“希望杯”数学竞赛系列丛书

周国镇 ◎主编

HOPE
希望杯
全国数学邀请赛
since 1990

张海英 等◎编著

希望杯

数学能力培训教程

高二（第3版）

象出版社
na Meteorological Press

“希望杯”数学竞赛系列丛书

周国镇◎主编

希望杯

数学能力培训教程

高二（第3版）

张海英 等◎编著

气象出版社
China Meteorological Press

图书在版编目(CIP)数据

“希望杯”数学能力培训教程. 高二/张海英等编著. —3 版.
—北京:气象出版社,2014. 6
(“希望杯”数学竞赛系列丛书)
ISBN 978-7-5029-5955-5

Ⅰ. ①希… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①中学数学课-高中-教学
参考资料 Ⅳ. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 125931 号

“Xiwangbei” Shuxue Nengli Peixun Jiaocheng. Gaoer(Di-3 Ban)

“希望杯”数学能力培训教程 · 高二(第 3 版)

张海英 等◎编著

出版发行:气象出版社	
地　　址:北京市海淀区中关村南大街 46 号	**邮政编码**:100081
总 编 室:010-68407112	**发 行 部**:010-68409198
网　　址:http://www.cmp.cma.gov.cn	**E-mail**:qxcbs@cma.gov.cn
责任编辑:邵　华	**终　　审**:章澄昌
封面设计:符　赋	**责任技编**:吴庭芳
责任校对:华　鲁	
印　　刷:三河市鑫利来印装有限公司	
开　　本:720 mm×960 mm　1/16	**印　　张**:15. 5
字　　数:260 千字	
版　　次:2014 年 6 月第 3 版	**印　　次**:2014 年 6 月第 1 次印刷
印　　数:1～5000	**定　　价**:28. 00 元

前 言

这套教程充分注意了中小学数学教学大纲，力求充分体现“希望杯”的特色，为中小学师生提供系统、全面、实用的数学内容、思想和方法，以“鼓励学好课本知识，适当拓宽知识面，激发学习数学的兴趣和热情，培养科学的思维能力、创新能力和实践能力”。

本教程中所有原始的素材都来源于历届“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题，这些题目中的绝大多数是由“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的专家们命题，其余则是由全国各地数学命题的研究人员编制。这些题目不但贴近现行的中小学数学课本，而且很有启发性、思考性和趣味性，寓科学于趣味之中，寓知识、能力的考查于数学的美育之中。学习和研究这些题目不仅能使学习者对数学课本的理解、掌握和应用能力达到高水平，并且能实实在在地提高科学思维素质，而这种素质对于有效地学习任何知识都是必需的。正因为如此，历届“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题被多方人士看好：中考、高考命题人员经常从中吸取营养；有远见的数学教师从中选取大量资料，来充实和丰富教学内容；众多的数学教育和培训机构则用来作为教材的主要内容。最有说服力的是千千万万的中小学生，正是通过对“希望杯”试题的学习、研究，提高了水平，大大加强了学数学的兴趣和信心，他们的数学素养明显地不同于没有接触过“希望杯”的学生们。值得一提的是，北大、清华等著名高校以及远赴国外大学的众多学子中有不少人，在中小学时代，都曾有参加过“希望杯”全国数学邀请赛并且获奖的经历。

“希望杯”全国数学邀请赛从 1990 年开始举办，至今已举办 25 届中学组比赛。25 年来，参赛的初一、初二、高一、高二这四个年级，每个年级的试题、培训题累计超过 3000 个，四个年级的题目则累计近 1.2 万个，几乎覆盖了中学数学的全部以及中学数学课本以外的很多内容，不仅如此，而且蕴涵了丰富的数学思想和方法。从 1993 年开始，至今已举办 12 届小学组比赛，四、五、六级的试题、培训题累计也近 5000 个。若要将这些题目全部做一遍，对于一位数学教师来说，确也值得和可能，但是，对于一名学生，则难度就很大了。因此，如何从中提取最精彩、最重要的部分，按数学内容的系统整理出来，就非常必要。这套教程正是做了这样一件事：它从每个年级的试题中各精选了 1/5 左右，分为若干个专题，对每个专题，给出了

相关的必备知识,再详细分析若干个题目,然后安排做少量的题,通过这样一个过程,一个专题就拿下来了。一个个专题,陆续学下来,中小学数学的最主要的内容、思想和方法也就能熟悉和掌握,数学功底必然大大地得到加强。

