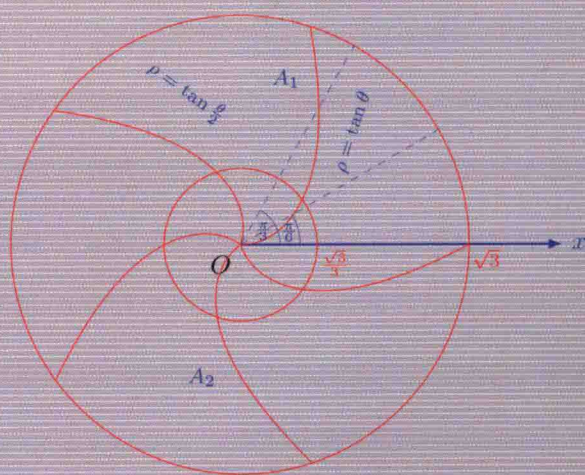


微积分 I

◎ 邓建平 编



科学出版社

微积分 I

邓建平 编



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是编者严格按照“微积分课程教学基本要求”，在南京大学多年教学经验的基础上精心编写而成的，是一套大学数学基础课程的教材。本书分Ⅰ、Ⅱ两册介绍微积分的基本理论和基本方法。其中微积分Ⅰ的内容包括预备知识、极限理论、导数与微分、一元函数积分学、向量代数与空间解析几何；微积分Ⅱ的内容包括多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程与差分方程初步。每章中都附有丰富的练习(第5章除外)和习题，练习供学生课堂使用，习题供学生课后使用。本书对几乎全部的习题都做了比较完整的解答(以二维码形式给出)，使本书具有更好的适用性。

本书力图体现微积分教学改革精神，选材深入浅出，理论引人入胜，方法精巧多彩。这样编排的目的在于使读者深刻领会数学思想，掌握数学技巧，提高数学能力。

本书可作为高等院校开设微积分课程的专业教材，也可作为考研读者备考的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分：全2册/邓建平编. —北京：科学出版社，2019.8

ISBN 978-7-03-061411-7

I. ①微… II. ①邓… III. ①微积分 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 106718 号

责任编辑：胡 凯 许 蕾 沈 旭 / 责任校对：杨聪敏

责任印制：张 伟 / 封面设计：许 瑞

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

北京九州迅驰传媒文化有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2019 年 8 月第一次印刷 印张：37 1/2

字数：889 000

定价：129.00 元（全 2 册）

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序 言

微积分是微分学和积分学的统称,它的产生是数学史上划时代的伟大创举,已有三百多年的历史,中间经过了好几个世纪的数学巨匠们的精心雕琢,已经成为一个完整的理论体系.它产生于对生产技术和理论科学的需要,反过来又广泛影响着生产技术和科学的发展.今天,微积分已是广大科技工作者不可缺少的工具.

微积分是以变量为研究对象,以极限为研究工具的数学学科.用极限方法研究几何学中曲线的切线问题和物理学中各类变化率问题产生了微分学,用极限方法研究几何学中曲边梯形的面积和物理学中变力做功等微小量的无限累加问题产生了积分学.

微积分教学的目标是培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力以及综合运用微积分学的概念、理论和方法分析解决实际问题的能力,并为学习多元函数微积分学和在后继课程中进一步获取数学知识奠定必要的数学理论和方法基础.简言之,就是初步使学生受到微积分学思想方法的熏陶和运用它们解决实际问题的基本训练.

为了使微积分的教学内容更加适应新形势的需要,编者根据学校新的培养应用型人才的目标要求,在基础部黄卫华老师的指导下,依据微积分课程教学基本要求,通过多次教学实践,形成的这套微积分教材可供数学专业外的各专业学生使用,也可以作为考研学生备考的参考用书.本套教材选材深入浅出,理论引人入胜,方法精巧多彩.本套教材预计总课时为168课时(包含56课时的习题课),其中带*号的内容可以少讲或不讲.

本套教材分为微积分 I 和微积分 II 两册.微积分 I 内容包括预备知识、极限理论、导数与微分、一元函数积分学、向量代数与空间解析几何;微积分 II 内容包括多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程与差分方程初步.每章中都附有丰富的练习(除第5章外)和习题,练习供学生课堂使用,习题供学生课后使用.书后对几乎全乎习题都做了比较完整的解答(以二维码形式给出),使本套教材具有更好的适用性.

