

胡金德 谭泽光 梁 恒 考研数学系列

2018 考研数学 重点突破

220 题

(数学三)

清华大学 胡金德
清华大学 谭泽光 主 编
清华大学 梁 恒

新增100道重点试题 + 配套试题讲解



- 考研数学 **公式小宝典** (数学三)
- 手机轻松扫一扫, 重点难点 **名师微课讲解** 全知道



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

胡金德 谭泽光 梁 恒 考研数学系列

2018 考研数学 重点突破

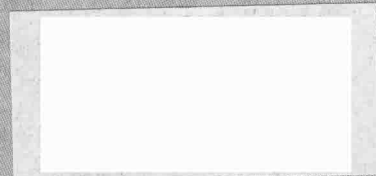
220 题

(数学三)

清华大学 胡金德

清华大学 谭泽光 主编

清华大学 梁 恒



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书可供报考 2018 年研究生入学考试(数学三)的考生在冲刺阶段使用。根据考研数学三真题的题型和题量分布情况,本书最终确定:微积分题占 53%,线性代数题占 25%,概率论与数理统计题占 22%。所有题目及解答均由名师编写和审定,所选题目在题型和难度上紧扣大纲要求,旨在让考生对考研数学三中的重要考点有更加清楚和深刻的认识。

图书在版编目(CIP)数据

2018 考研数学重点突破 220 题. 数学三 / 胡金德, 谭泽光, 梁恒主编. — 北京: 北京航空航天大学出版社, 2017. 5

ISBN 978-7-5124-2411-1

I. ①2… II. ①胡… ②谭… ③梁… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 104692 号

版权所有,侵权必究。

2018 考研数学重点突破 220 题(数学三)

胡金德 谭泽光 梁 恒 主编

责任编辑 宋淑娟

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:bhwaiyu@163.com 邮购电话:(010)82316936

北京宏伟双华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1 092 1/16 印张:18.25 字数:474 千字

2017 年 6 月第 1 版 2017 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5124-2411-1 定价:35.80 元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

前 言

本书专为报考 2018 年研究生入学考试(数学三)的考生在最后冲刺阶段使用。为了使考生能在短时间内对考研数学三重要考点有更加清楚的认识,对考研数学三在试题的难度和做题的速度方面有更加精确的把握,我们通过深入分析考研数学考试大纲的要求以及近年来考研数学三命题的特点和动向,编写了本书。

针对冲刺阶段的特点,本书内容包括微积分、线性代数、概率论与数理统计三大部分,每一部分试题又分为选择题、填空题和解答题三个题型。

本书有如下特点:

一、布局精准,重点突出

针对考研数学三真题的题量分布情况,本书最终确定:微积分题占 53%,线性代数题占 25%,概率论与数理统计题占 22%。

每一部分在选择题、填空题、解答题三种题目类型的设置上同样参考了考研真题的比例,旨在让考生对考研真题的试题比例有一个清晰的认识。

同时,本书在试题涵盖的知识点上也有所侧重,例如:数学三真题中的微积分部分的选择题多为极限求解、导数、二重积分和级数等,而极少出现微分方程的题目。为此,我们在题目的设置上对重点考查的知识点出题较多,而对于极少考到的知识点则出题较少,旨在让考生抓住重点,了解考研试题的动向。

二、题目精良,名师讲解

主编胡金德和谭泽光教授及梁恒副教授均为在清华大学从事几十年数学教学及十多年考研辅导的名师。三位老师均参与过考研大纲的制定、考研数学的命题及阅卷,对考研数学的命题规律和趋势有准确的把握,对试题的讲解详略得当,同时也抓住考生的心理特点,使考生易于接受。

本套书,从全书体例的设定到具体题目的选取均由胡金德、谭泽光和梁恒亲自主持,多人参与,并最终由三位主编定稿。所选题目在题型、难度上紧扣大纲要求。

在题目讲解部分,解题精细,步骤严密,易于考生掌握。另外,在重点的题型和题目之后,三位老师还结合自身多年来的从教经验,给出了独到精辟的总结。

本书附赠《考研数学公式小宝典(数学三)》,以帮助考生熟知公式及其适用范围与条件。

由于时间有限,书中难免有疏漏之处,诚望广大考生批评指正。

祝愿每位考生复习顺利,梦圆考场!

