学数学丛书

学数学

第1卷

李 潜 主编

中国科学技术大学出版社

学数学丛书

学数学

单墫

第1卷

中国科学技术大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

学数学.第1卷/李潜主编.—合肥:中国科学技术大学出版社,2015.4
(学数学丛书)
ISBN 978-7-312-03727-6

Ⅰ.学…　Ⅱ.李…　Ⅲ.数学课—学前教育—教学参考资料　Ⅳ.G613.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第076011号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号,邮编230026
http://press.ustc.edu.cn
http://shop109383220.taobao.com
印刷　合肥华星印务有限责任公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　787 mm×1092 mm　1/16
印张　11.75
字数　264千
版次　2015年4月第1版
印次　2015年4月第1次印刷
印数　1—3500册
定价　25.00元

序

自今年开始,《学数学》以《学数学丛书》的形式,改由中国科学技术大学出版社出版发行。改变出版发行形式后,依然是每个季度出版一册,却可以借助出版社的发行平台和途径,拓宽市场,提升发行量,使得更多的读者获益,也可降低图书成本,实是多赢之举。这一步走得好,它将会使《学数学》办得更好、走得更远、前景更明亮!

《学数学》曾是一份深受读者喜爱的刊物,它来自于数学人,为数学人服务,受数学人支持。《学数学》没有专职编辑人员,几位在职中学教师和一位在读博士研究生,自己组稿,自己编辑,自己联系印刷,还要自办发行,十分辛苦,却又无钱可赚。然而它却办得有声有色,颇具品位。这是一种什么样的精神,一种什么样的境界!这里面除了对数学的热爱,对事业的追求和对工作的高度责任感之外,还能有什么别的解释?

《学数学丛书》以普及中等数学知识为己任,服务于广大的中学数学教师,以及关心和热爱中等数学的其他人群。它面向中学数学教学,却不局限于中学数学教学,它不讨论教材教法,却鼓励对延伸出的中等数学问题作深入的讨论。它的版面生动活泼,报道国内外中学数学界的各种活动,及时发表有关资料。它的内容生动有趣,使人感觉时读时新。李克强总理号召全民阅读,他说:"书籍和阅读是文明传承的重要载体"。《学数学丛书》为全民阅读提供了一份优秀的读物。

数学之于国民经济的重要性不言而喻。对于我们这样一个经济总量已达全球第二的大国而言,提升经济的知识含量,改变经济增长方式,实现经济发展转轨,已经是摆在眼前的任务。拿出更多更好的原创性产品,是中国经济发展的必由之路。任何一项原创性产品的研发和生产都离不开数学!更何况需要持续不断地推出新产品,持续不断地更新换代,没有一代

接一代的科学人的持续不断的努力,何以为继?为了国家,为了民族,我们需要锻造出一批批科学人才,一批批能够坐得住冷板凳、心无旁骛、一心只爱钻研的人,其中包括那些一心痴迷数学的人才。

《学数学丛书》愿为这一目标尽心尽力。

苏 淳

目　录

第四篇 模拟训练

第五篇 探究问题与解答

第一篇　名家讲堂

Ramanujam的一个恒等式

解第30届中国数学奥林匹克试题

把握临界时刻

Ramanujam 的一个恒等式

2013 年亚冠决赛第二回合恒大俱乐部的海报中出现了两个数学公式. 其中之一是

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}. \tag{①}$$

它应当等于 3，即

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}. \tag{②}$$

这是印度天才数学家 Ramanujam(1887—1920)发现的众多恒等式中最著名的一个. 本文介绍两种证法.

设 $a_n=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}$ $(n=1,2,\cdots)$. 问题即证明

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=3. \tag{③}$$

第一种证法

$$\begin{aligned}
&3-a_n\\
&=\frac{3^2-1-2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}{3+\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}\\
&=\frac{4-\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}\right)}\\
&=\frac{4^2-1-3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}\right)\left(4+\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n}}}\right)}\\
&=\frac{5-\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}\right)\frac{1}{3}\left(4+\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n}}}\right)}\\
&=\cdots\cdots\\
&=\frac{(n+1)-\sqrt{1+n}}{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}\right)\cdots\frac{1}{n-1}\left(n+\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}\right)}\\
&=\frac{n+1}{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}\right)\cdots\frac{1}{n}\left(n+1+\sqrt{1+n}\right)}>0.
\end{aligned} \tag{④}$$

并且因为

$$\frac{1}{2}(3+\sqrt{1+2}) \geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

$$\frac{1}{3}(4+\sqrt{1+3}) \geqslant 1+\frac{1}{\sqrt{3}} \geqslant \cdots \geqslant \frac{1}{n}(n+1+\sqrt{1+n}) \geqslant 1+\frac{1}{\sqrt{n}},$$

所以

$$3-a_n \leqslant \frac{n+1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n} \leqslant \frac{n+1}{C_n^3}(\sqrt{n})^3 \leqslant \frac{24}{\sqrt{n}} \to 0(n \to +\infty). \qquad ⑤$$

由式④、式⑤，知式③成立.

