高等学校教材

高等数学

上册

赵 冰 刘则毅 主编

高等教育出版社

高等学校教材

高 等 数 学

GAODENG SHUXUE

上册

赵 冰 刘则毅 主编

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是适合我国高等教育大众化新形势下一般高等学校的高等数学教材，作者根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会新修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”（2014 年版）编写而成。本书内容简明，通俗易懂，体系科学合理，强调应用，弱化技巧。尤其是融入了一些数值计算的思想和方法，使学生能够了解处理实际问题的方法。

本书分为上、下两册，上册主要包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、一元函数积分学、定积分的应用、常微分方程等内容，下册主要包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数等内容。可作为高等学校理工科非数学类专业高等数学课程教材，也可供其他专业学生及自学者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册 / 赵冰，刘则毅主编. -- 北京：高等教育出版社，2017.3

ISBN 978-7-04-046398-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①赵… ②刘… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 206051 号

策划编辑 兰莹莹　责任编辑 高　丛　封面设计 张　志　版式设计 张　志
插图绘制 杜晓丹　责任校对 刘娟娟　责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 山东鸿君杰文化发展有限公司
开　　本 787mm × 1092mm 1/16
印　　张 18.5
字　　数 440 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
版　　次 2017 年 3 月第 1 版
印　　次 2017 年 3 月第 1 次印刷
定　　价 36.20 元

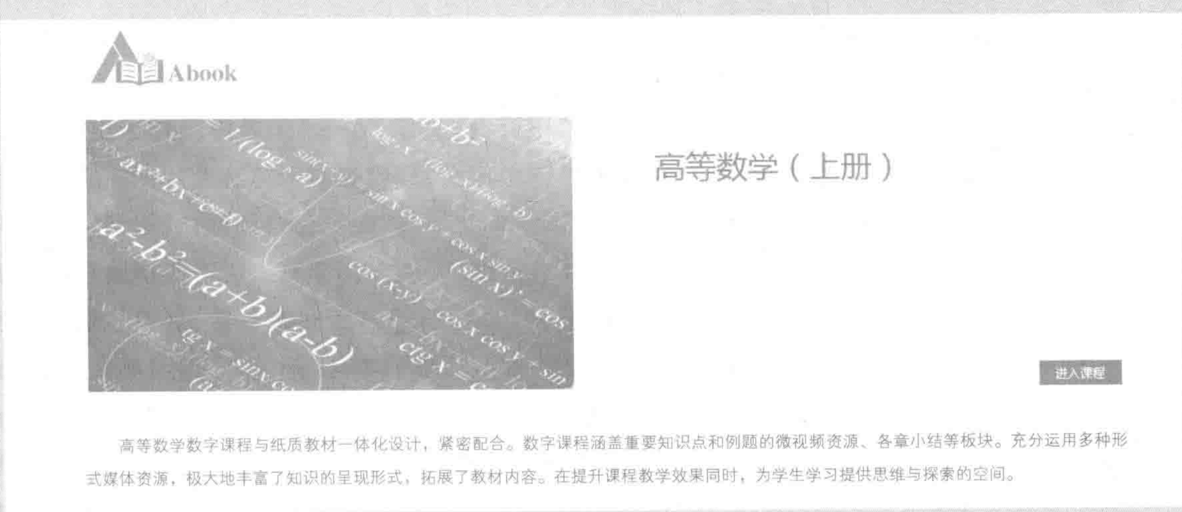
物 料 号 46398-00

与本书配套的数字课程资源使用说明

与本书配套的数字课程资源发布在高等教育出版社网站，请登录网站后开始课程学习。

1. 访问 http://abook.hep.com.cn，点击“注册”，在注册页面输入用户名、密码、姓名、常用的邮箱及用户类型进行注册。已注册的用户点击“登录”，输入用户名和密码登录即可进入“我的课程”页面。

2. 点击“我的课程”页面右上方“绑定课程”，按网站提示输入教材封底防伪标签上的数字，点击“确定”完成课程绑定。点击“进入课程”即可浏览或下载与本书配套的课程资源。



账号自登录之日起一年内有效，过期作废。

如有账号问题，请发邮件至：gaocong@hep.com.cn。

前　　言

我国高等教育已进入大众化时代，随着教育现代化和市场化的发展，高等学校的培养目标出现了多元化和多层次的需求。因此，需要不同层次和不同要求的高等数学教材。作者根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会编写的《大学数学课程教学基本要求（2014 年版）》中的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”（简称“基本要求”），结合多年的教学研究和教学实践编写而成。本教材具有以下特点：

