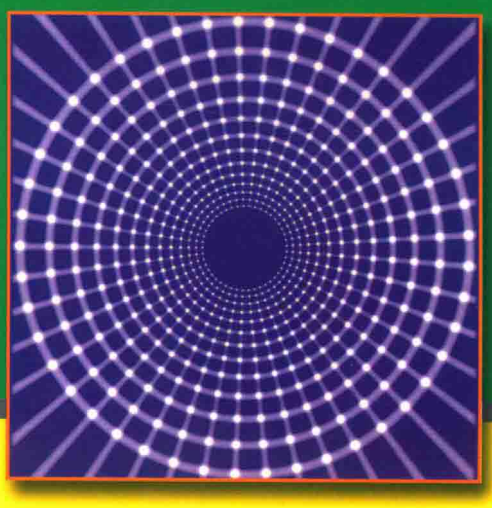
中学数学拓展丛书

数学眼光透视

Shuxue Yanguang Toushi

第2版

沈文选　杨清桃　著





数学眼光，使我们看到世界万物充满着带有数学印记的奇妙的科学规律，看到各类书籍和文章的字里行间有着数学的踪迹，使我们看到满眼绚丽多彩的数学洞天！

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

需要全本请访问 www.ertongbook.com

● 中学数学拓展丛书

本册书是湖南省教育厅科研课题《教育数学的研究》（编号06C510）成果之二

数学眼光透视

Shuxue Yanguang Toushi

第2版

沈文选　杨清桃　著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书共分十章:第一章寻究的眼光,第二章洞察的眼光,第三章搜索的眼光,第四章敏锐的眼光,第五章思悟的眼光,第六章和谐的眼光,第七章神韵的眼光,第八章奇异的眼光,第九章辩证的眼光,第十章战略的眼光.

本书可作为高等师范院校教育学院、教师进修学院数学专业及国家级、省级中学数学骨干教师培训班的教材或教学参考书,是广大中学数学教师及数学爱好者的数学视野拓展读物.

图书在版编目(CIP)数据

数学眼光透视/沈文选,杨清桃著. —2 版. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.6

(中学数学拓展丛书)

ISBN 978-7-5603-6500-8

Ⅰ.①数… Ⅱ.①沈…②杨… Ⅲ.①中学数学课-教学参考资料 Ⅳ.①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 048348 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 聂兆慈
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 31.5 字数 787 千字
版 次 2008 年 1 月第 1 版 2017 年 6 月第 2 版
2017 年 6 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-6500-8
定 价 78.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

⊙序

我和沈文选教授有过合作，彼此相熟. 不久前，他发来一套数学普及读物的丛书目录，包括数学眼光、数学思想、数学应用、数学模型、数学方法、数学史话等，洋洋大观. 从论述的数学课题来看，该丛书的视角新颖，内容充实，思想深刻，在数学科普出版物中当属上乘之作.

阅读之余，忽然觉得公众对数学的认识很不相同，有些甚至是彼此矛盾的. 例如：

一方面，数学是学校的主要基础课，从小学到高中，12 年都有数学；另一方面，许多名人在说“自己数学很差”的时候，似乎理直气壮，连脸也不红，好像在宣示：数学不好，照样出名.

一方面，说数学是科学的女王，“大哉数学之为用”，数学无处不在，数学是人类文明的火车头；另一方面，许多学生说数学没用，一辈子也碰不到一个函数，解不了一个方程，连相声也在讽刺“一边向水池注水，一边放水”的算术题是瞎折腾.

一方面，说“数学好玩”，数学具有和谐美、对称美、奇异美，歌颂数学家的“美丽的心灵”；另一方面，许多人又说，数学枯燥、抽象、难学，看见数学就头疼.

数学，我怎样才能走近你，欣赏你，拥抱你？说起来也很简单，就是不要仅仅埋头做题，要多多品味数学的奥秘，理解数学的智慧，抛却过分的功利，当你把数学当作一种文化来看待的时候，数学就在你心中了.

我把学习数学比作登山，一步步地爬，很累，很苦. 但是如果你能欣赏山林的风景，那么登山就是一种乐趣了.