注意上面的证明只用到极限的定义，直接估计差 $3-a_n$. 并没有用到任何关于极限的定理(如单调递增且有上界的数列必有极限之类的定理).

第二种证法 因为

$$1+n(n+2)=(n+1)^2,$$

所以

$$\begin{aligned}3&=\sqrt{1+2\times 4}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\times 5}}=\cdots\\&=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n(n+2)}}}}}.\end{aligned} \qquad ⑥$$

由式⑥，显然

$$3>a_n. \qquad ⑦$$

另一方面，对任意 $t>1$，有

$$\sqrt{1+nt} \leqslant \sqrt{t}\sqrt{1+n}, \qquad ⑧$$

所以在式⑥的最右边取 $t=n+2$，并利用式⑧，对层层根号逐步提取出 $t^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{4}}, \cdots$，直至

$$3 \leqslant t^{\frac{1}{2^{n-1}}}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}, \qquad ⑨$$

因此

$$3>a_n \geqslant \frac{3}{(n+2)^{\frac{1}{2^{n-1}}}} \to 3(n \to +\infty). \qquad ⑩$$

从而③成立.

第二种证法用了所谓的“夹逼定理”. 有趣的是它给出了一个等式⑥.

这类求数列极限的问题，一般分为两步，一是证明这个数列的极限存在，二是求出这个极限(当然，有时两步并作一步走). 有些文章没有证明极限的存在性，就令 $y=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}$，然后再形式地建立起关于 y 的关系并从而求出 y. 这种做法是不严密的. 不应提倡. 我们再举一个例子：

设 $x>0$，$a_1=\sqrt{2+x}$，$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2+x}}$，…，$a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}}$ (n 个根号). 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

不正确的解法是“设 $y=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}$，从而 $y=\sqrt{2+y}$，解得 $y=2$.”这是刚学数学分析(微积分)的大学一年级学生易犯的错误.

正确的解法如下：

在 $x\geqslant 2$ 时，$a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}}\geqslant\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+2}}}=2$ 并且

$$x^2\geqslant 2x\geqslant x+2,$$

所以 $x\geqslant\sqrt{2+x}$，$a_n\leqslant a_{n-1}$. 数列$\{a_n\}$单调递减，有下界 2，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在. 这时再令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=y$，则 $y=\sqrt{2+y}$. 解得 $y=2$.

在 $0<x\leqslant 2$ 时，类似地，数列$\{a_n\}$单调递增，有上界 2，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在并且等于 2.

或许有人会说：“Ramanujam 也没有证明数列极限的存在”. 这不能作为理由. 因为 Ramanujam 是一位天才的数学家，能够凭着他的直觉得出很多重要的公式. 但即使是 Ramanujam 的这些公式，如果没有严格的证明，就不能确保它的正确性，同样不能被数学界认可.

单 墫

解第30届中国数学奥林匹克试题

今年的试题粗看似比去年难一些，细看也不尽然.

1. 给定实数 $r\in(0,1)$. 证明：若 n 个复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 满足 $|z_k-1|\leqslant r$ $(k=1,2,\cdots,n)$，则

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\cdot\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_n}\right|\geqslant n^2(1-r^2). \quad ①$$

解析　如果 z_k 是正实数 $x_k(1\leqslant k\leqslant n)$，那么由 Cauchy 不等式，

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$
$$\geqslant\left(\sqrt{x_1\cdot\frac{1}{x_1}}+\sqrt{x_2\cdot\frac{1}{x_2}}+\cdots+\sqrt{x_n\cdot\frac{1}{x_n}}\right)^2=n^2. \quad ②$$

现在 z_k 是复数，不能直接利用 Cauchy 不等式，所得结果式①不及式②强，而且还需要条件

$$|z_k-1|\leqslant r\ (k=1,2,\cdots,n),\quad r\in(0,1). \quad ③$$

先看看条件③的意义.