编 者

2017 年 3 月

目录

CONTENTS

习题精选

第一部分 微积分

一、选择题	3
二、填空题	13
三、解答题	16

第二部分 线性代数

一、选择题	24
二、填空题	27
三、解答题	29

第三部分 概率论与数理统计

一、选择题	35
二、填空题	38
三、解答题	39

习题精选答案与解析

第一部分 微积分

一、选择题	47
二、填空题	74
三、解答题	85

第二部分 线性代数

一、选择题	132
二、填空题	140
三、解答题	149

第三部分 概率论与数理统计

一、选择题	181
二、填空题	188
三、解答题	194

后 记	216
-----	-----

习题精选

$$E = \frac{E_c}{a} \int_{-a/l}^{+a/l} \sin(\omega t + \phi) dy$$

$$U = \frac{W_{AB}}{q} = \frac{|E_{PA} - E_{PB}|}{q} = |R_A - R_B|$$

$$m_0 = N \cdot m_0 = \frac{Q}{v_e} = \frac{M_{im}}{N_A}$$

第一部分 微积分

一、选择题

【1】 设 $y = f(x)$ 在区间 I 上有反函数 $\varphi(x)$, 下列说法正确的是 ()

- (A) 若 $f(x)$ 是具有单调性的奇函数, 则 $\varphi(x)$ 也具有同样的性质.
 (B) 若 $f(x)$ 是具有周期性的奇函数, 则 $\varphi(x)$ 也具有同样的性质.
 (C) 若 $f(x)$ 具有有界性或单调性, 则 $\varphi(x)$ 也具有同样的性质.
 (D) 若 $f(x)$ 具有有界性或奇偶性, 则 $\varphi(x)$ 也具有同样的性质.

【2】 条件“对任意给定的 $\epsilon > 0$, 在 $x = a$ 点的 ϵ 邻域 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 内, 总有无穷多个属于数列 $\{x_n\}$ 的点”是极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在的 ()

- (A) 充分但非必要的条件. (B) 必要但非充分的条件.
 (C) 必要且充分的条件. (D) 非必要又非充分的条件.

【3】 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, 定义函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{m \rightarrow \infty} \cos^{2m}(xn! \pi)]$, 则 ()

- (A) $f(x)$ 的定义域为空集. (B) $f(x) = 0$.
 (C) $f(x) = 1$. (D) $f(2) = 1, f(\sqrt{2}) = 0$.

【4】 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则下列极限一定存在的是 ()

- (A) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^a$ (a 为实数). (B) $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$.
 (C) $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x)$. (D) $\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin f(x)$.

【5】 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt, \beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt, \gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是 ()

- (A) α, β, γ . (B) α, γ, β .
 (C) β, α, γ . (D) β, γ, α .

【6】 设函数 $f(x)$ 可导, 且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $y = 2 - x$ 垂直, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 该函数在点 $x = x_0$ 处的增量 Δy 是 ()

- (A) 与 Δx 同阶但不等价的无穷小. (B) 与 Δx 等价的无穷小.
 (C) 比 Δx 高阶的无穷小. (D) 比 Δx 低阶的无穷小.

【7】若函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续,且在 x_0 的某去心邻域中 $f(x) > 0$,则 ()

- (A) $f(x_0) > 0$. (B) $f(x_0) \geq 0$.
 (C) $f(x_0) = 0$. (D) 存在点列 $x_i \rightarrow x_0, \lim_{i \rightarrow +\infty} f(x_i) > 0$.

【8】设 $f(x) = (1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$,则 $f(x)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内 ()

- (A) 有 1 个第二类间断点,没有可去间断点.
 (B) 有 1 个第二类间断点,1 个可去间断点.
 (C) 有 2 个第二类间断点,1 个可去间断点.
 (D) 有 2 个第二类间断点,2 个可去间断点.