1. 内容分层次

即使是同一专业的学生，其数学基础和对高等数学的需求也会有所不同。因此，将课程内容分出层次，做到“各取所需”，对于提高教学质量和学生的学习兴趣十分有意义。本书中“基本要求”所涵盖的内容自成体系，对于超出“基本要求”的部分，用楷体排版，以满足有需要、有兴趣和有能力的学生选学。例如，按照“基本要求”，极限定义部分着重是理解极限的意义，对“$\varepsilon-N$”定义只做了解，但我们考虑到学生在中学对数列极限已有所了解，还是给出了数列极限的“$\varepsilon-N$”定义，并利用“$\varepsilon-N$”定义证明了数列极限存在的唯一性以及有理运算法则等，使学生对极限的含义和数学表达方式的理解有所提升；而函数极限的“$\varepsilon-\delta$”定义、函数极限的性质和四则运算法则的部分证明则作为提高层次的内容，用楷体排版。学生在完整地学习了数列极限之后，更容易掌握函数极限。又如，导数定义是微积分中非常重要、非常基本的概念，按照“基本要求”，不需要安排利用导数定义研究抽象函数可导性的习题，但为了培养学生逻辑思维和推理的能力，作为提高层次的内容，仍给出了利用导数定义所做的一些定理的证明，比如，罗尔定理的证明和微积分基本公式的证明等。

2. 强调数学思想和方法，科学合理编排内容

在教材中注重由提出问题到引入数学概念和方法再到解决问题的过程，也注意体现特殊到一般、具体到抽象以及类比、推广等数学的思维方法。比如将数列极限的概念、性质和有理运算法则等集中介绍。至于函数极限，由于强调了数列是特殊的函数，所以函数的极限概念和性质等就很自然地得到推广，不需过多重复讲解。

另外，微分定义由可导性推出，避免了微分定义不好理解的问题，突出了“局部线性化”的思想，而利用微分方法可以非常方便地推出由参数方程所表示的函数的求导公式。

为了突出积分学解决实际问题的重要性，本书先讲定积分，而把不定

积分主要作为定积分计算的手段,并且淡化了积分技巧,比如没有专门介绍有理函数、三角有理函数和无理函数的积分;关于多元积分学部分的编排,采用的是在定积分和二重积分的基础上,给出多元函数积分(几何形体上积分)的一般定义,这样便于多元积分在其他专业课中得到运用;第二类线、面积分从物理背景出发,用第一类线、面积分来定义;在重积分和线、面积分的计算中,利用微元法思想推出计算公式,使学到的微积分思想方法立即得以运用。

3. 融入数值计算的思想和方法

本教材中融入了一些在处理实际问题中常用和有效的数值计算方法,这些方法均可用计算机软件实现,比如插值法和微分方程的数值方法。由于微分方程很少有解析解,而且实际中几乎都是用数值解,所以作为工科学生是应该了解的。

4. 力求深入浅出,易教易学

注重讲清概念,适度淡化理论证明,尽可能从直观背景和实践经验出发,提出数学问题,在不影响准确性的情况下,用较通俗的语言描述数学概念,以便学生了解知识的由来,理解知识的背景,并启发学生增强应用数学的意识。

5. 与数字化资源相结合

本教材采用纸质教材与数字化资源相结合的形式出版,学习者可按郑重声明页提示登陆配套的数字课程平台进行学习。

本教材是“全国地方高校 UOOC 联盟”高等数学课程主要参考用书,配套的《高等数学 A(1)》和《高等数学 A(2)》MOOC 课程已制作完成并上线(网址:http://uooc.net.cn)。

参加本教材编写的有赵冰(第一章、第七章和第九章)、汤跃宝(第二章和第三章)、顾燕红(第四章和第五章)、张娜(第六章)、阮晓青(第八章和第十章)和刘则毅(数值计算部分)。上册由赵冰和刘则毅任主编,下册由阮晓青和赵冰任主编。

由于作者水平有限,难免有不当之处,敬请同行和广大读者指正。

编者

2016 年 3 月

目　录

第 1 章　函数与极限

1.1　函数

函数是用数学来描述现实世界的最基本的工具,例如三角函数描述循环、重复的活动;指数、对数函数描述增长和衰减.一般而言,函数描述了运动变化过程中变量之间的相互依赖的关系,它是微积分学的研究对象.

首先我们要介绍函数的概念和性质. 由于读者在中学数学课程中,对有关函数的内容已经有了一些了解,本节将在此基础上再作一些回顾和补充.