在编写本套教材的过程中,编者参阅了国内外许多与微积分相关的优秀著作,在此深表谢意,请恕不一一列名.

衷心感谢黄卫华老师对本套教材精心审阅后提出的宝贵意见.衷心感谢科学出版社胡凯老师、许蕾老师、沈旭老师的悉心编校.

由于编者水平和经验有限,书中疏漏在所难免,殷切期望广大读者不吝批评指正.

编 者

2019年6月

目 录

序言

第 1 章 预备知识	1
1.1 数学归纳法	1
1.1.1 归纳法	1
1.1.2 归纳法原理	1
1.1.3 数学归纳法	2
1.2 二项式定理	5
1.3 常用的不等式	7
1.4 复数	12
1.4.1 复数的概念	12
1.4.2 复数的表示	12
1.5 极坐标系	14
1.5.1 极坐标系的概念	14
1.5.2 平面上点的极坐标	15
1.5.3 平面上点的极坐标与直角坐标的关系	15
1.5.4 曲线的极坐标方程	16
1.5.5 由曲线的极坐标方程描绘曲线	17
1.6 集合	20
1.6.1 集合的概念	20
1.6.2 元素与集合的关系	20
1.6.3 集合中元素的特性	20
1.6.4 集合与集合的关系和运算	20
1.6.5 集合的分类	21
1.6.6 常用数集及其表示方法	21
1.6.7 数集的界与确界	21
1.7 函数	22
1.7.1 映射与函数	22
1.7.2 函数的初等性质	24
1.7.3 基本初等函数	27
1.7.4 初等函数	29
1.7.5 隐函数	31
1.7.6 参数式函数	32
习题 1	33

第 2 章 极限理论	36
2.1 数列的极限	36
2.1.1 数列极限的定义	36
2.1.2 数列极限的性质	40
2.1.3 数列极限的存在准则	46
2.2 函数的极限	55
2.2.1 函数极限的定义	56
2.2.2 函数极限的性质	61
2.2.3 函数极限的存在准则	64
2.3 无穷小与无穷大	68
2.3.1 无穷小与无穷大的定义与性质	68
2.3.2 无穷小阶的比较	69
2.3.3 等价无穷小 (无穷大) 的因式替换	71
2.3.4 无穷小的主部	72
2.4 函数的连续与间断	73
2.4.1 连续函数的概念	73
2.4.2 连续函数的性质	74
2.4.3 函数的间断	77
2.4.4 有界闭区间上连续函数的性质	79
习题 2	83
第 3 章 导数与微分	86
3.1 导数的定义	86
3.1.1 导数的背景	86
3.1.2 基本初等函数的导数	88
3.2 求导法则	91
3.2.1 导数的四则运算法则	91
3.2.2 反函数的求导法则	92
3.2.3 复合函数的求导法则	93
3.2.4 取对数求导法则	95
3.2.5 隐函数的求导法则	96
3.2.6 参数式函数的求导法则	96
3.2.7 导数基本公式表	98
3.3 高阶导数	98
3.3.1 几个初等函数的 n 阶导数	99
3.3.2 两个函数乘积的高阶导数	101
3.4 微分	103
3.4.1 微分定义与性质	103
3.4.2 微分的运算法则	104

3.4.3 微分的应用: 近似计算	106
3.5 微分中值定理	106
3.5.1 费马 (Fermat) 引理	106
3.5.2 罗尔 (Rolle) 中值定理	107
3.5.3 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理	108
3.5.4 柯西 (Cauchy) 中值定理	110
3.6 洛必达法则	113
3.7 泰勒 (Taylor) 公式	122
3.8 导数的应用	129
3.8.1 函数的单调性	129
3.8.2 函数的极值	134
3.8.3 最值问题	137
3.8.4 函数的凸性和拐点	139
3.8.5 渐近线	148
3.8.6 函数作图	150
3.9 导数在经济学中的应用	152
3.9.1 边际分析	152
3.9.2 弹性分析	155
习题 3	157
第 4 章 一元函数积分学	163
4.1 不定积分	163
4.1.1 原函数与不定积分	163
4.1.2 不定积分的几何意义	165
4.1.3 积分基本公式表	165
4.1.4 不定积分的性质	166
4.1.5 不定积分的计算方法	167
4.1.6 分部积分法	175
4.1.7 有理函数的积分	178
4.1.8 三角函数有理式的积分	181
4.1.9 原函数非初等函数的积分	183
4.2 定积分	183
4.2.1 定积分的概念	183
4.2.2 定积分的几何意义	186
4.2.3 函数可积的充分必要条件	186
4.2.4 定积分的性质	190
4.2.5 微积分基本定理	197
4.2.6 定积分的换元法与分部积分法	202
4.3 反常积分	208