【9】下列函数中在 $[1, +\infty)$ 上无界的是 ()

- (A) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$. (B) $f(x) = \sin x^2 + \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$.
 (C) $f(x) = x \cos \sqrt{x} + x^2 e^{-x}$. (D) $f(x) = \frac{\arctan \frac{1}{x}}{x^2}$.

【10】设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处的某个邻域内有定义,则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导的一个充分条件是 ()

- (A) $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[f\left(a + \frac{1}{h}\right) - f(a) \right]$ 存在. (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h}$ 存在.
 (C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$ 存在. (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$ 存在.

【11】设函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有定义,且对 $x \neq 0$ 满足 $|f(x)| \leq x^2$,则 ()

- (A) $f(0) = 0$. (B) $f(x)$ 在 $x = 0$ 点连续但不可导.
 (C) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = o(x)$. (D) $f(x)$ 在 $x = 0$ 点可导,且 $f'(0) = 0$.

【12】设 $g(x)$ 二阶连续可导, $g(0) = 1, g'(0) = -1$,若 $f(x) = \begin{cases} g(x) - e^x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则 ()

- (A) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,但不可导.
 (B) $f'(0)$ 存在但 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.
 (C) $f'(0)$ 存在且 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.
 (D) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

【13】已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导,且 $f(0) = 0$,则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ ()

(A) $-2f'(0)$.

(B) $-f'(0)$.

(C) $f'(0)$.

(D) 0.

【14】 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内存在二阶导数, 且 $f(x) = f(-x)$, 当 $x < 0$ 时有 $f'(x) < 0, f''(x) > 0$, 则当 $x > 0$ 时, 有 ()

(A) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$.

(B) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$.

(C) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$.

(D) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$.

【15】 若当 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f''(t) dt$ 的导数与 x^2 是等价无穷小(其中 f 有二阶连续导数), 则必有 ()

(A) $f''(0) = 1$.

(B) $f''(0) = \frac{1}{2}$.

(C) $f''(0) = 0$.

(D) $f''(0)$ 不存在.

【16】 设 $y = \sin^4 x + \cos^4 x$, 则 ()

(A) $y^{(n)} = 4^{n-1} \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right), n \geq 1$.

(B) $y^{(n)} = 4^n \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right), n \geq 1$.

(C) $y^{(n)} = 4^{n-1} \sin\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right), n \geq 1$.

(D) $y^{(n)} = 4^n \sin\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right), n \geq 1$.

【17】 设 $f(x) = \sin x(\sin x - 1)(\sin x - 2) \cdots (\sin x - n + 1)(\sin x - n)$, 则 $f'(0) =$ ()

(A) n .

(B) $n!$.

(C) $(-1)^n n$.

(D) $(-1)^n n!$.

【18】 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^4} = -2$, 则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处 ()

(A) 不可导.

(B) 可导且 $f'(a) \neq 0$.

(C) 有极大值.

(D) 有极小值.

【19】 函数 $f(x) = (x^2 - 2x - 3) |x^2 - 3x| \sin|x|$ 不可导点的个数是 ()

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

【20】 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f'(1) = 0, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}$, 则 ()

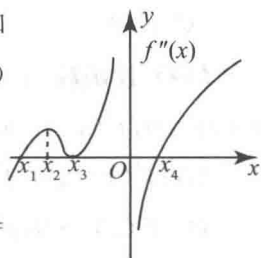
(A) $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $(1, f(1))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点坐标.

(D) $f(1)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(1, f(1))$ 也不是曲线 $f(x)$ 的拐点坐标.

【21】 函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其二阶导函数的图形如右图所示, 则 $y = f(x)$ 的拐点的个数是 ()



- (A) 1. (B) 2.
(C) 3. (D) 4.

【22】 设 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处满足 $f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0, f^{(n+1)}(0) > 0$, 则 ()

- (A) 当 n 为偶数时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.
(B) 当 n 为偶数时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.
(C) 当 n 为奇数时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.
(D) 当 n 为奇数时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

【23】 设两函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都在 $x = a$ 处取得极大值, 则 $F(x) = f(x)g(x)$ 在 $x = a$ 处 ()

- (A) 必取极大值. (B) 必取极小值.
(C) 不可能取极值. (D) 是否取得极值不能确定.