考虑到大部分中小学生只是希望能很好地掌握学校里数学课本上的内容,另一方面又有不少中小学生并不满足于此,他们对课本以外的数学也有强烈的求知欲,所以我们的教程分课本以内(基础篇)和课本以外(提高篇)两部分。前者占教程的大部分,后者只占教程的小部分。

这套教程由气象出版社于2005年12月开始出版,此后多次重印,包括高一、高二,初一、初二,小学四、五、六年级,共七册。该教程在内容上贴近新的中小学数学教学大纲,更突出对科学思维能力的培养,而且在行文上力求简明易懂。

随着“希望杯”试题的不断更新和学校数学教学的需要,本教程将逐年修订,不断优化,力求将教、学和应试三者融为一体。衷心希望本套教程能引导更多的中小学生走向热爱数学、掌握数学的成功道路。

这套教程的作者主要是“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的成员,有的作者是多年带领学生参加“希望杯”全国数学邀请赛,并对“希望杯”试题深有研究的数学教师。

真诚地欢迎读者指出书中不妥之处。

周国镇

2014年6月10日

注:**周国镇** 数学教育专家,1991年创办《数理天地》杂志并担任杂志社社长兼总编;中国优选法统筹法与经济数学研究会常务理事,数学教育委员会主任;1991年创办“希望杯”全国数学邀请赛,一直是组委会第一负责人,并兼秘书长、命题委员会主任。2010年,与美国加州大学伯克利分校合作创办了世界数学团体锦标赛(World Mathematics Team Championship),担任组委会主席。

目　录

第一部分　基础篇

第二部分　提高篇

第一部分　基础篇

第 1 讲　不等式的性质

一、知识提要

1. 符号法则

$a-b>0 \Leftrightarrow a>b$;

$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$;

$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$.

从上三式可知，比较两个实数的大小，只要比较它们的差与 0 的大小关系即可.

2. 不等式的性质

(1) 对称性：$a>b \Leftrightarrow b<a$.

(2) 传递性：$a>b, b>c \Rightarrow a>c$.

(3) 可加性：$a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$.

(4) 可乘性：$a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$；$a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$.

(5) 加法法则：$a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$.

(6) 乘法法则：$a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$.

(7) 乘方法则：$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

(8) 开方法则：$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b} (n \in \mathbf{N}^*)$.

3. 若 $a>0,b>0$,则 $\dfrac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$;

若 $a>0,b>0$,则 $\dfrac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$;

若 $a<0,b<0$,则 $\dfrac{a}{b}>1\Leftrightarrow a<b$;

若 $a<0,b<0$,则 $\dfrac{a}{b}<1\Leftrightarrow a>b$.

二、例题

1. 作差法

例 1. 设 $x=\arcsin(\cos 1)$,$y=\arccos(\sin 2)$,$z=\arctan(\cot 3)$,$u=\operatorname{arccot}(\tan 4)$,则 x,y,z,u 从小至大按顺序排列应为(　　)

(A)x,y,z,u.　　　　(B)z,y,x,u.

(C)x,y,u,z.　　　　(D)u,x,z,y.

第 12 届(2001 年)高二培训题

解:因为
$$0<1<\frac{\pi}{2}<2<3<\pi<4<\frac{3\pi}{2},$$
故
$$x=\arcsin(\cos 1)=\arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right]=\frac{\pi}{2}-1,$$
$$y=\arccos(\sin 2)=\arccos\left[\cos\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\right]=2-\frac{\pi}{2},$$
$$z=\arctan(\cot 3)=\arctan\left[-\tan\left(3-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{2}-3,$$
$$u=\operatorname{arccot}(\tan 4)=\operatorname{arccot}\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2}-4\right)\right]=\frac{3\pi}{2}-4.$$
作差,得
$$x-y>0,y-z>0,u-x>0.$$
所以
$$x>y,y>z,u>x.$$
故　$z<y<x<u$,选(B).

2. 判别式法

例 2. 已知 $0\leqslant x\leqslant 1$,$a=\arcsin(\cos x)$,$b=\cos(\arcsin x)$,则(　　)

(A)$a>b$.　　(B)$b>a$.　　(C)$a=b$.

(D) 当 $0 \leqslant x < \frac{\pi}{4}$ 时，取(A)；当 $\frac{\pi}{4} < x \leqslant 1$ 时，取(B)；当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时，取(C).