4.3.1	无穷区间上的反常积分的定义	208
4.3.2	无界函数的反常积分 (瑕积分) 的定义	209
4.3.3	反常积分的基本性质	210
4.3.4	反常积分的基本公式	210
4.3.5	Γ 函数	216
4.4	数值积分*	218
4.5	定积分的应用	222
4.5.1	定积分的微元法	222
4.5.2	定积分在几何上的应用	223
4.5.3	定积分在物理学中的应用	238
4.5.4	定积分在经济学中的应用	243
习题 4		246
第 5 章	向量代数与空间解析几何	253
5.1	向量代数	253
5.1.1	空间直角坐标系	253
5.1.2	向量的基本概念	254
5.1.3	向量的线性运算	256
5.1.4	向量的内积	258
5.1.5	向量的外积	260
5.1.6	向量的混合积*	262
5.2	平面与直线	264
5.2.1	平面的方程	264
5.2.2	直线的方程	268
5.2.3	直线与平面的位置关系	272
5.2.4	平面束*	273
5.3	空间曲面与空间曲线	275
5.3.1	球面	275
5.3.2	柱面	276
5.3.3	锥面	278
5.3.4	旋转曲面	280
5.3.5	常见的二次曲面的标准方程及其图像	281
习题 5		284
附录一	三角公式	286
附录二	极坐标曲线图	287

第1章 预备知识

记号: $\mathbb{N}$ -自然数集; $\mathbb{N}^*$ -正整数集; $\mathbb{Z}$ -整数集; $\mathbb{R}$ -实数集; $\mathbb{R}^+$ -正实数集; $\mathbb{R}^-$ -负实数集; $\mathbb{C}$ -复数集; $\mathbb{Q}$ -有理数集; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ -无理数集.

1.1 数学归纳法

1.1.1 归纳法

由个别或特殊情形下的结论来推测全体或一般情形下的结论. 这种推理 (从某些判断出发得出一个新判断的思维形式) 方法称为归纳法. 如考察连续自然数的立方和, 由 $n = 1, 2, 3, 4$ 时的结论, 推测 n 为任意正整数时, 有 $\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$.

归纳法根据其前提是否考察了某类对象的全体分为完全归纳法 (其结论自然是可靠的) 和不完全归纳法 (根据对部分特殊情形而不是全体的考察做出一般结论的推理方法). 由于某类事物的某些特殊情况的属性不一定为另一些特殊情况所有, 不完全归纳法的结论不一定成立, 有可能是错误的. 如费马^①曾猜测形如 $F_n = 2^{2^n} + 1$ 的数都是素数, 这里 $n = 0, 1, 2, 3, 4$ 结论正确. 但欧拉^②在 1732 年证明了 $F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ 不是素数. Landry 在 1888 年证明了 F_6 也不是素数.

对无限的对象, 似乎永远不能做出完全的考察. 而在数学里, 常常要对无穷多的对象下结论, 并且希望这个结论是正确的. 解决这个问题的一种方法是数学归纳法. 应用这个方法可以通过“有限”来解决“无限”的问题.

1.1.2 归纳法原理

设对一切正整数 n , 我们有一个命题 $P(n)$.

假设我们知道:

- (1) $P(1)$ 真;
- (2) 对任意的正整数 k , 由 $P(k)$ 真就能推出 $P(k+1)$ 真, 则 $P(n)$ 对一切正整数真.

证 用 S 表示 $\mathbb{N}^*$ 的一个子集: $S \subset \mathbb{N}^*$. 我们有一个很直观的断言: 每个非空子集 $S \subset \mathbb{N}^*$ 有一个最小元素 (这一断言称为“最小元素原理”). 设 $S = \{t \in \mathbb{N}^* | P(t) \text{ 不真} \} \subset \mathbb{N}^*$. 如果 $S = \emptyset$, 则结论已经成立. 设 $S \neq \emptyset$, 则 S 中有一个最小元素 t , 据条件 (1), $t \neq 1$, 即

^① 费马 (P. de Fermat, 1601~1665), 法国数学家.