登山有三种意境.

首先是初识阶段. 走入山林，爬得微微出汗，坐拥山色风光. 体会“明月松间照，清泉石上流”的意境. 当你会做算术，会记账，

能够应付日常生活中的数学的时候，你会享受数学给你带来的便捷，感受到好似饮用清泉那样的愉悦.

其次是理解阶段. 爬到山腰，大汗淋漓，歇足小坐. 环顾四周，云雾环绕，满目苍翠，心旷神怡. 正如苏轼名句："横看成岭侧成峰，远近高低各不同. 不识庐山真面目，只缘身在此山中." 数学理解到一定程度，你会感觉到数学的博大精深，数学思维的缜密周全，数学的简洁，你会对符号运算能够有爱不释手的感受. 不过，理解了，还不能创造. "采药山中去，云深不知处." 对于数学的伟大，还莫测高深.

最后是登顶阶段. 攀岩涉水，越过艰难险阻，到达顶峰的时候，终于出现了"会当凌绝顶，一览众山小"的局面. 这时，一切疲乏劳顿、危难困苦，全都抛到九霄云外. "雄关漫道真如铁"，欣赏数学之美，是需要代价的. 当你破解了一道数学难题，"蓦然回首，那人却在灯火阑珊处"的意境，是用语言无法形容的快乐.

好了，说了这些，还是回到沈文选先生的丛书. 如果你能静心阅读，它会帮助你一步步攀登数学的高山，领略数学的美景，最终登上数学的顶峰. 于是劳顿着，但快乐着.

信手写来，权作为序.

张奠宙
2016 年 11 月 13 日
于沪上苏州河边

附　文

（文选先生编著的丛书，是一种对数学的欣赏. 因此，再次想起数学思想往往和文学意境相通，年初曾在《文汇报》发表一短文，附录于此，算是一种呼应）

数学和诗词的意境

张奠宙

数学和诗词，历来有许多可供谈助的材料. 例如：

一去二三里，烟村四五家.
亭台六七座，八九十枝花.

把十个数字嵌进诗里，读来琅琅上口. 郑板桥也有咏雪诗：

一片二片三四片，五片六片七八片.
千片万片无数片，飞入梅花总不见.

诗句抒发了诗人对漫天雪舞的感受. 不过，以上两诗中尽管嵌入了数字，却实在和数学没有什么关系.

数学和诗词的内在联系，在于意境. 李白《送孟浩然之广陵》诗云：

需要全本请访问 www.ertongbook.com

故人西辞黄鹤楼，烟花三月下扬州.
孤帆远影碧空尽，唯见长江天际流.

数学名家徐利治先生在讲极限的时候，总要引用“孤帆远影碧空尽”这一句，让大家体会一个变量趋向于0的动态意境，煞是传神.

近日与友人谈几何，不禁联想到初唐诗人陈子昂《登幽州台歌》中的名句：

前不见古人，后不见来者.
念天地之悠悠，独怆然而涕下.

一般的语文解释说：上两句俯仰古今，写出时间绵长，第三句登楼眺望，写出空间辽阔，在广阔无垠的背景中，第四句描绘了诗人孤单寂寞、悲哀苦闷的情绪，两相映照，分外动人. 然而，从数学上来看，这是一首阐发时间和空间感知的佳句. 前两句表示时间可以看成是一条直线（一维空间）. 陈老先生以自己为原点，前不见古人指时间可以延伸到负无穷大，后不见来者则意味着未来的时间是正无穷大. 后两句则描写三维的现实空间：天是平面，地是平面，悠悠地张成三维的立体几何环境. 全诗将时间和空间放在一起思考，感到自然之伟大，产生了敬畏之心，以至怆然涕下. 这样的意境，数学家和文学家是可以彼此相通的. 进一步说，爱因斯坦的四维时空学说，也能和此诗的意境相衔接.

贵州六盘水师专的杨老师告诉我他的一则经验. 他在微积分教学中讲到无界变量时，用了宋朝叶绍翁《游园不值》中的诗句：

春色满园关不住，一枝红杏出墙来.