【24】 设函数 $f(x)$ 有连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f'(x)}{1 - e^{-x}} = 1$, 则当 $f(0) = 0$ 时 ()

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值. (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.
(C) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值. (D) 不能判定 $f(0)$ 是否为极值.

【25】 若 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上二阶可导, 且 $f(a) = A > 0, f'(a) < 0, f''(x) < 0$ ($x > a$), 则方程 $f(x) = 0$ 在 $(a, +\infty)$ 内 ()

- (A) 没有实根. (B) 有两个实根.
(C) 有无穷多个实根. (D) 有且仅有一个实根.

【26】 设 $f(x)$ 可导, 且导函数 $f'(x) = x(x-1)^2(x-3)^3$, 则 $f(x)$ 的全部极小值点是 ()

- (A) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$. (B) $x_2 = 1, x_3 = 3$.
(C) $x_2 = 1$. (D) $x_3 = 3$.

【27】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, $f(a) = f(b), f'(b) > 0$, 则 ()

- (A) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) < 0$.
(B) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.
(C) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) > 0$.

(D) 存在 $\xi, \zeta \in (a, b), \xi \neq \zeta$, 使得 $f'(\xi) = f'(\zeta) = 0$.

【28】假设雨滴为球状体, 且在雨滴形成过程中保持球状. 如果雨滴聚集水量的速率与其表面积成正比, 比例系数为常数 C , 则雨滴半径 $r(t)$ 的增长速率 ()

- (A) 与雨滴体积的立方根成正比. (B) 与雨滴表面积平方根成正比.
(C) 与雨滴球体的半径成正比. (D) 是常数 C .

【29】下列函数中在区间 $[-a, a] (a > 0)$ 上有原函数的函数是 ()

- (A) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & x > 0. \end{cases}$ (B) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0, \\ \sqrt{x} - 1, & x > 0. \end{cases}$
(C) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ \sqrt{x} + 1, & x > 0. \end{cases}$ (D) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & x > 0. \end{cases}$

【30】设在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0$, 令 $S_1 = \int_a^b f(x) dx$, $S_2 = f(b)(b-a), S_3 = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$, 则 ()

- (A) $S_1 < S_2 < S_3$. (B) $S_2 < S_1 < S_3$.
(C) $S_3 < S_1 < S_2$. (D) $S_2 < S_3 < S_1$.

【31】函数 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\cos t} \cos t dt$ ()

- (A) 为正数. (B) 为负数. (C) 恒为零. (D) 不是常数.

【32】已知 $f(\pi) = 2, \int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 5$, 则 $f(0)$ 等于 ()

- (A) 2. (B) 3. (C) 5. (D) 不确定.

【33】设 $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - f(-x)] =$ ()

- (A) $\frac{2}{\sqrt{3}}\pi$. (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}\pi$. (C) 0. (D) π .

【34】设 $f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上. 以下错误命题是 ()

- (A) 若 $f(x)$ 可积, 则在 $[a, b]$ 上 $\int_a^x f(t) dt$ 连续.
(B) 若 $f(x)$ 连续, 则在 $[a, b]$ 上 $\int_a^x f(t) dt$ 可导.
(C) 若 $f(x)$ 连续, 则在 $[a, b]$ 上 $\left[\int_a^x f(t) dt \right]' = f(x)$.
(D) 若 $f(x)$ 可导, 则在 $[a, b]$ 上 $\left[\int_a^x f'(t) dt \right]' = f'(x)$.

【35】 设 $\int_a^b f(x)dx = 0$, 且在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$, 则在 $[a, b]$ 上 ()

- (A) $f(x) \equiv 0$. (B) $f(x)$ 存在唯一零点.
 (C) $f(x)$ 存在有限多个零点. (D) $f(x)$ 存在无限多个零点.