如图 1，式①表明 z_k 都在以 1 为圆心、以 r 为半径的圆内. 而由于 $r\in(0,1)$，这个圆在右半平面内（y 轴右方）. 从而 z_k 也都在 y 轴右方，即 z_k 的实部 $x_k>0$ $(1\leqslant k\leqslant n)$.

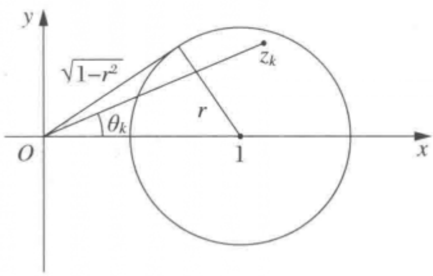

图 1

注意：我们说到了复数 z_k 的**实部**x_k. 熟知复数 z 的模 $|z|\geqslant z$ 的实部 x，并且实部有比模有利得多的性质：若干个复数的和的实部，**等于**这些复数的实部的和. 其中“实部”显然不能改为“模”.

因此，本题的关键就是将模改为实部.

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\geqslant \mathrm{Re}(z_1+z_2+\cdots+z_n)=x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

$\dfrac{1}{z_k}$的实部是什么呢？我们有

$$\operatorname{Re}\frac{1}{z_k} = \operatorname{Re}\frac{\overline{z_k}}{|z_k|^2} = \frac{x_k}{|z_k|^2} = \frac{x_k}{x_k^2}\cos^2\theta_k = \frac{\cos^2\theta_k}{x_k},$$

其中 θ_k 是 z_k 的辐角.

注意图 1 中辐角的绝对值 $|\theta_k| \leqslant \arccos\sqrt{1-r^2}$，即 $\cos\theta_k \geqslant \sqrt{1-r^2}$，所以

$$\operatorname{Re}\frac{1}{z_k} \geqslant \frac{1-r^2}{x_k}(k=1,2,\cdots,n).$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_n}\right| &\geqslant \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_n}\right)\\ &= \operatorname{Re}\frac{1}{z_1}+\operatorname{Re}\frac{1}{z_2}+\cdots+\operatorname{Re}\frac{1}{z_n}\\ &\geqslant (1-r^2)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right).\end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned}&|z_1+z_2+\cdots+z_n|\cdot\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_n}\right|\\ &\geqslant (x_1+x_2+\cdots+x_n)\cdot(1-r^2)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\\ &\geqslant n^2(1-r^2).\end{aligned}$$

本题的关键是想到复数的实部. 想到了它，问题即迎刃而解. 但如果没有这样的"好想法"，一味蛮拼，徒然浪费时间与精力.

2. 如图 2，设 A、B、D、E、F、C 依次是同一个圆上的六个点，满足 $AB=AC$. 直线 AD 与 BE 交于点 P，直线 AF 与 CE 交于点 R，直线 BF 与 CD 交于点 Q，直线 AD 与 BF 交于点 S，直线 AF 与 CD 交于点 T. 点 K 在线段 ST 上，使得 $\angle SKQ=\angle ACE$.

求证：$\dfrac{SK}{KT}=\dfrac{PQ}{QR}$.

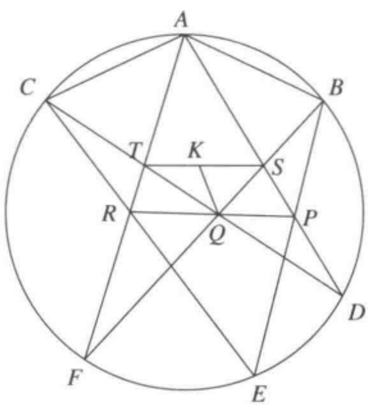

图 2

解析 因为 $AB=AC$，所以 $\overparen{AB}=\overparen{AC}$，$\angle AFB=\angle ADC$，从而 T、F、D、S 四点共圆，$\angle KSQ=\angle TDF=\angle CAR$.