学生每每会意而笑. 实际上，无界变量是说，无论你设置怎样大的正数 M，变量总要超出你的范围，即有一个变量的绝对值会超过 M. 于是，M 可以比喻成无论怎样大的园子，变量相当于红杏，结果是总有一枝红杏越出园子的范围. 诗的比喻如此恰切，其意境把枯燥的数学语言形象化了.

数学的研究和学习需要解题，而解题过程需要反复思索，终于在某一时刻出现顿悟. 例如，做一道几何题，百思不得其解，突然添了一条补助线，问题豁然开朗，欣喜万分. 这样的意境，想起了王国维用辛弃疾的词来描述的意境：“众里寻他千百度，蓦然回首，那人却在灯火阑珊处.”一个学生，如果没有经历过这样的意境，数学大概是学不好的了.

⊙前言

音乐能激发或抚慰情怀，绘画使人赏心悦目，诗歌能动人心弦，哲学使人获得智慧，科技可以改善物质生活，但数学却能提供以上的一切.

——Klein

如果没有一些数学知识，那么就是对最简单的自然现象也很难理解什么，而要对自然的奥秘做更深入的探索，就必须要同时地发展数学.

——J. W. A. Young

如果一个人要领会钻研数学的兴奋，他必须做数学奥秘的热忱学生.

——R. D. Carmichael

人们喜爱音乐，因为它不仅有神奇的乐谱，而且有悦耳的优美旋律！

人们喜爱画卷，因为它不仅描绘出自然界的壮丽，而且可以描绘人间美景！

人们喜爱诗歌，因为它不仅是字词的巧妙组合，而且有抒发情怀的韵律！

人们喜爱哲学，因为它不仅是自然科学与社会科学的浓缩，而且增加人的智慧！

人们喜爱科技，因为它不仅是一个伟大的使者或桥梁，而且是现代物质文明的标志！

而数学之为德，数学之为用，难以用旋律、美景、韵律、智慧、标志等词语来表达！

你看，不是吗？

数学精神，科学与人文融合的精神，它是一种理性精神！一种求简、求统、求实、求美的精神！数学精神似一座光辉的灯塔，指引数学发展的航向！数学精神似雨露阳光滋润人们的心田！

数学眼光，使我们看到世间万物充满着带有数字印记的奇妙的科学规律，看到各类书籍和文章的字里行间有着数学的踪迹，使我们看到的是满眼绚丽多彩的数学洞天！

数学思想，使我们领悟到数学是用字母和符号谱写的美妙乐曲，充满着和谐的旋律，让人难以忘怀，难以割舍；让我们在思疑中启悟，在思辨中省悟，在体验中领悟！

数学方法，人类智慧的结晶，它是人类的思想武器！它像画卷一样描绘着各学科的异草奇葩般的景象，令人目不暇接！它的源头又是那样地寻常！

数学解题，人类学习与掌握数学的主要活动，它是数学活动的一个兴奋中心；数学解题理论博大精深，提高其理论水平是永远的话题！

数学技能，在数学知识的学习过程中逐步形成并发展的一种大脑操作方式，它是一种智慧；是数学能力的一种标志！操握数学技能是应达到的一种基础性目标！

数学应用，给我们展示出了数学的神通广大，在各个领域与角落闪烁着人类智慧的火花！

数学建模，呈现出了人类文明亮丽的风景！特别是那呈现出的抽象彩虹——一个个精巧的数学模型，璀璨夺目，流光溢彩！

数学竞赛，许多青少年喜爱的一种活动，这种数学活动有着深远的教育价值！它是选拔和培养数学英才的重要方式之一.这种活动可以激励青少年对数学学习的兴趣，可以扩大他们的数学视野，促进创新意识的发展.数学竞赛中的专题培训内容展示了数学竞赛亮丽的风采！

数学测评，检验并促进数学学习效果的重要手段，测评数学的研究是教育数学研究中的一朵奇葩.测评数学的深入研究正期待着我们！

数学史话，充满了诱人的前辈们创造与再创造的心血机智，让我们可以从中汲取丰富的营养！

数学欣赏，对数学喜爱的情感的流淌，这是一种数学思维活动的崇高情感表达，数学欣赏，引起心灵感撼！真、善、美在欣赏中得到认同与升华，从数学欣赏中领略数学智慧的美妙，从数学欣赏走向数学鉴赏，从数学文化欣赏走向数学文化研究！

因此，我们可以说，你可以不信仰上帝，但不能不信仰数学.