^② 欧拉 (L. Euler, 1707~1783), 瑞士数学家和物理学家, 近代数学先驱之一. 欧拉 1707 年生于瑞士的巴塞尔, 13 岁时入读巴塞尔大学, 15 岁大学毕业, 16 岁获硕士学位. 欧拉是数学史上最多产的数学家之一, 平均每年写出八百多页的论文, 还写了大量的力学、分析学、几何学等课本, 《无穷分析引论》《微分学原理》《积分学原理》等都成为数学中的经典著作.

$t > 1$, 从而, $t - 1 \in \mathbb{N}^*$, 并且 $P(t - 1)$ 真, 但条件 (2) 说 $P(t)$ 也真. 这与 S 非空矛盾, 因此 $S = \emptyset$. $\square$

1.1.3 数学归纳法

数学归纳法是数学上证明与自然数 k 有关的命题的一种数学证明方法. 它主要用来确定一个 (解析) 表达式在所有正整数范围内是成立的, 或者用于证明一个与自然数 k 有关的命题 $P(k)$ 在自然数集 $\mathbb{N}$ (或一个子集) 上是成立的, 在高中数学中常用来证明等式成立和数列通项公式成立.

1. 最简单和常见的数学归纳法证明方法

证明当 k 属于所有正整数时一个 (解析) 表达式 $P(k)$ 成立, 这种方法由下面两步组成:

(1) 递推的基础: 证明 $k = k_0$ (通常 $k_0 = 1$) 时, $P(k_0)$ 成立;

(2) 递推的依据^①: 证明如果当 $k = m$ 时, 命题 $P(m)$ 成立, 那么当 $k = m + 1$ 时, 命题 $P(m + 1)$ 也成立;

则命题 $P(k)$ 对一切大于或等于 k_0 的自然数 k 成立.

注 这个方法的原理是先证明起始值在表达式中是成立的, 然后证明一个值到下一个值的证明过程是有效的. 如果这两步都被证明, 那么任何一个值的证明都可以被包含在重复不断进行的过程中.

2. 数学归纳法的另一种形式

(1) 递推的基础: 证明 $k = k_0$ (通常 $k_0 = 1$) 时, 命题 $P(k_0)$ 成立;

(2) 递推的依据: 证明假设对于一切小于 m 的自然数 k 命题 $P(k)$ 都成立, 那么命题 $P(m)$ 也成立;

则命题 $P(k)$ 对一切大于或等于 k_0 的自然数 k 成立.

注 上述归纳法也称为第二数学归纳法.

3. 反向数学归纳法

(1) 命题 $P(k)$ 对无穷多个自然数成立;

(2) 假设命题 $P(k)$ 对 $k = m$ 为真就能推出命题 $P(m - 1)$ 为真;

则命题 $P(k)$ 对一切自然数 n 都成立.

反向数学归纳法的合理性我们说明如下:

设 $S = \{m \in \mathbb{N}^* | P(m) \text{ 不真} \} \subset \mathbb{N}^*$. 如果 $S = \emptyset$, 则结论已经成立. 设 $S \neq \emptyset$, 则 S 中有一个最小元素 m 使得命题 $P(k)$ 对于 $k = m$ 不成立; 由于命题对无穷多个自然数成立, 所以存在 $n > m$, 且命题 $P(k)$ 对于 $k = n$ 成立; 由于命题 $P(k)$ 对于 $k = m$ 不成立, 所以命题对于 $k = m + 1$ 也不成立, 否则由命题 $P(k)$ 对于 $k = m + 1$ 成立就推出命题 $P(k)$ 对于 $k = m$ 成立. 这是矛盾的. 这样, 命题 $P(k)$ 对于 $k = m + 2$ 也不成立. 经过 $n - m$ 次递推后, 可得命题 $P(k)$ 对于 $k = n$ 也不成立. 这与题设矛盾, 所以 $S = \emptyset$.

^① 递推的依据中的“如果”被定义为归纳假设, 不要把整个第二步称为归纳假设.

反向数学归纳法又称倒推归纳法,柯西^①首次用它证明了 n 个正数的算术平均值大于等于这 n 个正数的几何平均值.

例 1.1.1 设 $k \in \mathbb{N}^*$, 证明:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2.$$

证 (1) 当 $k=1$ 时, 欲证等式成立.