第 11 届(2000 年) 高二培训题

解：由 $0 \leqslant x \leqslant 1$，知

$$\frac{1}{2} < \cos 1 \leqslant \cos x \leqslant 1, 0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

所以 $$\frac{\pi}{6} < \arcsin(\cos x) \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \cos(\arcsin x) \leqslant 1.$$

猜想：$\arcsin(\cos x) > \cos(\arcsin x)$，即　$a > b$，得

$$\cos x > \sin\sqrt{1-x^2}, \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > \sin\sqrt{1-x^2},$$

所以 $$\frac{\pi}{2} - x > \sqrt{1-x^2},$$

即 $$2x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4} - 1 > 0. \tag{*}$$

又 $$\Delta_x = 8 - \pi^2 < 0,$$

所以(*)恒成立.

易知，当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时以上各步均可逆，

所以　$a > b$ 成立，故选(A).

3. 不等式性质的应用

例 3. 已知 $0 < a < b$，$x = \sqrt{a+b} - \sqrt{b}$，$y = \sqrt{b} - \sqrt{b-a}$，则 x，y 的大小关系是______.

第 11 届(2000 年) 高二第 1 试

解：因为 $$x = \sqrt{a+b} - \sqrt{b} = \frac{a}{\sqrt{a+b} + \sqrt{b}},$$

$$y = \sqrt{b} - \sqrt{b-a} = \frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{b-a}}.$$

由 $0 < a < b$，得 $$\sqrt{a+b} > \sqrt{b-a} > 0.$$

由不等式性质，得 $$\sqrt{a+b} + \sqrt{b} > \sqrt{b-a} + \sqrt{b} > 0.$$

因此，$\frac{a}{\sqrt{a+b} + \sqrt{b}} < \frac{a}{\sqrt{b-a} + \sqrt{b}}$，即　$x < y$.

例 4. 设 a，b，c 均为正数，若 $\frac{c}{a+b} < \frac{a}{b+c} < \frac{b}{c+a}$，则 a，b，c 的大小关系是(　　)

(A) $c < a < b$.　　　　(B) $b < c < a$.

(C)$a<b<c$.　　　　(D)$c<b<a$.

第19届(2008年)高二培训题

解:由已知,得

$$\frac{a+b}{c}>\frac{b+c}{a}>\frac{c+a}{b},$$

即
$$\frac{a+b}{c}+1>\frac{b+c}{a}+1>\frac{c+a}{b}+1,$$

$$\frac{a+b+c}{c}>\frac{b+c+a}{a}>\frac{c+a+b}{b},$$

所以
$$c<a<b.$$

故选(A).

4. 利用函数单调性

例5. 已知 $x=\left(\sin\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}}$,$y=\left(\cos\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}}$,$z=\left(\sin\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}}$,则 x,y,z 的大小顺序为(　　)

(A)$x<z<y$.　(B)$x<y<z$.　(C)$z<y<x$.　(D)$y<z<x$.

第12届(2001年)高二培训题

解:因为
$$\frac{\pi}{6}>\frac{1}{2}>0,$$

所以
$$0<\sin\frac{1}{2}<\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}<\cos\frac{1}{2}<1,$$

所以
$$\log_{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}>1>\log_{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}>0,$$

从而有
$$x<z,y>z,$$

即　$x<z<y$,故选(A).

例6. 设 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$,则 $(\sin\theta)^{\sin\theta}$,$(\sin\theta)^{\cos\theta}$,$(1-\cos\theta)^{\sin\theta}$,$(1-\cos\theta)^{\cos\theta}$ 中,最小的是(　　)

(A)$(\sin\theta)^{\sin\theta}$.　　　　(B)$(1-\cos\theta)^{\sin\theta}$.

(C)$(1-\cos\theta)^{\cos\theta}$.　　　　(D)$(\sin\theta)^{\cos\theta}$.

第22届(2011年)高二培训题

解:当 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 时,

$$0<\sin\theta<\cos\theta<1\text{ 总成立},$$

于是有
$$0<1-\cos\theta<1,$$

又 $$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),0<\theta<\frac{\pi}{4},$$

则 $$1<\sin\theta+\cos\theta<\sqrt{2},1-\cos\theta<\sin\theta,$$

因此 $$(\sin\theta)^{\sin\theta}>(\sin\theta)^{\cos\theta}>(1-\cos\theta)^{\cos\theta},$$

$$(1-\cos\theta)^{\sin\theta}>(1-\cos\theta)^{\cos\theta},$$

由上可知,最小的是$(1-\cos\theta)^{\cos\theta}$,故选(C).