从而，提高我国每一个人的数学文化水平及数学素养，是提高中华民族的整体素质的重要组成部分，这也是数学基础教育中的重要目标.为此，笔者构思了这套书.

这套书是笔者学习张景中院士的教育教学思想，对一些数学素材和数学研究成果进行再创造并以此为指导思想来撰写的；是献给中学师生，企图为他们扩展数学视野、提高数学素养以响应张奠宙教授的倡议：构建符合时代需求的充满数学常识，数学智慧的书籍.

不积小流无以成江河，不积跬步无以至千里，没有积累便没有丰富的素材，没有整合创新便没有鲜明的特色.这套书的写作，是笔者在多年资料的收集、学习笔记的整理及笔者已发表的文章的修改并整合的基础上完成的.因此，每册书末都列出了尽可能多的参考文献，在此，衷心地感谢这些文献的作者.

这套书，作者试图以专题的形式，对中小学中典型的数学问题进行广搜深掘来串联，并以此为线索来写作.

本册书是《数学眼光透视》.

数学眼光，是寻究的眼光，它使我们从熟悉的数学对象中获得蕴藏其中的美妙结论！

数学眼光，是洞察的眼光，它使我们从简单的数学对象中探求到丰富多彩的数学信息！

数学眼光，是搜索的眼光，它使我们对问题的方方面面有进一步的了解.例如，可给出勾股定理的数百种证法！

数学眼光，是敏锐的眼光，它使我们从茫茫的数字林海中采摘到无数的奇花异果！

数学眼光，是思悟的眼光，它使我们在思虑中启悟，在思疑中省悟，在思索中感悟.它使我们悟到：方程——未知中的已知，极限——无限中的有限，概率——偶然中的必然，图形——抽象中的形象……

数学眼光，是和谐的眼光，它使我们发现各种各样的数学对象中的紧密的内在联系，以及在现实万象中察析出各种现象均与数学有着密切的联系！

数学眼光，是神韵的眼光，它使我们在中国古典诗词以及艺术甚至人生中发现数学神奇的韵律！

数学眼光，是奇异的眼光，它使我们从大自然中领悟数学奥妙，从千姿百态的事件中寻求出数学法则！

数学眼光，是辩证的眼光，它使我们从数学中的几对矛盾体中看清数学的本质！

数学眼光，是战略的眼光，它使我们从宏观与微观的不同角度到数学的奇妙天地中去体味数学，学习数学，开垦数学，发展数学！

数学的眼光是神奇的，它会使人眉头紧锁，辗转反侧，寝食难安；它也会使人茅塞顿开，拍案叫绝，心悦狂欢！

数学的眼光是深沉的，它使我们看问题入木三分，明察秋毫.在浓缩的空间关系中，在组合的数量关系中，使我们看到数学现象的魔光幻影、神秘莫测，以及数学的知识、思想、方法在我们生活中的应用.

数学的眼光是迷人的，这眼光似空谷中的幽兰，高寒中的杜鹃，老林中的人参，冰山上的雪莲，悬崖上的灵芝，抽象思维的牡丹，魔力般地召唤数学爱好者、数学工作者辛勤耕耘，在数学的王国里寻芳采猎，艰苦跋涉，今日攻破昨日的猜想，明天冲击今天的悬案，推动着人类社会的进步和发展！这怎么不令人心驰神往，流连忘返？这怎么不令人情有独钟，苦心钻研？