(2) 假设对于大于或等于 1 的正整数 k , 等式 $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2$ 成立, 则

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left[\frac{k^2}{4} + (k+1) \right] \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

由数学归纳法, 等式 $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2$ 对一切正整数 k 成立. $\square$

例 1.1.2 用数学归纳法证明 $k^2(k^2-1)$ 可被 12 整除, 其中 $k \in \mathbb{N}^*$.

证 因为 $k^2(k^2-1) = [(k-1)k][k(k+1)]$, 所以 $4|k^2(k^2-1)$ 是显然的, 注意到 $12 = 4 \times 3$, 且 $(4, 3) = 1$, 所以我们只要证明 $3|k^2(k^2-1)$ 就好了.

(1) 当 $k=1$ 时, $3|0$ 显然.

(2) 假设 $3|k^2(k^2-1)$, 因为

$$(k+1)^2[(k+1)^2-1] = k^4 - k^2 + k(2k+1)(2k+2),$$

注意到 $3|2k(2k+1)(2k+2)$ 和 $3|3k(2k+1)(2k+2)$, 所以

$$3|[3k(2k+1)(2k+2) - 2k(2k+1)(2k+2)],$$

即 $3|k(2k+1)(2k+2)$, 由归纳假设 $3|(k^4 - k^2)$, 所以 $3|(k+1)^2[(k+1)^2-1]$. 由数学归纳法, $3|k^2(k^2-1), \forall k \in \mathbb{N}^*$. $\square$

例 1.1.3 设 $m, n \in \mathbb{N}^*$, 证明:

$$\min \{ \sqrt[3]{m}, \sqrt[3]{n} \} \leq \sqrt[3]{3}.$$

证 当 $m \leq n$ 时, $\sqrt[3]{m} \leq \sqrt[3]{n}$; 当 $m > n$ 时, $\sqrt[3]{n} < \sqrt[3]{m}$. 故

$$\min \{ \sqrt[3]{m}, \sqrt[3]{n} \} \leq \sqrt[3]{m}.$$

(1) 当 $m=1, 2, 3$ 时, 有 $1 < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$;

(2) 假设当正整数 $m \geq 3$ 时, $\sqrt[3]{m} \leq \sqrt[3]{3}$, 即 $m^3 \leq 3^m$, 则

$$\begin{aligned} (m+1)^3 &= m^3 + 3m^2 + 3m + 1 < m^3 + m \cdot m^2 + m \cdot m + m^2 \\ &< m^3 + m^3 + m \cdot m^2 = 3m^3 \leq 3 \cdot 3^m = 3^{m+1}. \end{aligned}$$

由数学归纳法, $\sqrt[3]{m} \leq \sqrt[3]{3}, \forall m \in \mathbb{N}^*$. 因此 $\min \{ \sqrt[3]{m}, \sqrt[3]{n} \} \leq \sqrt[3]{3}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$. $\square$

^① 柯西 (A. L. Cauchy, 1789~1857), 法国数学家.

例 1.1.4 设 $k \in \mathbb{N}$, 证明:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} < 3.$$

证 (1) 当 $k=0, 1$ 时, $1 < 3, 1 + \frac{1}{1!} < 3$ 成立.

(2) 假设对于大于或等于 1 的自然数 k , $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} < 3$, 则

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} \right) < 2 + \frac{1}{2}(3-1) < 3.$$

由数学归纳法, 不等式 $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} < 3$ 对一切自然数 k 成立. □

练习 1.1.1 设 $k \in \mathbb{N}^*$, 证明:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

练习 1.1.2 如果对任意正整数 k , 都有

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_k^3 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2 \quad (\text{其中 } a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, k),$$

证明: $a_k = k (k \in \mathbb{N}^*)$.

练习 1.1.3 在平面内有 k 条直线, 其中任何两条直线相交于一点, 并且任何三条直线都不相交于同一点. 证明: 这 k 条直线将它们所在的平面分成 $\frac{k^2 + k + 2}{2}$ 块区域.

练习 1.1.4 在 2 与 8 之间插入 k 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$, 使得 $2, a_1, a_2, \cdots, a_k, 8$ 成等差数列, 又在 2 与 8 之间插入 k 个正数 $b_1, b_2, \cdots, b_k$, 使得 $2, b_1, b_2, \cdots, b_k, 8$ 成等比数列, 设 $u_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k, v_k = b_1 b_2 \cdots b_k$.