1.1.1　函数的概念

1. 函数的定义

【视频 1.1.1(1)】

引例 1　设圆的半径是 r,则圆的面积公式是 $s=\pi r^2$. 给定圆半径 r 的一个数值,按照这个公式就可以得到圆面积 s 的值. 公式 $s=\pi r^2$ 给出了变量 s 与变量 r 之间的依赖关系.

引例 2　世华房地产公司深圳二手房 2009 年 2 月—7 月成交均价(元/m^2),如表 1.1:

表 1.1

月份	2	3	4	5	6	7
均价(元/m^2)	5 383	11 049	13 477	11 630	14 386	15 826

若设月份为 x 轴,均价为 y 轴,也可以用图形表示如下(图 1.1):

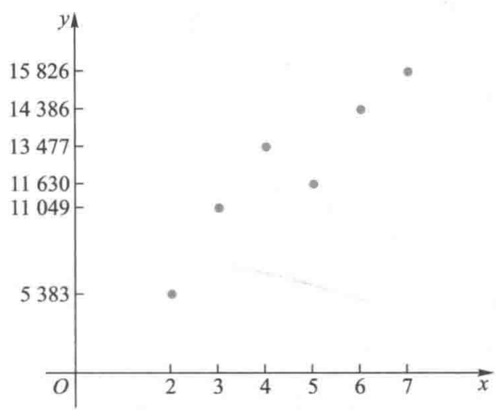


图 1.1

不管是从表格还是图形中,我们都能看出成交均价与月份之间的对应关系.

在引例 1 中变量 s 与变量 r 之间的依赖关系和引例 2 中变量 y 与变量 x 之间的对应关系就是我们所说的函数. 下面给出函数的定义.

定义 1.1(函数) 设 x 与 y 是某一变化过程中的两个变量. 如果对于变量 x 在其变化范围 $D \subseteq \mathbf{R}$ 内取得的每一个值,变量 y 按照确定的法则 f 有唯一的值与之对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,x 的变化范围 D 称为此函数的**定义域**,也记为 D_f. y 与 x 的这种对应关系称为**函数关系**.

对应法则和定义域给定之后,因变量的变化范围也就随之确定,称为函数的**值域**,记作 R_f 或 $f(D)$,即集合

$$R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}.$$

平面点集

$$(X, Y) = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D_f\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**图像(或图形)**.

例 1 求函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域、值域,并问它的图形是什么?

解 由函数的定义,要使因变量 y 有确定的值,必须

$$1 - x^2 \geqslant 0,$$

解此不等式,可得 $-1 \leqslant x \leqslant 1$,于是函数的定义域是 $D_f = [-1,1]$,值域是 $R_f = [0,1]$,它的图形是圆心在原点的上半单位圆周.

例 2 数列 $a_n = \dfrac{1}{n}$ 可以写成函数

$$f(n) = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbf{N}_+,$$

它的定义域是正整数集. 它的图形是平面上从左到右一系列的点,如图 1.2.

一般地,数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 可以用函数表示,即

$$f(n) = a_n \quad (n = 1,2,3,\cdots).$$

把所有的函数值按自变量从小到大对应的顺序写出来就是

$$f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots.$$

称为**整标函数**. 它的定义域是正整数集.

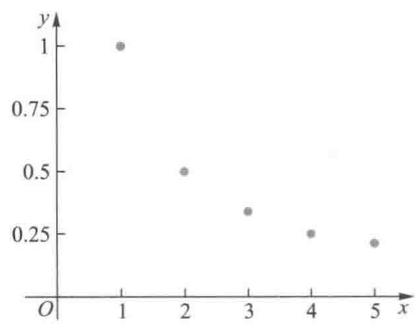


图 1.2

实际上,函数 $y=f(x)$ 是数集 D_f 到数集 R_f 的映射,记为

$$f: D_f \to R_f.$$

因此,在数学上常称 f 为函数,如图 1.3.

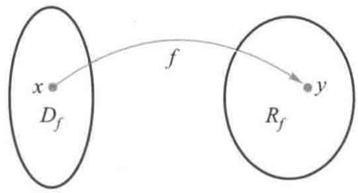


图 1.3

我们可以把函数 f 比喻为一台带有输入/输出的机器，定义域 D_f 中自变量的值 x_0 输入机器，通过机器 f 后，便输出值域 R_f 中的对应值 y_0，即 $f(x_0)$.