这眼光永远是充满魅力的利具，永远是人类进取精神的充电器，永远是对人类智慧挑战的应战戟！

让我们透视数学眼光！让我们用数学眼光透视吧！

沈文选　杨清桃

2017年3月于岳麓山下

目录
CONTENTS

第一章　寻究的眼光

1.1　九九乘法表 …… 1
1.1.1　从九九乘法表可以发现的事实 …… 1
1.1.2　从九九乘法表的个位数的排列所得的结论 …… 2
1.1.3　九九乘法表中——数与周围数字的关系 …… 2
1.2　一元二次方程的求根公式 …… 6
1.2.1　公式①所体现的数学美 …… 6
1.2.2　对方程的求解产生的新认识 …… 7
1.2.3　一元二次方程的其他求根公式 …… 12
1.2.4　一元二次函数 …… 12
1.2.5　一元三次函数 …… 13
1.3　三角形的内角和定理 …… 24
1.3.1　凸 n 边形的外角和 …… 24
1.3.2　平面多边形中的欧拉公式 …… 25
1.3.3　立体几何中的欧拉公式 …… 26
1.3.4　正多面体只有五种 …… 26
1.4　勾三股四弦五〈3,4,5〉 …… 27
1.4.1　〈3,4,5〉的图形表示 …… 28
1.4.2　由〈3,4,5〉到勾股弦数组〈a,b,c〉的求法 …… 29
1.4.3　勾股弦数组的有趣性质 …… 37
1.4.4　由〈3,4,5〉联想到广义勾股弦数组 …… 39
1.4.5　由〈3,4,5〉联想到高维勾股弦数组 …… 46
思考题 …… 47
思考题参考解答 …… 49

第二章　洞察的眼光

2.1　从不同的角度看同一个数学对象 …… 58
2.1.1　把一个图形看成两个重合的图形 …… 58
2.1.2　从旋(或翻)转的角度看同一个图 …… 59
2.1.3　对同一个算式中的项进行恰当的排列重组 …… 60
2.2　方格图中的代数等式(公式) …… 62
2.2.1　划分方格图获得自然数方幂和或乘积和的有关求和公式 … 62
2.2.2　划分方格图填数获得自然数方幂和的有关求和公式 …… 70

目录 CONTENTS

2.2.3 划分正三角形利用重心原理证明自然数方幂和公式 …… 76
2.2.4 格点路径法证明组合恒等式 …… 78
2.3 图形分割中的计数公式 …… 81
2.3.1 点分割线段及射线分割角(小于平角的角) …… 81
2.3.2 直线分割平面或圆面 …… 82
2.4 三角形三边所在直线上的三点问题 …… 82
2.4.1 三角形三边所在直线上的三点组成的三角形 …… 82
2.4.2 三角形三边所在直线上的点与顶点连线围成的三角形 … 85
2.4.3 梅涅劳斯定理与塞瓦定理的统一推广 …… 86
2.5 二元一次方程组的求解 …… 88
2.5.1 求解过程及结论的字母符号表示 …… 88
2.5.2 求解公式的推广 …… 89
2.6 从一道等差数列问题的求解谈起 …… 90
2.6.1 问题及其求解 …… 90
2.6.2 一些联想 …… 92
2.7 直线方程 $x_0x+y_0y=r^2$ 的几何意义 …… 96
思考题 …… 107
思考题参考解答 …… 107

第三章 搜索的眼光

3.1 勾股定理的证明 …… 112
3.1.1 图形出入相补 …… 112
3.1.2 图形面积推算 …… 121
3.1.3 相似图形推演 …… 127
3.1.4 其他图形或性质推导 …… 134
3.2 两正数的算术与几何平均值不等式 …… 137
3.2.1 寻证明,多思路 …… 138
3.2.2 谈运用,有角度 …… 154
3.2.3 析变式,广应用 …… 156
3.2.4 深推广,宽联想 …… 161
3.3 蝶形探微 …… 180
3.3.1 蝶形的性质及应用 …… 180
3.3.2 蝴蝶定理种种 …… 183
3.4 点到直线距离公式的推导 …… 196
思考题 …… 206
思考题参考解答 …… 207

第四章 敏锐的眼光

4.1 从哥德巴赫猜想谈起 …… 221
4.2 神奇的数表 …… 222
4.2.1 奇妙的数字宝塔 …… 222
4.2.2 奇妙的数型 …… 226
4.3 排队数 …… 227