(1) 求 $\{u_k\}$ 和 $\{v_k\}$ 的通项公式;

(2) 求使得 $f(k) = 3u_k + v_k - 10$ 对任何自然数 k 都能被 m 整除的最大自然数 m 的值.

练习 1.1.5 设 $k \in \mathbb{N}^*$, 证明:

$$1 + \frac{k}{2} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2} + k.$$

例 1.1.5 设 $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{k+2} = F_{k+1} + F_k (k \in \mathbb{N}^*)$, 证明:

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right].$$

证 (1) 当 $k=1, 2$ 时, $F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right] = 1,$

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1.$$

(2) 假设 $k \leq m (m \geq 2)$ 时, $F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right]$, 当 $k = m+1$ 时,

$$\begin{aligned} F_{m+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m \right] + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{m-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{m-1} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{m-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{m-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{m-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{m-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{m+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{m+1} \right]. \end{aligned}$$

由 (第二) 数学归纳法, $F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right], \forall k \in \mathbb{N}^*$. □

***例 1.1.1** 设函数 $f(k)$ 的定义域和值域都是正整数集 $\mathbb{N}^*$, 且 $f(k+1) > f(f(k))$. 证明: $f(k) = k$.

证 首先用数学归纳法证明: $\forall m \in \mathbb{N}^*$, 当 $k \geq m$ 时, 有 $f(k) \geq m$.

(1) 当 $m = 1$ 时, 注意到 $f(k)$ 的值域是 $\mathbb{N}^*$, 故 $f(k) \geq 1$.

(2) 假设对于 $m \in \mathbb{N}^*$, 结论正确. 则当 $k \geq m+1$ 时, 有 $k-1 \geq m$. 由归纳假设知 $f(k-1) \geq m$, 故 $f(f(k-1)) \geq m$. 再由题设条件 $f(k) > f(f(k-1))$ 就有 $f(k) > m$. 因此 $f(k) \geq m+1$. 由数学归纳法, 对任意正整数 m, k , 只要 $k \geq m$, 就有 $f(k) \geq m$. 现取 $m = k$, 则有 $f(k) \geq k$.

令 $k = f(m)$, 则 $f(f(m)) \geq f(m)$. 因为 $f(m+1) > f(f(m))$, 故 $f(m+1) > f(m)$, 即 $f(k)$ 是严格递增的.

若存在 k 使得 $f(k) > k$, 则 $f(k) \geq k+1$, 于是 $f(f(k)) \geq f(k+1)$. 这与题设矛盾, 因此 $f(k) = k$. □

1.2 二项式定理

二项和 $a+b$ 的 n 次幂的展开式, 即

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}, \quad (1.2.1)$$

其中 $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, 称为二项式系数.

注 二项式系数都是组合数,它与二项展开式的系数是两个不同的概念,在实际应用中应注意区别“二项式系数”与“二项展开式的系数”.

例 1.2.1 设 $m, n \in \mathbb{N}^*, n \geq m$, 求证:

$$(m+1)C_m^m + (m+2)C_{m+1}^m + \cdots + nC_{n-1}^m + (n+1)C_n^m = (m+1)C_{n+2}^{m+2}.$$

证 方法一: (1) 当 $n = m$ 时, 结论显然成立.

(2) 假设对于大于或等于 m 的自然数 n , 结论成立, 则

$$\begin{aligned} & (m+1)C_m^m + (m+2)C_{m+1}^m + (m+3)C_{m+2}^m + \cdots + nC_{n-1}^m + (n+1)C_n^m + (n+2)C_{n+1}^m \\ &= (m+1)C_{n+2}^{m+2} + (n+2)C_{n+1}^m \\ &= \frac{(m+1)(n+2)(n+1) \cdots [n+2-(m+2)+1]}{(m+2)!} \\ & \quad + \frac{(m+1)(n+2)(n+1) \cdots (n+1-m+1)(m+2)}{(m+2)(m+1)m!} \\ &= (m+1) \frac{(n+2)(n+1) \cdots (n-m+2)(n-m+1+m+2)}{(m+2)!} \\ &= (m+1) \frac{(n+3)(n+2) \cdots [n+3-(m+2)+1]}{(m+2)!} \\ &= (m+1)C_{n+3}^{m+2}. \end{aligned}$$

由数学归纳法, 等式

$$(m+1)C_m^m + (m+2)C_{m+1}^m + \cdots + nC_{n-1}^m + (n+1)C_n^m = (m+1)C_{n+2}^{m+2}$$

对一切大于或等于 m 的自然数 n 成立.