5. 图像法

例 7. 设 a,b,c 依次是方程 $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)=x,\log_2(x+2)=\sqrt{-x},2^x+x-2=0$ 的根,则 a,b,c 的大小关系是(　　)

(A)$b<c<a$.　　(B)$a<c<b$.

(C)$b<a<c$.　　(D)$c<b<a$.

第 5 届(1994 年)高二第 2 试

解:如图 1-1,函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 与 $y=x-2$ 的图像交点的横坐标 $a>1$;

如图 1-2,函数 $y=\log_2(x+2)$ 与 $y=\sqrt{-x}$ 的图像交点的横坐标 $b<0$;

如图 1-3,函数 $y=2^x$ 与 $y=-x+2$ 的图像交点的横坐标 $0<c<1$.

综上,知　$b<c<a$,故选(A).

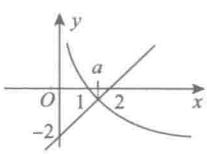

图 1-1

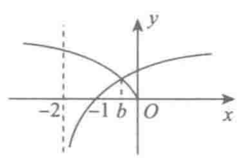

图 1-2

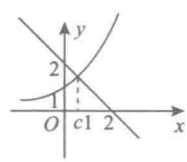

图 1-3

6. 参数问题

例 8. 设 $a>b>c,n\in\mathbf{N}$,且$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{n}{a-c}$恒成立,则 n 的最大值为(　　)

(A)2.　　(B)3.　　(C)4.　　(D)5.

第 11 届(2000 年)高二第 1 试

解:原不等式$\Leftrightarrow\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}\geqslant n$.

所以 $$n\leqslant\left[\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}\right]_{\min},$$

而 $$\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}=2+\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geqslant4\left(\text{由 } y=x+\frac{1}{x}\text{ 的值域得}\right),$$

且当 $2b=a+c$ 时,不等式左边的值等于 4.

所以
$$\left[\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}\right]_{\min}=4.$$
因此,n 的最大值是 4,故选(C).

三、习题

1. 若 $a^{1995}<a^{1994}<a^{1996}$,则一定有(　　)

(A)$a>1$.　　(B)$a<-1$.　　(C)$-1<a<0$.　　(D)$0<a<1$.

第 6 届(1995 年)高二第 1 试

2. 在 $3,\sqrt{5}^{\sqrt{2}},\sqrt{2}^{\sqrt{5}}$ 三个数中,最小的是______.

第 5 届(1994 年)高二第 1 试

3. 设 $f(x)=1+3\log_x 2$,$g(x)=2\log_x 3$,$x>0$,且 $x\neq 1$,若 $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{8x^2-17x+9}>1$,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系是______.

第 11 届(2000 年)高二培训题

4. 已知不等于 1 的正数 a,b,又 $\theta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$,且 $a^{\tan\theta}>b^{\tan\theta}>1$,则下列不等式中成立的是(　　)

(A)$b>a>1$.　　(B)$a>b>1$.

(C)$0<a<b<1$.　　(D)$0<b<a<1$.

第 10 届(1999 年)高二培训题

5. 设 $0<x<\frac{1}{2}$,$\alpha=\arcsin x$,$\beta=\arcsin(1-x)$,$\gamma=\arccos(x-1)$,则(　　)

(A)$\alpha<\beta<\gamma$.　　(B)$\alpha<\gamma<\beta$.

(C)$\beta<\gamma<\alpha$.　　(D)$\beta<\alpha<\gamma$.

第 6 届(1995 年)高二第 1 试

6. 已知 $a>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 且 $a\neq 1$,$x=|\log_a 2|$,$y=\log_{a+1}2$,$z=\log_{a+2}2$,则 x,y,z 的大小顺序是______.

第 10 届(1999 年)高二培训题

答案·提示

题号	1	2	3	4	5	6
答案	B	$\sqrt{2}^{\sqrt{5}}$	$f(x)<g(x)$	C	A	$x>y>z$

提示

1. $a^{1995}<a^{1994}$，即 $a^{1994}(a-1)<0$，故　$a<1$.　①

$a^{1994}<a^{1996}$，即 $a^{1994}(1-a^2)<0$，故　$a<-1$ 或 $a>1$.　②

由 ①、②，知 $a<-1$，故选(B).