需要全本请访问 www.ertongbook.com

目录
CONTENTS

4.4 回文数 …… 234
4.5 可拆素数,顺次可拆素数 …… 235
4.6 奇妙的多边形数 …… 236
4.6.1 三角形数的奇妙性质 …… 238
4.6.2 多边形数的和 …… 239
4.7 平方数 …… 240
4.7.1 平方数的计算 …… 240
4.7.2 平方数的特性 …… 241
4.7.3 平方数变换 …… 243
4.7.4 连写数平方数 …… 244
4.7.5 连续平方数数组 …… 244
4.7.6 重写数平方数 …… 246
4.7.7 一个数表示为平方数之和 …… 247
4.8 平方舞伴数 …… 248
4.9 自生数 …… 249
4.10 亲和数 …… 250
4.11 完全数 …… 252
4.12 梅森数 …… 255
4.13 费马数 …… 257
4.14 等幂和数 …… 258
4.14.1 神奇的和 …… 258
4.14.2 规律在探索中展现 …… 259
4.14.3 认识在规律中升华 …… 260
4.14.4 揭开神奇的和的面纱 …… 261
4.14.5 欲穷千里目,更上一层楼 …… 262
4.15 轮环整除数 …… 263
4.16 黑洞数 …… 264
4.17 水仙花数(Randle 数)或回归数(方幂和数) …… 267
思考题 …… 269
思考题参考解答 …… 271

第五章 思悟的眼光

5.1 在变化中看到不变 …… 280
5.2 在不同中看到相同 …… 281
5.3 在近似中看到精确 …… 283
5.4 在模糊中看到清晰 …… 284
5.5 在量变中看到质变 …… 286
5.6 在抽象中看到具体 …… 287
5.6.1 数学式子的实际背景显意义 …… 288
5.6.2 数学概念的现实模具助理解 …… 288
5.6.3 数学结论求解的具体表示助沟通 …… 288

目录 CONTENTS

5.7 从偶然中发现必然 …… 291
5.7.1 素数7,11,13的美妙特性 …… 291
5.7.2 反常约分 …… 291
5.7.3 行列式的一条有趣性质 …… 294
5.7.4 解题中一般方法的发现 …… 295
5.8 从平凡中发现奇异 …… 297
5.8.1 三角形中的一个点 …… 298
5.8.2 恒等式 $A=\frac{2kA}{2k}=\frac{\alpha A}{\alpha}$ …… 299
5.9 从紊乱中归纳条理 …… 301
5.10 从无序中找到规律 …… 302
5.11 从混沌中发现秩序 …… 304
5.12 从对象的随机性中感悟到其内部的确定性 …… 306
思考题 …… 308
思考题参考解答 …… 309

第六章 和谐的眼光

6.1 三角形内心与旁心的统一 …… 313
6.1.1 三角形内心定理、旁心定理的统一证明 …… 313
6.1.2 三角形内心与旁心有关结论的转换 …… 314
6.2 五条定理用圆串,勾股定理把线牵 …… 317
6.3 三角形、圆与三角理论 …… 320
6.4 杨辉三角——数学联系的充分体现 …… 321
6.4.1 杨辉三角数字排列的一些性质 …… 322
6.4.2 杨辉三角与斐波那契数列 …… 326
6.4.3 杨辉三角与三角倍角公式 …… 326
6.4.4 杨辉三角与九宫图 …… 329
6.4.5 杨辉三角与纵横路线图 …… 331
6.4.6 杨辉三角与谢尔宾斯基衬垫 …… 331
6.4.7 杨辉三角与分形 …… 332
6.4.8 杨辉三角与概率 …… 333
6.4.9 杨辉三角与黄金均值 …… 333
6.5 勾股弦数邂逅斐波那契数 …… 334
6.5.1 四个连续的斐波那契数与勾股弦数 …… 334
6.5.2 五个连续的斐波那契数与勾股弦数 …… 336
6.5.3 若干个连续的斐波那契数与勾股弦数 …… 336
6.6 数学概念的普遍联系 …… 337
6.6.1 以从属关系为桥梁的联系 …… 338
6.6.2 以合成关系为纽带的联系 …… 339
6.6.3 以对应关系为媒介的联系 …… 340
6.6.4 以对偶形式为基础的联系 …… 342
6.7 自然现象与数学的联系 …… 344
6.7.1 节律现象与数学 …… 344
6.7.2 磨光现象与数学 …… 346