【36】 若 $G(x) = \int_x^{x+\pi} \ln(1 + \cos^2 x) \cos 2x dx$, 则 ()

- (A) $G(x) = 0$. (B) $G(x) > 0$.
 (C) $G(x) < 0$. (D) $G(x)$ 可正可负.

【37】 函数 f 在 $[a, b]$ 上非负连续, 则极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_a^b f^n(x) dx \right]^{\frac{1}{n}} =$ ()

- (A) 1. (B) 0. (C) $\max_{a \leq x \leq b} f(x)$. (D) $\min_{a \leq x \leq b} f(x)$.

【38】 设函数 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(x) |\sin nx| dx =$ ()

- (A) $2 \int_0^\pi f(x) dx$. (B) $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx$.
 (C) $\frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(x) dx$. (D) 不存在.

【39】 设 $f(x)$ 一阶可导, $f(x) > 0, f'(x) > 0$, 则当 $\Delta x > 0$ 时 ()

- (A) $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt > f(x) \Delta x > 0$. (B) $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt < f(x) \Delta x < 0$.
 (C) $f(x) \Delta x > \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt > 0$. (D) $f(x) \Delta x < \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt < 0$.

【40】 旋轮线的一支 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$ 的质心是 ()

- (A) $(\pi a, \frac{4}{3} a)$. (B) $(\pi a, \frac{2}{3} a)$.
 (C) $(\pi a, \frac{5}{4} a)$. (D) $(\pi a, \frac{7}{4} a)$.

【41】 方程 $\int_0^x \sqrt{1+t^2} dt + \int_{\cos x}^0 e^{-t^2} dt = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有 n 个根, 则 $n =$ ()

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

【42】 设在区间 $[0, 1]$ 上的连续函数 $f(x) \geq 0$, 若曲线 $y = f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上构成的曲边梯形的面积为 1, 其重心坐标为 $(\frac{1}{2}, 1)$, 则积分 $\int_0^1 x^3 f(x^2) dx =$ ()

- (A) 1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{1}{8}$.

【43】 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ ()

(A) 发散.

(B) 收敛, 且其值为 $\frac{\pi}{2}$.

(C) 收敛, 且其值为 0.

(D) 收敛, 且其值为 $-\frac{\pi}{2}$.

【44】 下列广义积分发散的是 ()

(A) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$.

(B) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

(C) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

(D) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

【45】 下列关于反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 的命题:

① 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内连续的奇函数, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$.

② 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-k}^k f(x) dx$ 存在, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 必收敛, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-k}^k f(x) dx.$$

③ 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$ 都发散, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) + g(x)] dx$ 未必发散.

④ 若 $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ 与 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 都发散, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 未必发散. 其中真命题的个数是

(A) 1 个.

(B) 2 个.

(C) 3 个.

(D) 4 个.

【46】 设 k 为常数, 则极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2 \sin ky}{x^2 + y^4}$ ()

(A) 等于 0.

(B) 等于 $\frac{1}{2}$.

(C) 不存在.

(D) 存在与否与 k 取值有关.

【47】 已知 $f_x(x_0, y_0)$ 存在, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0 - h, y_0)}{h} =$ ()

(A) $f_x(x_0, y_0)$.

(B) 0.

(C) $2f_x(x_0, y_0)$.

(D) $\frac{1}{2}f_x(x_0, y_0)$.

【48】 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件是 ()

(A) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0$.

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$.

(C) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x,0) - f'_x(0,0)] = 0$ 且 $\lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(0,y) - f'_y(0,0)] = 0$.

【49】下列命题正确的是 ()

(A) 若 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极值点, 则 (x_0, y_0) 必为 $f(x, y)$ 的驻点.

(B) 若 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的驻点, 则 (x_0, y_0) 必为 $f(x, y)$ 的极值点.

(C) 若 (x_0, y_0) 为有界闭区域 D 上连续的函数 $f(x, y)$ 在 D 内部唯一的极值点, 且 $f(x, y)$ 在该点取极大值, 则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得它在 D 上的最大值.

(D) 若 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极小值, 则 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处取极小值, $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处取极小值.