关于函数的两点说明：

(1) 对应法则 f 是函数，它表示了一个变量对另一个变量的依赖关系，与变量用什么字母表示没有关系，$s=f(t)$ 与 $y=f(x)$ 表示同一个函数；函数定义中的 $y=f(x)$ 实际上是函数值，不过我们习惯把函数与函数值都记为 $y=f(x)$.

(2) 按照定义，函数的一个重要特征是单值性. 例如单位圆的方程 $x^2+y^2=1$ 在区间 $(-1,1)$ 内不能确定 y 是 x 的函数，因为对任一个自变量 $x\in(-1,1)$，有两个值 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$. 但上半圆的方程 $x^2+y^2=1(y\geqslant 0)$ 则在 $[-1,1]$ 上确定了 y 是 x 的函数.

为叙述简便，数学上常用一些逻辑符号. 本书中用符号“$\forall$”表示“对于任意给定的”或者“对于每一个”，符号“$\exists$”表示“存在”. 因此函数的定义可简述为

$$\forall x \in D_f, \exists \text{ 唯一的 } y \in R_f, \text{使得 } y=f(x).$$

函数 $y=f(x)$ 表示因变量 y 依赖自变量 x 变化的规律，但在很多自然现象以及实际问题中，经常会遇到一个变量会依赖多个自变量变化，例如圆柱体的体积 V 依赖于底圆的半径 r 和高 h 这两个独立的变量变化，即 $V=\pi r^2 h$，这个公式确定了 V 是 r 和 h 两个自变量的函数，可记为 $V=V(r,h)$. 在物理学中我们知道，一定量的理想气体的压强 p 是体积 V 和绝对温度 T 这两个自变量的函数，即 $p=p(V,T)=\dfrac{RT}{V}$，其中 R 为常数. 数学上把这种依赖于多个自变量变化的函数，叫作多元函数. 具有两个自变量的函数称为二元函数，通常记为 $z=f(x,y)$. 我们将会在第 6 章微分方程中用到有关多元函数的表示，而关于多元函数的详细内容我们将在本教材的下册讨论.

2. 函数的表示法

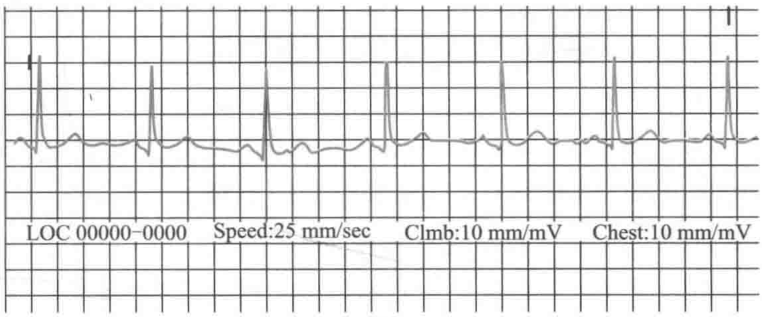
从引例看到，表格、图形和公式都能够表示函数关系，因此，函数的表示方法主要有三种：列表法，图像法和公式法.

【视频 1.1.1（2）】

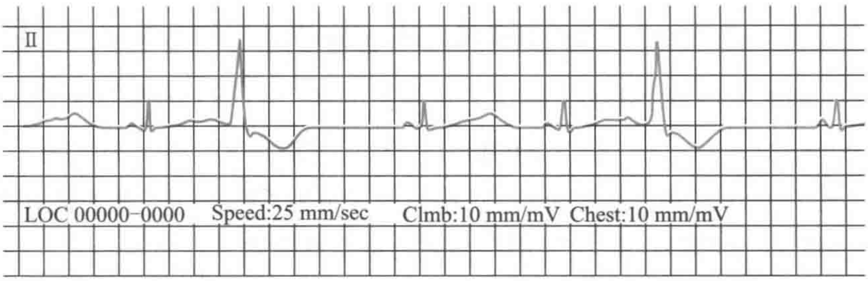
列表法就是将自变量与因变量的对应数值列成表格，它们之间的函数关系一目了然. 例如引例 2 中的成交均价表，还有三角函数表和对数函数表等.

图像法表示的函数关系可以方便地看出函数所描述的规律性，例如下图中的两个心电图，一个是正常的(图 1.4(a))，另一个是不正常的(图 1.4(b))，它们反映了作为时间函数的心肌细胞的电活动规律. 医生在诊断病情时，需要知道各相同时间段的图形. 比起公式，医生更容易从图像看出规律，从而做出判断.

公式法是用数学式子表达函数，它是我们常用的方法，例如中学里见到的幂函数、三角函数、指数函数和对数函数等，都是用具体公式来表示的.



