种方式确定：对于有实际背景的函数，其定义域根据实际背景中变量的实际意义确定；对于用抽象算式表示的函数，其定义域通常是使得该算式有意义的一切实数组成的集合.

在平面直角坐标系中，让自变量在横轴上变化，因变量在纵轴上变化，则平面点集

$$\{(x,\ y) \mid y = f(x),\ x \in D_f\}$$

称为函数 $y = f(x)$，$x \in D$ 的**图形**，如图 1.1 所示.

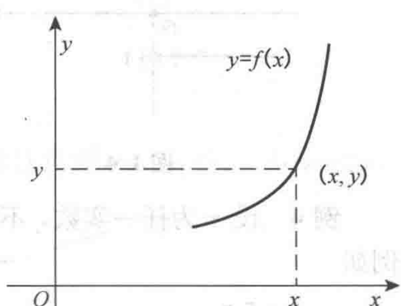


图 1.1

以下是几个常见函数的例子.

例 1 函数 $y = 2$ 的定义域 $D = \mathbf{R}$，值域 $R_f = \{2\}$，它的图形是一条平行于 x 轴的直线，如图 1.2 所示.

例 2 函数 $f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 称为绝对值函数，定义域 $D=\mathbf{R}$，值域 $R_f=[0, +\infty)$，如图 1.3 所示.

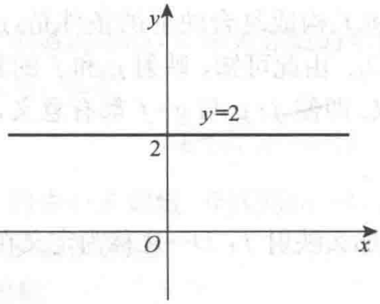


图 1.2

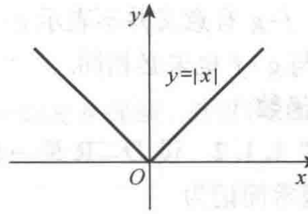


图 1.3

例 3 函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$ 称为**符号函数**，它的定义域 $D_f=(-\infty, +\infty)$，值域 $R_f=\{-1, 0, 1\}$，其图形如图 1.4 所示. 对于任何实数 x，下列关系成立：

$$x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|.$$

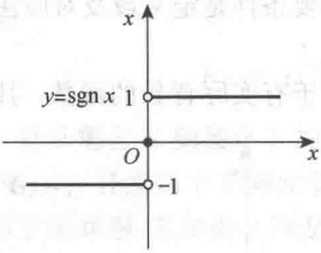


图 1.4

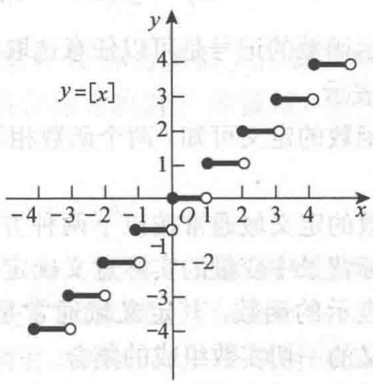


图 1.5

例 4 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的**整数部分**，记作 $[x]$. 例如

$$\left[\frac{5}{7}\right]=0,\ [\sqrt{2}]=1,\ [\pi]=3,\ [-3.5]=-4,\ [-2]=-2.$$

把 x 看成变量，则函数

$$y=[x]$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$. 其图形如图 1.5 所示.

例 5 函数 $y=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x-1, & x>0 \end{cases}$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 的分段函数，其图形如图 1.6 所示.

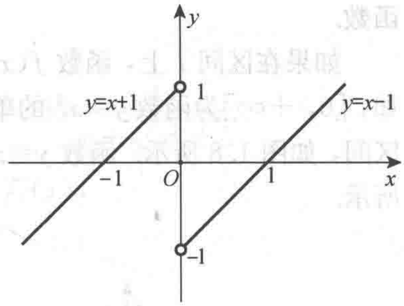


图 1.6

有些函数，对于定义域内自变量 x 的不同取值，不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为**分段函数**. 如例 2、例 3 和例 5.

1.1.2 函数的一些性质

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，若存在正数 M，使得对任何 $x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称**函数 $f(x)$ 在 D 上有界**，或称 **$f(x)$ 是 D 上的有界函数**. 每一个具有上述性质的正数 M，都是函数 $f(x)$ 的界.

若不存在具有上述性质的正数 M，则称 **$f(x)$ 在 D 上无界**，或称 **$f(x)$ 是 D 上的无界函数**. 也就是说，如果对于任意给定的正数 M，无论多大，总存在某个 $x\in D$，使得 $|f(x)|>M$，则 $f(x)$ 在 D 上无界.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\arctan x$ 都是其定义域上的有界函数，而 $y=x^2$，$y=\dfrac{1}{x}$，$y=\tan x$ 都是其定义域上的无界函数.