方法二: (1) 当 $n = m$ 时, 结论显然成立.

(2) 当 $n > m$ 时, 因为

$$\begin{aligned} (k+1)C_k^m &= \frac{(k+1)k!}{m!(k-m)!} = (m+1) \frac{(k+1)!}{(m+1)![(k+1)-(m+1)]!} \\ &= (m+1)C_{k+1}^{m+1}, k = m+1, m+2, \cdots, n. \end{aligned}$$

又因为 $C_{k+1}^{m+1} + C_{k+1}^{m+2} = C_{k+2}^{m+2}$, 所以

$$(k+1)C_k^m = (m+1)(C_{k+2}^{m+2} - C_{k+1}^{m+2}), k = m+1, m+2, \cdots, n.$$

因此

$$\begin{aligned} & (m+1)C_m^m + (m+2)C_{m+1}^m + (m+3)C_{m+2}^m + \cdots + nC_{n-1}^m + (n+1)C_n^m \\ &= (m+1)[C_{m+2}^{m+2} + (C_{m+3}^{m+2} - C_{m+2}^{m+2}) + (C_{m+4}^{m+2} - C_{m+3}^{m+2}) + \cdots + (C_{n+2}^{m+2} - C_{n+1}^{m+2})] \\ &= (m+1)C_{n+2}^{m+2}. \end{aligned}$$

□

例 1.2.2 证明: (1) $\sum_{k=0}^{m-l} C_m^{k+l} C_n^k = C_{m+n}^{m-l}$; (2) $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.

证 (1) 比较 $(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$ 两边 x^{m-l} 的系数得

$$\sum_{k=0}^{m-l} C_n^k C_m^{m-l-k} = C_{m+n}^{m-l},$$

代入 $C_m^{m-l-k} = C_m^{m-(m-l-k)} = C_m^{l+k}$ 即得等式成立.

(2) 由 (1) 取 $m=n, l=0$ 即得等式成立. □

练习 1.2.1 $(2x + \sqrt{x})^5$ 的展开式中, x^3 的系数是_____.

练习 1.2.2 $(1-2x)^6$ 的展开式中, x^2 的系数是_____.

练习 1.2.3 在 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x}\right)^n$ 的二项式中, 所有项的二项式系数之和为 256, 则常数项等于_____.

练习 1.2.4 在 $\left(1+x+\frac{1}{x^{20}}\right)^{10}$ 的展开式中, x^2 项的系数为_____.

练习 1.2.5 设 $\left(\frac{x+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n}x^{2n}$, 求

$$(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1})^2 - (a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n})^2$$

的值.

练习 1.2.6 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 求 $C_{2n}^0 + 3^2 C_{2n}^2 + \cdots + 3^{2n} C_{2n}^{2n}$ 的值.

练习 1.2.7 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 证明: $64 \mid (3^{2n+3} - 24n + 37)$.

1.3 常用的不等式

1. 三角不等式

设 $x, y \in \mathbb{R}$, 则

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|. \quad (1.3.1)$$

2. 方幂不等式

设 $x, y \in \mathbb{R}$, 则

$$x^2 + y^2 \geq 2xy, \quad (1.3.2)$$

等号成立当且仅当 $x = y$.

3. 算数-几何平均值不等式

设 $a_k \in \mathbb{R}^+$ ($k = 1, 2, \cdots, n$), 则

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}. \quad (1.3.3)$$

等号成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

证 方法一(数学归纳法): (1) 当 $n = 1$ 时, 不等式 (1.3.3) 显然成立.