又已知$\angle SKQ=\angle ACE$，所以$\triangle SKQ\backsim\triangle ACR$，则

$$\frac{SK}{QK}=\frac{AC}{RC}. \quad ①$$

同理，由$\angle TKQ=180^\circ-\angle SKQ=180^\circ-\angle ACE=\angle ABE$，得$\triangle TKQ\backsim\triangle ABP$，则

$$\frac{KT}{QK}=\frac{BA}{PB}. \quad ②$$

由式①、式②，得

$$\frac{SK}{KT}=\frac{PB}{RC}. \quad ③$$

于是只需证明

$$\frac{PQ}{QR}=\frac{PB}{RC}. \quad ④$$

为此，可以先改变一下 Q 的定义(后面可以看出现在定义的 Q 就是原来的Q)：设 BF 与PR 的交点为Q（即不要求 Q 在CD 上，而改为 Q 在PR 上），则由$\triangle FQR$ 与$\triangle BPQ$ 的正弦定理（注意$\angle FQR$ 与$\angle BPQ$ 现在是对顶角，相等），得

$$\frac{PQ}{QR}=\frac{PB\sin\angle QBP}{RF\sin\angle RFQ}. \quad ⑤$$

在圆中，仍由正弦定理，得

$$\frac{\sin\angle QBP}{\sin\angle RFQ}=\frac{FE}{AB}=\frac{FE}{AC}. \quad ⑥$$

而$\triangle REF\backsim\triangle RAC$，有

$$\frac{FE}{RF}=\frac{CA}{RC}. \quad ⑦$$

所以，由式⑤、式⑥、式⑦，得

$$\frac{PQ}{RQ}=\frac{PB}{RF}\cdot\frac{FE}{AC}=\frac{PB}{RC}. \quad ⑧$$

同样，设 CD 与PR 相交于Q'，也有

$$\frac{PQ'}{RQ'}=\frac{PB}{RC}. \quad ⑨$$

式⑧和式⑨表明 Q'与 Q 重合. 因此 BF、CD、PR 三线共点，这点就是题中原来定义的点 Q. 并且也就证明了式④成立.

题中给出的三点 P、Q、R 共线. 这结论不需要条件 $AB=AC$ 也可证出. 一般地，对圆内接六边形 $AFBECD$，三对对边的交点 P、Q、R 共线. 这就是著名的帕斯卡（Pascal）定理. 证法很多，例如见《数学竞赛研究教程》（单墫著，江苏教育出版社第三版）下册第32讲例4，证法与上面有类似之处. 现在有条件 $AB=AC$，证明当然简单许多（而且式⑧正是我们需要的）.

3. 给定整数 $n\geqslant 5$. 求最小的整数 m，使得存在两个由整数构成的集合 A、B，同时满足下列条件：

(1) $|A|=n$，$|B|=m$，且 $A\subseteq B$；

(2) 对 B 中任意两个不同的元素 x、y 有：$x+y\in B$ 当且仅当x、$y\in A$.

解析 先取一个五元整数集$\{1,2,3,4,5\}$作为 A 试试.

这时由 $x\in A$，$y\in A$ 相加得出新元素 6、7、8、9，它们（组成集 $A+A$）及 A 中的元素都应当属于B. 但 $3\in B$，$6\in B$，$3+6\in B$，而 $6\notin A$. 与性质 (2) 不合，所以 A 并不能任取.

如果将 A 改成一个公差略大的等差数列（当然不是非等差数列不可，只是为了简单，在尝试而已），例如$\{1,3,5,7,9\}$. 仍然出现矛盾的情况（例如 $4+10=14$，而 4、10 均不在 A 中）.

如果将首项取大一些，就不会如此了. 例如 $A=\{11,12,13,14,15\}$，这时

$$A+A=\{23,24,25,26,27,28,29\}.$$

令

$$B=A\cup(A+A),$$

则 $m=|B|=12$. 这时 B 的任两个不同数的和，如果仍在 B 中，那么和小于 30，只能是 A 中两个数的和，所以现在的 A、B 合乎要求.

一般地，令

$$A=\{a,a+1,a+2,\cdots,a+(n-1)\},a>2n,$$

则

$$A+A=\{2a+1,2a+2,\cdots,2a+(2n-3)\},$$

$B=A\cup(A+A)$符合要求（$a+(2a+1)=3a+1>2a+(2n-3)$，所以条件 (2) 满足）.

这时 $m=|B|=3n-3$.