显然，有界函数 $f(x)$ 的图形介于两条平行线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间，如图 1.7 所示.

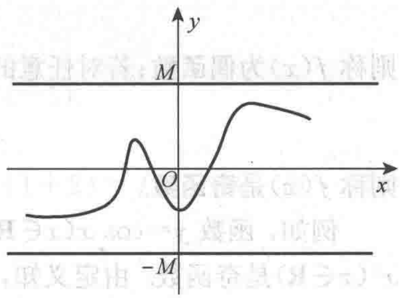


图 1.7

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subseteq D$. 如果对任意的 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加的**；如果对于任意的 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少的**. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调**

函数.

如果在区间 I 上，函数 $f(x)$ 为单调函数，则称 I 为函数 $f(x)$ 的**单调区间**. 例如，$[0, +\infty]$ 为函数 $y=x^2$ 的单调增加区间，$(-\infty, 0)$ 为函数 $y=x^2$ 的单调减少区间，如图 1.8 所示. 函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的，如图 1.9 所示.

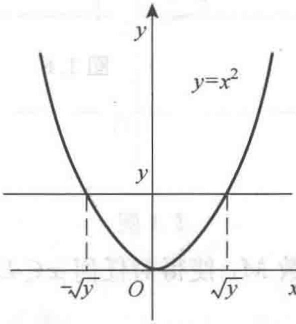


图 1.8

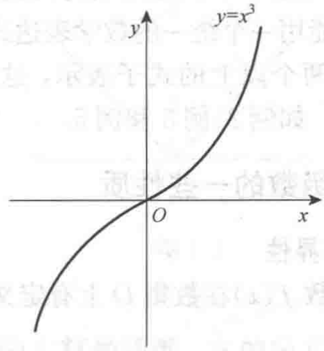


图 1.9

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意的 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**;若对任意的 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 是**奇函数**.

例如，函数 $y=\cos x(x\in\mathbf{R})$，$y=x^2(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数，$y=\sin x(x\in\mathbf{R})$，$y=x^3(x\in\mathbf{R})$ 是奇函数. 由定义知，偶函数的图像**关于 y 轴对称**，奇函数的图像**关于原点对称**.

例 6 判断下列函数哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶函数?

(1) $x\sin x+x^2\cos x$; (2) $\tan^3 x+1$; (3) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) 令 $f_1(x)=x\sin x+x^2\cos x$，因为

$$f_1(-x)=(-x)\sin(-x)+(-x)^2\cos(-x)=f_1(x),$$

因此，$f_1(x)$ 是偶函数.

(2) 令 $f_2(x)=\tan^3 x+1$，因为

$$f_2(-x)=\tan^3(-x)+1=-\tan^3 x+1,$$

$f_2(-x)$ 既不等于 $f_2(x)$，也不等于 $-f_2(x)$，因此 $f_2(x)$ 是非奇非偶函数.

(3) 令 $f_3(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，因为

$$f_3(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f_3(x),$$

因此，$f_3(x)$是奇函数.

4. 周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，若存在一个正数 T，使得对于任意 $x\in D$，有$(x\pm T)\in D$，且恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$是周期函数，T 称为 $f(x)$的周期.

由定义容易知道，若 T 是函数 $f(x)$的周期，则 kT，$k\in\mathbf{Z}^+$ 都是 $f(x)$的周期，通常我们所说周期函数的周期是指最小正周期. 但也有周期函数不存在最小正周期. 例如，常值函数是周期函数，但没有最小正周期.

$\sin x$，$\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数，$\tan x$，$\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数. 周期函数的图形在相邻两个长度为 T 的区间上是完全相同的.

例 7 设函数 $f(x)$是以 2 为周期的周期函数，它在区间$(0,2]$上的表达式为

$$f(x)=1+x^2.$$

(1) 画出函数 $f(x)$的图形；(2) 求 $f(0)$，$f(3)$，$f(-5)$.

解 (1) $f(x)$的图形如图 1.10 所示.

(2) $f(0)=f(0+2)=f(2)=5$，$f(3)=f(1+2)=f(1)=2$，$f(-5)=f(-5+6)=f(1)=2$.

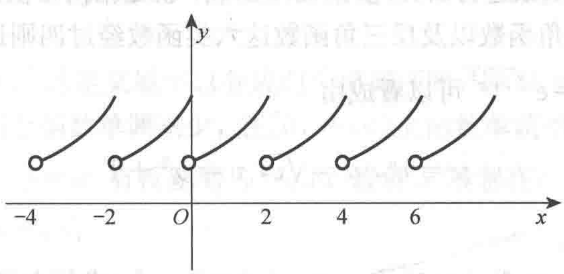


图 1.10

注 并非每个周期函数都有最小正周期. 例如常值函数 $y=0(x\in\mathbf{R})$，容易证明它是一个周期函数，且任何一个实数 r 都是它的周期. 因为不存在最小的正实数，所以它没有最小正周期.