6.7.3 全息现象与数学 …… 347
思考题 …… 350
思考题参考解答 …… 351

第七章 神韵的眼光

7.1 数学问题的智慧处理 …… 356
7.1.1 在数学解题中 …… 356
7.1.2 在数学研究中 …… 358
7.2 语言与文学问题的数学处理 …… 359
7.2.1 律诗中的平仄与格律 …… 359
7.2.2 2进制与格律诗及词牌的记忆 …… 361
7.2.3 诗词中的修辞手法 …… 362
7.2.4 寓言的寓意 …… 363
7.2.5 英语数词中的字母赋值 …… 364
7.3 艺术问题的数学处理 …… 365
7.3.1 数学与音乐 …… 365
7.3.2 数学与形体 …… 367
7.4 人生问题的数学处理 …… 369
7.4.1 人生坐标系与名言 …… 369
7.4.2 人生最美好的年华 …… 369
7.4.3 人生“算术” …… 371
思考题 …… 373
思考题参考解答 …… 374

第八章 奇异的眼光

8.1 自然现象中的惊奇 …… 378
8.1.1 植物中的数学撷趣 …… 378
8.1.2 自然界中的数学模式 …… 379
8.2 数学中的奇异美 …… 383
8.2.1 三角式中的奇异美 …… 383
8.2.2 算术中的奇异美 …… 383
8.2.3 几何中的奇异美 …… 384
8.2.4 代数中的奇异美 …… 385
8.3 奇妙的黄金概念 …… 387
8.3.1 黄金比 …… 387
8.3.2 黄金图形种种 …… 388
8.3.3 特殊图形中的黄金分割点 …… 392
附录Ⅰ 亚黄金椭圆 …… 400
附录Ⅱ 亚黄金双曲线 …… 402
附录Ⅲ 白银椭圆 …… 407
附录Ⅳ 白银双曲线 …… 410
思考题 …… 413
思考题参考解答 …… 413

目录
CONTENTS

目录 CONTENTS

第九章 辩证的眼光

9.1 已知与未知 …… 425
9.1.1 以字母代未知数——从算术到代数 …… 425
9.1.2 由已知,找可知,逐步靠拢未知——综合法 …… 427
9.1.3 由未知,找须知,逐步靠拢已知——分析法 …… 428
9.2 常量与变量 …… 428
9.2.1 常量与变量的相依性 …… 429
9.2.2 常量与变量的相对性 …… 429
9.2.3 通过常量来描述刻画变量 …… 430
9.2.4 通过变量研究常量 …… 432
9.3 等与不等 …… 432
9.3.1 在数学解题中 …… 433
9.3.2 在数学思维中 …… 436
9.4 直与曲 …… 438
9.4.1 曲线具有渐近线部分的特征 …… 438
9.4.2 非线性问题线性化 …… 438
9.4.3 直线与曲线在微分学中最终等同起来 …… 439
9.5 有限与无限 …… 440
9.5.1 有限与无限的质的差异 …… 440
9.5.2 数学中有限与无限的联系与转化 …… 441
9.6 连续与不连续 …… 445
9.6.1 连续与离散 …… 445
9.6.2 连续与间断 …… 446
思考题 …… 446
思考题参考解答 …… 446

第十章 战略的眼光

10.1 宏观的思考方式 …… 450
10.1.1 整体审视 …… 450
10.1.2 积零为整 …… 452
10.1.3 整体变换 …… 453
10.2 灵活的实施技巧 …… 455
10.2.1 实现战术任务 …… 455
10.2.2 化整为零 …… 456
10.2.3 局部调整 …… 457
10.2.4 关注变形技巧 …… 458
思考题 …… 459
思考题参考解答 …… 459
参考文献 …… 462
作者出版的相关书籍与发表的相关文章目录 …… 465
编后语 …… 468

第一章　寻究的眼光

永远不要放弃你对“熟悉”的好奇心，也许新的发现就在你的再寻究之中.