(a)



(b)

图 1.4

有些函数在定义域内不能用一个式子表达出来，而需要用多个解析式分段表示. 这样的函数称为分段函数.

例 3 某线路火车随身行李收费规定如下：20 千克以下不计费；20 千克～50 千克每千克收费 1.2 元；超出 50 千克超出部分每千克 2 元，随身携带行李最多不可超过 60 千克. 试建立行李收费 y（元）与行李重量 x（千克）之间的函数关系，并作出该函数的图像.

解 由题意，有

当 $0 \leqslant x \leqslant 20$ 时，$y=0$；

当 $20<x \leqslant 50$ 时，$y=1.2(x-20)=1.2x-24$；

当 $50<x \leqslant 60$ 时，$y=1.2\times 30+2(x-50)=2x-64$.

于是所求函数关系为

$$y=\begin{cases}0, & 0 \leqslant x \leqslant 20, \\ 1.2x-24, & 20<x \leqslant 50, \\ 2x-64, & 50<x \leqslant 60.\end{cases}$$

这是一个分段函数，其图形如图 1.5 所示.

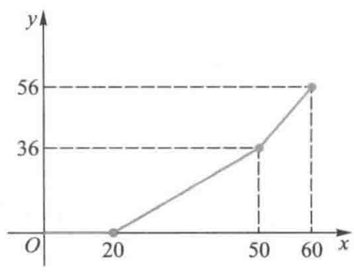


图 1.5

下面是几个数学上和工程中常用的分段函数：

绝对值函数 $y=|x|$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $[0,+\infty)$. 也可表示为 $y=|x|=\sqrt{x^2}$.

取整函数 $y=[x]$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

$[x]$表示不超过 x 的最大整数,函数图形如图 1.6. 函数值$[-2.1]=-3$,$[-2]=-2$,$[-0.3]=-1$,$[0.4]=0$,$[3.5]=3$.

由取整函数的定义可知,对于任一 $x\in(-\infty,+\infty)$有

$$[x]\leqslant x<[x]+1.$$

符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$\{-1,0,1\}$,图形如图 1.7. 对于任意实数 x 有

$$x=\operatorname{sgn} x\cdot|x| \quad 或 \quad |x|=x\operatorname{sgn} x.$$

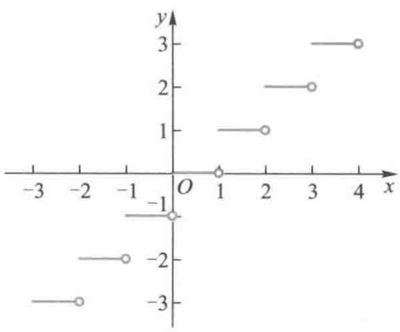


图 1.6

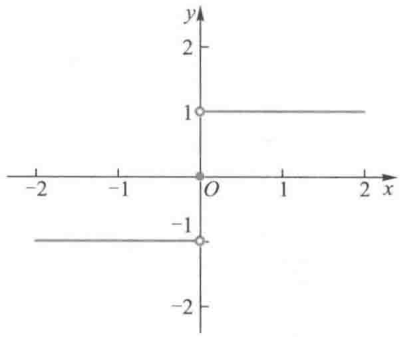


图 1.7

1.1.2 函数的特性

在中学数学里已经熟知函数的单调性、有界性、奇偶性和周期性等特性,下面用逻辑符号重新叙述一遍,并强调在微积分中会用到的一些内容.

1. 单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,集合 $I\subseteq D$. 如果 $\forall x_1,x_2\in I$,,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在集合 I 上是单调增加的. 如果 $\forall x_1,x_2\in I$,,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在集合 I 上是单调减少的. 在定义域上单调增加或单调减少的函数统称为单调函数. 如果函数在其定义域的某个区间上是单调的,这样的区间称为单调区间. 例如函数 $y=x^2$ 不是单调函数,但有单调区间,区间$(-\infty,0]$是函数 $y=x^2$ 的单调减少区间,而区间$[0,+\infty)$是函数 $y=x^2$ 的单调增加区间.

设$\{x_n\}$是一个数列,如果 $x_n\leqslant x_{n+1}(n=1,2,\cdots)$,则称数列$\{x_n\}$是单调增加(递增)的;如果 $x_n\geqslant x_{n+1}(n=1,2,\cdots)$,则称数列$\{x_n\}$是单调减少(递减)的.

从几何上看,如果 $y=f(x)$是单调函数,则任意一条平行于 x 轴的直线与它的图形最多相