另一方面，设整数集合

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(a_1<a_2<\cdots<a_n),$$

这时和 $a_i+a_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 共 C_n^2 个（当然其中可能有相等的），即

$$\begin{aligned}a_1+a_2,\ a_1+a_3,\ \cdots,\ &a_1+a_n,\\ a_2+a_3,\ \cdots,\ &a_2+a_n,\\ &\cdots,\\ &a_{n-1}+a_n.\end{aligned}$$

这些数都应当在 B 中，即由条件 (1)、(2)，显然

$$B\supseteq A\cup(A+A).$$

此外，当然可任意放一些大的数，例如 $q,q^2,q^3,\cdots$（正整数 q 远大于$|a_1|$与$|a_n|$）到 B 中，而不影响性质 (2). 但本题要求最小的 m，所以应将 B 限定为

$$B=A\cup(A+A). \qquad ①$$

如果上面的 C_n^2 个和均不相同，且与 A 中的数不同，那么 m 可以取到（式①成立时的）最大值 $m+C_n^2$（例如 $a_1=1$，$a_2=q$，…，$a_n=q^{n-1}$，q 为大于 1 的整数，则由 q 进制的表示唯一，即知 $m=n+C_n^2$）.

最小值呢? 当然希望和中有很多（尽可能多）相同的. 换句话说，看看**和中至少有多少不同的**. 显然 B 中的数

$$a_1+a_2<a_1+a_3<\cdots<a_1+a_n<a_2+a_n<a_3+a_n<\cdots<a_{n-1}+a_n \qquad ②$$

（即前面所列出的 C_n^2 个和中，第一行与最后一列的 $2n-3$ 个数），所以 $m\geqslant 2n-3>n$（B 真包含 A）.

如果这 $2n-3$ 个数与 A 中的数互不相同，那么 $m\geqslant n+(2n-3)=3n-3$，等号在我们前面构造的例子中正好成立.

我们证明当条件（2）成立时，式②中的数均不在 A 中.

首先 A 中的数均不为 0. 否则取 $b\in B\backslash A$，$0+b=b\in B$，但 $b\notin A$，矛盾.

假设 $a_1+a_j\in A$（$2\leqslant j\leqslant n-1$），那么 $a_1+a_j\geqslant a_1$，所以 $a_j>0$.

当 $a_1+a_j\neq a_n$ 时，$(a_1+a_j)+a_n\in B$，所以 $a_1+(a_j+a_n)\in B$. 因为 $a_1\in B$，$a_j+a_n\in B$，所以由条件（2），$a_j+a_n\in A$，但 $a_j+a_n>a_n$，矛盾.

因此，只能是 $a_1+a_j=a_n$. 这时取 a_i 不同于a_1、a_j、a_n，

$$(a_1+a_j)+a_i=a_n+a_i\in B,$$

即 $a_1+(a_i+a_j)\in B$，从而 $a_i+a_j\in A$. 但

$$a_i+a_j>a_1+a_j=a_n,$$

仍然矛盾. 所以 $a_1+a_j\notin A$（$2\leqslant j\leqslant n-1$）.

类似地，$a_n+a_j\in A$（$2\leqslant j\leqslant n-1$）也导致矛盾（这时 $a_j<0$，$a_n+a_j\notin a_1$ 时，$a_1+(a_n+a_j)\in B$，导致 $a_1+a_j\in A$，与 $a_1+a_j<a_1$ 矛盾；$a_n+a_j=a_1$ 时，同上取 a_i，$a_i+(a_n+a_j)\in B$，导致 $a_i+a_j\in A$，与 $a_i+a_j<a_n+a_j=a_1$ 矛盾）.

最后 $a_1+a_n\in A$ 时，设 $a_1+a_n=a_k$，则 $k\notin 1$、n. 取 a_i 不同于a_1、a_k、a_n，则

$$a_i+(a_1+a_n)=(a_i+a_1)+a_n=(a_i+a_n)+a_1\in B,$$

从而 a_i+a_1、$a_i+a_n\in A$. 但 a_i 为正时，$a_i+a_n\notin A$，a_i 为负时，$a_i+a_1\notin A$，矛盾.

从而所求最小值为 $m=3n-3$.

本题要点是考虑形如 $a_1+a_j+a_n$ 的数，利用条件（2）证明 a_1+a_j、$a_n+a_j(2\leqslant j\leqslant n-1)$ 及 a_1+a_n 均不在A 中. 这从开始所举的、成功的实例 $A=\{11,12,13,14,15\}$即可看出端倪. 但证明需要细致、周密，不可有疏漏. $n\geqslant 5$ 可改为 $n\geqslant 4$.

4. 求具有下述性质的所有整数 k：存在无穷多个正整数 n，使得 $n+k$ 不整除 C_{2n}^n.

解析　答案是 $k\neq 1$.

若 $k=1$，则因为对所有正整数 n，

$$C_{2n}^{n+1}=\frac{n}{n+1}C_{2n}^n$$

是整数，所以 $n+1\mid nC_{2n}^n$，而 $n+1$ 与 n 互质，所以 $n+1\mid C_{2n}^n$.