有些东西，你早已学过，对其也非常熟悉了，以为早已明白了它的特性. 但如果回过头来用数学眼光仔细察看一番，寻根究底问一问，也许还会有新的发现，新的收获呢！寻究的眼光使我们从熟悉的对象中获得新发现.

1.1　九九乘法表

从小学 2 年级就开始了解并学习九九乘法表了，随着我们数学知识的丰富，思维能力的提高，寻究眼光的放开，从这样一个早已熟悉的对象中，还能发现什么数学事实和结论吗？我们首先仔细察看一下表 1.1 吧！

表 1.1

A　　D

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

B　　C

1.1.1　从九九乘法表可以发现的事实

从九九乘法表，我们可以得到如下结论：

结论 1　九九乘法表呈现出乘法的交换律. 从关于对角线 AC 对称的位置得

$$a \cdot b = b \cdot a$$

结论 2　九九乘法表呈现出乘法的运算法则. 如果一个乘数增加 1，则其积增加 1 份另一个乘数，即

$$a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a$$

结论 3　九九乘法表呈现出乘法对加法的分配律. $a + b$ 行的数字与 a 行数字及 b 行数字之和相等，即

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

结论 4　2,3,5,9 的倍数具有其特性，2 的倍数的末位数字为 0,2,4,6,8，这可从表 1.1

的第二行看出;3 的倍数其各数位上的数字和为3,6,9,亦即3 的1,2,3 倍,这可从表1.1 的第三行看出;5 的倍数其末位数字为 0 或 5,这可从表 1.1 的第五行看出.

从第九行的数字可以看出,个位与十位数的和总等于 9,这是因为 $9 \cdot n = 10(n-1) + (10-n)$,即第九行的十位数是 $n-1$,个位数是 $10-n$,所以 $(n-1)+(10-n)=9$. 由此,还可以得到更一般的"一个自然数被 9 整除的充要条件是这个数的各位数字的和是 9 的倍数."

1.1.2 从九九乘法表的个位数的排列所得的结论

我们先列出九九乘法表的个位数表如表 1.2 所示.

表 1.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	8	7	6	5	4	3	2	1

结论 5 九九乘法表中个位数的数字关于对角线对称.

从表 1.2 知,$a \cdot b$ 关于对角线 AC 对称的数字是 $b \cdot a$,而 $a \cdot b$ 关于对角线 BD 对称的数字是 $(10-b)\cdot(10-a)$,展开得 $(10-b)\cdot(10-a) = 100 - 10(a+b) + a \cdot b$,所以其个位上的数字相等.

结论 6 九九乘法表中个位数关于 10 互补的两行或两列的个位数成互逆排列. 例如

第三行的个位数字是: 3 6 9 2 5 8 1 4 7

第七行的个位数字是: 7 4 1 8 5 2 9 6 3

这是因为第 n 行(或 n 列)的数字是 $n \cdot m$,而第 $10-n$ 行(或 $10-n$ 列)的逆排的数字是 $(10-n)\cdot(10-m)$,展开得 $(10-n)\cdot(10-m) = 100 - 10(n+m) + n \cdot m$,所以 n 行(或 n 列)与 $10-n$ 行(或 $10-n$ 列)的个位数字具有互逆排列关系. 由结论 6 又可推得如下的结论:

结论 7 个位数字表成中心对称,其对称中心为表的中心(即对角线 AC 与 BD 的交点),每行(或列)的数字和成轴对称,其对称轴为第五行(或第五列).

1.1.3 九九乘法表中——数与周围数字的关系

(1) 表中相邻两行(或列)上的数组成的行列式以及相同行与相同列交叉处的数组成的各阶行列式(即 2 阶、3 阶、4 阶、5 阶、6 阶、7 阶、8 阶、9 阶行列式)其值均为 0.

需要全本请访问 www.ertongbook.com