【50】设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义且有界 ()

(A) 若 $\varphi_1(x, y) = \sqrt{|xy|} f(x, y)$, 则 $d\varphi_1(0, 0) = 0$.

(B) 若 $\varphi_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} f(x, y)$, 则 $d\varphi_2(0, 0) = 0$.

(C) 若 $\varphi_3(x, y) = [1 - \cos(|x| + |y|)] f(x, y)$, 则 $d\varphi_3(0, 0) = 0$.

(D) 若 $\varphi_4(x, y) = \sin(|x| + |y|) f(x, y)$, 则 $d\varphi_4(0, 0) = 0$.

【51】设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x + z = yf(x^2 - z^2)$ 确定, 则 $z \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ ()

(A) x . (B) y . (C) z . (D) $yf(x^2 - z^2)$.

【52】设隐函数 $y = f(x)$ 由方程 $y = F(x^2 + y^2) + F(x + y)$ 确定, F 可微, 且 $f(0) = 1$, $F'(1) = \frac{1}{2}$, 则 $f'(0) =$ ()

(A) -2 . (B) -1 . (C) 0 . (D) 1 .

【53】设 $0 < R < 1$, 则二重积分 $I = \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{1 + \sin xy} d\sigma$ 等于 ()

(A) $4 \iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq R^2 \\ x > 0, y > 0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{1 + \sin xy} d\sigma$. (B) $2 \iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq R^2 \\ x > 0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{1 + \sin xy} d\sigma$.

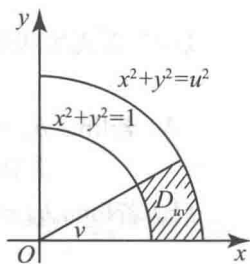
(C) $4 \iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq R^2 \\ x > 0, y < 0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{1 + \sin xy} d\sigma$. (D) 0 .

【54】 $\int_{-1}^1 dx \int_{\frac{x-1}{2}}^1 (|x| + y) dy =$ ()

(A) 4 . (B) 2 . (C) 1 . (D) 0 .

【55】 设函数 f 连续, 若 $F(u, v) = \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, 其中区域

D_{uv} 为右图中阴影部分, 则 $\frac{\partial F}{\partial u} =$ ()



(A) $vf(u^2)$. (B) $\frac{v}{u}f(u^2)$.

(C) $vf(u)$. (D) $\frac{v}{u}f(u)$.

【56】 设 $I_1 = \iint_D \frac{x+y}{4} dx dy$, $I_2 = \iint_D \sqrt{\frac{x+y}{4}} dx dy$, $I_3 = \iint_D \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}} dx dy$, 其中 D 由不等式 $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$ 确定, 则 ()

(A) $I_2 < I_3 < I_1$. (B) $I_1 < I_2 < I_3$.

(C) $I_3 < I_1 < I_2$. (D) $I_3 < I_2 < I_1$.

【57】 设 $p_n = \frac{a_n + |a_n|}{2}$, $q_n = \frac{a_n - |a_n|}{2}$, $n = 1, 2, \dots$, 则下列命题正确的是 ()

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛.

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛.

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定.

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定.

【58】 设 $u_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛, 则下列结论正确的是 ()

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 发散. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 收敛.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛.

【59】 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 常数 $\lambda \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(n \tan \frac{\lambda}{n} \right) a_{2n}$ ()

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.

(C) 发散. (D) 敛散性与 λ 有关.

【60】对无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 下列命题成立的是 ()

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 中至少有一个收敛.

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 中至少有一个发散.

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

【61】设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则 ()

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.

(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.

(D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

【62】设有 $u_n, a_n = \frac{|u_n| + u_n}{2}, b_n = \frac{|u_n| - u_n}{2} (n = 1, 2, \dots)$, 则 ()

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

【63】设 $0 < a_n < \frac{1}{n} (n = 1, 2, 3, \dots)$, 则下列级数中肯定收敛的是 ()

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

(C) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\ln n}$.

(D) $\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \ln n$.

【64】已知函数 $y = y(x)$ 是一阶微分方程初始值问题 $\begin{cases} y' = x + ay, \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的解, 则级数