事实上，$\dfrac{1}{n+1}C_{2n}^n$是著名的 Catalan 数，熟知它是整数，而且有很多组合意义.

若 $k\leqslant 0$，取 n，使得 $n+k=2^h$，h 为正整数（即取 $n=2^h-k$）.

用 $s(n)$表示 n 在二进制中的数字和，则 $n!$ 中 2 的幂指数为 $n-s(n)$（例如见单墫著，江苏教育出版社第三版《数学竞赛研究教程》上册第 12 讲例 6）. 因此，C_{2n}^n中 2 的次数为

$$(2n-s(2n))-2(n-s(n))=s(n).$$

因为 $n=2^h+(-k)$，在 h 足够大（$2^h>-k+1$）时，$s(n)=1+s(-k)<h$，所以

$n+k$ 不整除 C_{2n}^{n}.

若 $k>1$，同上，取 n 使 $n+k=2^h$（h 为充分大的正整数）. $n=2^k-k<2^h-1$，所以 $s(n)<h$.

因此，总有 $n+k$ 不整除 C_{2n}^{n}.

在 $k_1\neq 1$ 时，上面的 h 有无穷多个取法，所以有无穷多个正整数 n，使得 $n+k$ 不整除 C_{2n}^{n}.

$n!$ 中，质因数 2 的幂指数公式是解决本题的主要工具.

5. 某次会议共有 30 人参加，其中每个人在其余人中至多有 5 个熟人；任意 5 个人中存在两人不是熟人. 求最大的正整数 k，使得满足上述条件的 30 个人中总存在 k 个人，两两不是熟人.

解析　任取一个人 A_1，在 A_1 不认识的人（至少 $30-5-1=24$ 人）中取 A_2，在 A_1、A_2 不认识的人（至少 $24-5-1=18$ 人）中取 A_3，在 A_1、A_2、A_3 不认识的人（至少 $18-6=12$ 人）中取 A_4，在 A_1、A_2、A_3、A_4 不认识的人（至少 $12-6=6$ 人）中取 A_5. 那么，A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 互不认识.

如果 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 中至少有 2 个人有共同的熟人，那么至少被他们中一个认识的人不少于 $5\times 5=25$ 人. 从而还有一个 A_6 与他们均不认识.

如果 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 中任意两个人都没有共同的熟人，那么在 A_1 认识的 5 个人中有两个人互不相识. 用他们代替 A_1，与 A_2、A_3、A_4、A_5 组成互不相识的 6 个人.

因此，$k\geqslant 6$.

另一方面，将人用点表示，点相连表示人相识. 我们构造一个 30 个点的图，图中每点至多引出 5 条线，并且任 5 点中有两个点不相连. 而在图中任 7 个点之间必有相连的线.

构造方法如下：考虑五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 与 $B_1B_3B_5B_2B_4$（如图 3）.

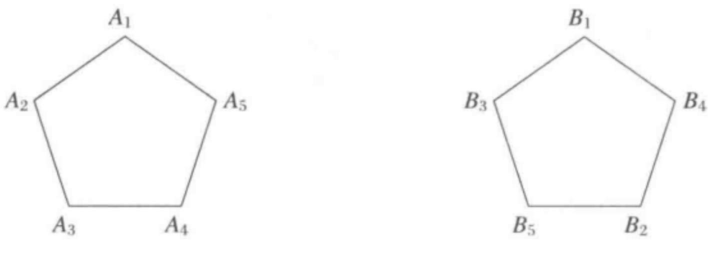

图 3

将 A_1 与 B_3、B_4、B_5 相连，A_2 与 B_4、B_5、B_1 相连，A_3 与 B_5、B_1、B_2 相连，A_4 与 B_1、B_2、B_3 相连，A_5 与 B_2、B_3、B_4 相连.

这样的 10 个点 A_i、B_i（$1\leqslant i\leqslant 5$），每点次数为 5；每 5 个点中有 3 个在同一个五边形上（五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$、$B_1B_3B_5B_2B_4$），其中有 2 个互不相连.

对其他的 20 个点也做同样处理（五边形 $C_1C_2C_3C_4C_5$、$D_1D_3D_5D_2D_4$ 按上述方式相连；五边形 $E_1E_2E_3E_4E_5$、$F_1F_3F_5F_2F_4$ 也按上述方式相连）. 这样的 3 个连通图（每个图 10 个点）组成一个合乎要求的图.