2. 由 $\frac{5}{4}<2$，得
$$\frac{\sqrt{5}}{2}<\sqrt{2},2^{\frac{\sqrt{5}}{2}}<2^{\sqrt{2}},$$
即
$$\sqrt{2}^{\sqrt{5}}<2^{\sqrt{2}}<\sqrt{5}^{\sqrt{2}}.$$
又
$$(\sqrt{2}^{\sqrt{5}})^2=2^{\sqrt{5}}<2^3=8<3^2,$$
即
$$\sqrt{2}^{\sqrt{5}}<3.$$
因此，$\sqrt{2}^{\sqrt{5}}$ 最小.

3. 由已知不等式解得　$1<x<\frac{9}{8}$，

所以
$$f(x)-g(x)=1+\frac{1}{\log_{\frac{8}{9}}x}<0,$$
即
$$f(x)<g(x).$$

4. 可用图像法，易得 $0<a<b<1$，故选(C).

5. 由 $0<x<\frac{1}{2}$，得
$$\frac{1}{2}<1-x<1,-1<x-1<-\frac{1}{2}.$$
因此，$0<\alpha<\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{6}<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{2\pi}{3}<\gamma<\pi$，故选(A).

6. 当 $a<1$ 时，$x=\dfrac{1}{\log_2\dfrac{1}{a}}$，$y=\dfrac{1}{\log_2(a+1)}$，$z=\dfrac{1}{\log_2(a+2)}$，

且
$$1<\frac{1}{a}<a+1<a+2;$$

当 $a>1$ 时，$x=\dfrac{1}{\log_2 a}$，$y=\dfrac{1}{\log_2(a+1)}$，$z=\dfrac{1}{\log_2(a+2)}$，

且
$$1<a<a+1<a+2.$$

综上，知
$$x>y>z.$$

第 2 讲　均值不等式

一、知识提要

1. 对于任意的 $a,b\in\mathbf{R}$，恒有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时等号成立）.

2. 对于任意的正数 a,b，恒有$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时等号成立），通常称为二元均值定理，其中$\dfrac{a+b}{2}$称为 a,b 的算术平均数，$\sqrt{ab}$ 称为 a,b 的几何平均数.

3. 对于任意的 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，则有

$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$（当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立）.

(1) 如果和 $a_1+a_2+\cdots+a_n=S$ 为常数，那么，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，积 $a_1a_2\cdots a_n$ 有最大值$\left(\dfrac{S}{n}\right)^n$.

(2) 如果积 $a_1a_2\cdots a_n=p$ 为常数，那么，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 有最小值 $n\cdot\sqrt[n]{p}$.

4. 在利用均值不等式求多元函数的最值时，可从“和为定值”（或“积为定值”）这一角度入手凑配，但要注意三条：

(1) 每个元必须为正值；(2) 和（或积）为定值；(3) 等号能成立.

5. 如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^*$，记

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

$$H_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},Q_n=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}},$$

则有 $H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant Q_n$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立).

其中 A_n,G_n,H_n,Q_n 依次称为 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的算术平均数、几何平均数、调和平均数和平方平均数.

6. 基本不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 可转化为以下几种形式

(1)$a,b\in\mathbf{R},a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}(a+b)^2$.

(2)$a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}^*,\frac{a^2}{b}\geqslant 2a-b$.

(3)$a,b\in\mathbf{R}^*,\frac{a}{b^2}\geqslant\frac{2}{b}-\frac{1}{a}$.

(4)$a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}^*,\frac{a}{b}(a-b)\geqslant a-b$.

(5)$a,b\in\mathbf{R},\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

(6)$a,b\in\mathbf{R},-\frac{a^2+b^2}{2}\leqslant ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$.

当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

7. 如果 $a,b\in\mathbf{R}^*,0<m<1$,那么 $\frac{a^2}{m}+\frac{b^2}{1-m}\geqslant(a+b)^2$.

推广:$a,b,c\in\mathbf{R}^*,0<m_1,m_2,m_3<1$ 且 $m_1+m_2+m_3=1$,

则
$$\frac{a^2}{m_1}+\frac{b^2}{m_2}+\frac{c^2}{m_3}\geqslant(a+b+c)^2.$$

二、例题

1. 基本不等式

例 1. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a=2,b=2\sqrt{2}$,则 $\angle A$ 的取值范围是______.

第 14 届(2003 年)高二培训题

解: 由余弦定理得