(2) 假设不等式 (1.3.3) 对于 $n = m (m \geq 1)$ 时成立, 且等号成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m$, 那么对于 $n = m + 1$ 时, 不妨设 $a_{m+1} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_{m+1}\}$, 为了使用归纳假设, 记 $a = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m}$, 则

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{m+1}}{m+1} - a = \frac{m(a_1 + a_2 + \cdots + a_{m+1}) - (m+1)a}{m(m+1)} = \frac{a_{m+1} - a}{m+1}.$$

记 $b = \frac{a_{m+1} - a}{m+1}$, 则

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{m+1}}{m+1} \right)^{m+1} &= (a+b)^{m+1} \geq a^{m+1} + C_{m+1}^1 a^m b \\ &= a^m [a + (m+1)b] \geq a_{m+1} \prod_{k=1}^m a_k = \prod_{k=1}^{m+1} a_k. \end{aligned}$$

上述不等式中等号成立当且仅当 $a_{m+1} = a$ 且 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m$, 即 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = a_{m+1}$. 由数学归纳法, 不等式 (1.3.3) 对于一切正整数 n 成立.

方法二: (1) 当 $n = 2$ 时, $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$, 且等号成立当且仅当 $a_1 = a_2$. 假设 $n = 2^k$ 时, 不等式 (1.3.3) 成立, 则

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} &= \frac{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k}}{2} \\ &\geq \frac{(a_1 a_2 \cdots a_{2^k})^{\frac{1}{2^k}} + (a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^k}}}{2} \\ &\geq (a_1 a_2 \cdots a_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^{k+1}}}, \end{aligned}$$

且等号成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2^{k+1}}$. 因此, 不等式 (1.3.3) 对于 $n = 2^k (k \in \mathbb{N}^*)$ 成立.

(2) 假设不等式 (1.3.3) 对于 $n = k$ 成立, 令

$$S_{k-1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1},$$

则

$$S_{k-1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k} \cdot \frac{(k-1)+1}{k-1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + S_{k-1}}{k},$$

由归纳假设, 得

$$S_{k-1}^k \geq a_1 a_2 \cdots a_{k-1} S_{k-1},$$

因此

$$S_{k-1}^{k-1} \geq a_1 a_2 \cdots a_{k-1},$$

即

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} \geq (a_1 a_2 \cdots a_{k-1})^{\frac{1}{k-1}},$$

且等号成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k-1}$. 由反向数学归纳法, 不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

对于一切正整数 n 成立.

方法三: 令 $b_k = \frac{a_k}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k}}$, 则 $\prod_{k=1}^n b_k = 1$. 只需证明在条件 $\prod_{k=1}^n b_k = 1 (b_k \in \mathbb{R}^+, k =$

$1, 2, \cdots, n)$ 下 $\sum_{k=1}^n b_k \geq n$, 等号成立当且仅当 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$.

(1) 当 $n = 1$ 时, 不等式显然成立.

(2) 假设不等式对于 $n = m (m \geq 1)$ 时成立, 且等号成立当且仅当 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 1$.

那么对于 $n = m + 1$ 时:

① 如果 $m + 1$ 个正数 $b_1, b_2, \cdots, b_{m+1}$ 中至少有一个等于 1, 不妨设 $b_{m+1} = 1$, 则由 $\prod_{k=1}^{m+1} b_k = 1$, 有 $\prod_{k=1}^m b_k = 1$, 再由归纳假设, 有

$$\sum_{k=1}^{m+1} b_k = \sum_{k=1}^m b_k + b_{m+1} \geq m + 1,$$

等号成立当且仅当 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = b_{m+1} = 1$.

② 如果 $b_k \neq 1 (k = 1, 2, \cdots, m + 1)$, 则由 $\prod_{k=1}^{m+1} b_k = 1$ 知存在 $b_i > 1, b_j < 1$, 于是 $(b_i - 1)(b_j - 1) < 0$, 即

$$b_i + b_j > b_i b_j + 1 := {}^{①} b'_i + 1,$$

所以

$$\sum_{k=1}^{m+1} b_k > \sum_{k \neq i, j}^{m+1} b_k + b'_i + 1,$$

再由归纳假设, 亦有

$$\sum_{k=1}^{m+1} b_k > \left(\sum_{k \neq i, j}^{m+1} b_k + b'_i \right) + 1 \geq m + 1.$$

综合①和②, 不等式 (1.3.3) 对于 $n = m + 1$ 时成立. 由数学归纳法, 不等式 $\sum_{k=1}^n b_k \geq n \left(\prod_{k=1}^n b_k = 1 \right)$ 对于一切正整数 n 成立. $\square$

注 在不等式 (1.3.3) 中, 用 $\frac{1}{a_k}$ 代替 a_k , 得

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}. \quad (1.3.4)$$

① 符号 “:=” 意为 “定义为”.