"十三五"移动学习型规划教材

线性代数

莫京兰　黄秋和　宁桂英　主编

LINEAR ALGEBRA

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

向任课教师提供PPT课件

"十三五"移动学习型规划教材

线性代数

主　编　莫京兰　黄秋和　宁桂英
参　编　靳宝霞　龙湘湘　田献珍　覃姜色　陆英宇

机 械 工 业 出 版 社

本书是高等学校线性代数课程教材，符合课程教学基本要求，针对应用型本科教学需要，突出实践案例学习、编程实操和对数学史与数学家的了解.

本书共分6章，主要内容有：行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、MATLAB综合实验. 每章末安排了应用举例、数学史和数学家简介、MATLAB实验.

本书适合应用型本科院校作为课程教材使用，也可供相关教学和科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/莫京兰，黄秋和，宁桂英主编. —北京：机械工业出版社，2019.7
“十三五”移动学习型规划教材
ISBN 978-7-111-63051-7

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①莫…②黄…③宁…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第128935号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码100037)
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　刘琴琴
责任校对：李亚娟　封面设计：鞠　杨
责任印制：张　博
三河市国英印务有限公司印刷
2019年8月第1版第1次印刷
184mm×260mm·13.5印张·342千字
标准书号：ISBN 978-7-111-63051-7
定价：35.00元

电话服务	网络服务
客服电话：010-88361066	机　工　官　网：www.cmpbook.com
010-88379833	机　工　官　博：weibo.com/cmp1952
010-68326294	金　　书　　网：www.golden-book.com
封底无防伪标均为盗版	机工教育服务网：www.cmpedu.com

前　言

“线性代数”是高等院校理工类、经济管理类等专业开设的一门重要的数学基础课，也是硕士研究生入学统一考试的必考科目. 线性代数是数学的一个分支，它的研究对象是向量、向量空间(或称线性空间)、线性变换和有限维的线性方程组. 近年来，随着科学技术的飞速发展以及计算机技术的广泛应用，线性代数作为一种重要的数学工具已经广泛应用于工程技术、经济管理等诸多领域，很好地培养了学生的逻辑思维能力、抽象思维能力、实际应用能力等多方面能力. 为适应高等教育对应用技术型人才培养目标的要求，结合我们多年从事线性代数教学实践的经验，编写了本书.

本书突出以下特点：

1. 教材内容编选精练. 以够用、必需为原则，既保证科学性又符合数学课程教学的基本要求，体系完整、结构紧凑、言简意赅.

2. 强化应用，注重培养学生的创新能力. 本书每章末安排了应用举例和 MATLAB 数学实验，注重对学生基本运算能力和分析能力、解决问题能力的培养，注重理论联系实际，以激发学生的学习兴趣.

3. 精讲多练，学练结合. 为使学生深刻理解基本概念、定理，有针对性地选配了大量的例题和习题，每节后配有习题，每章后配有总习题，为学生巩固所学提供了充足的素材.

4. 注重总结归纳. 每章开头简单介绍本章的主要内容；每章结尾配有本章小结，帮助学生对各章知识进行归纳、类比，巩固和总结.

5. 配备网络资源. 每章提供部分重要知识点内容的微课视频、习题讲解和详解、知识扩充等，这些资源帮助学生进行课下自主学习.

本书共分 6 章，主要内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、MATLAB 综合实验，每章附有线性代数应用举例、线性代数发展史、MATLAB 数学实验，书后还附有部分习题参考答案.

本书的大纲设计由广西科技大学鹿山学院黄秋和负责，修改、统稿、定稿由主编莫京兰、黄秋和、宁桂英负责. 具体编写分工如下：第 1 章由莫京兰编写；第 2 章由龙湘湘(2.1～2.3 节)、莫京兰(2.4～2.7 节)编写；第 3 章由宁桂英编写；第 4、5、6 章由靳宝霞编写；线性代数应用举例及发展史部分由莫京兰编写. 田献珍、覃姜色、陆英宇做了编写辅助工作. 教学时可以根据各校专业需要、学生基础、课时安排有针对性地选择，实行模块化教学，使学生能够更扎实地掌握所学知识，了解线性代数的实际应用，提高教学效果.

本书由 2016 年度广西高等教育本科教学改革工程重点项目“‘翻转课堂’教学模式下的独立学院大学数学微课教学改革与实践(项目编号 2016JGZ189)”、2017 年度广西高等教

育本科教学改革工程项目“基于 SPOC 混合学习模式下独立学院大学数学教学改革研究与实践(项目编号 2017JGB520)”和 2018 年度广西高等教育本科教学改革工程重点项目“基于‘Mobi - Spoc’的应用型本科院校教学资源的建议与开发——以线性代数为例”资助. 本书在讨论、编写过程中,借鉴了许多同行的科研成果,同时也得到了学校领导、教务处、公共数学部的大力支持,机械工业出版社的编辑团队为本书的编写和出版给予了许多帮助和支持,在此一并表示诚挚的谢意!

由于编写水平有限,书中难免有不妥之处,恳请广大读者予以指正,并将意见及时反馈给我们,以便修订时改进. 意见和建议请发往电子邮箱:lsggsxb2019@163. com,作者将不胜感激.

编者

目　录

第 1 章 行列式

线性方程组是线性代数研究的核心内容,而行列式是一种有效求解线性方程组的重要的数学工具.行列式的概念来源于16世纪,最早提出行列式概念的是德国数学家莱布尼茨和日本数学家关孝和.经过众多数学家几百年的研究发展,逐步形成完整的行列式理论,该理论也已经成功应用于数学、航空、信息等领域.

本章主要讨论行列式的概念和性质,行列式的计算以及行列式的基本应用——克拉默(Cramer)法则.

1.1 行列式的定义

1.1.1 二元线性方程组与二阶行列式的定义

中学代数中的二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 x_1, x_2 为未知数,$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ 为常数.求解这样的线性方程组一般采用消元法,对于方程(1.1)首先消去未知数 x_2,分别用 a_{22}, a_{12} 乘以式(1.1)中的两个方程后相减得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$,同理,消去未知数 x_1 得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$.

视频讲解:

二阶行列式的定义及计算

如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$,则不难得到方程组的唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \ x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

观察式(1.2)发现式中的分母都是 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$,而这四个数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 是方程组(1.1)的未知数系数.为了便于记忆方程组(1.1)的唯一解,在这里,我们引入行列式的概念.

定义 1.1 设 2×2 个数排成2行2列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.3}$$

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为数表(1.3)所确定的**二阶行列式**,并记作 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.4}$$

式(1.4)中含有两行两列,横排为行,竖排为列,其中数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为二阶行列式的元素. 行列式的元素 a_{ij}的下标 i 表明该元素在行列式的第 i 行,下标 j 表明该元素在行列式的第 j 列. 行列式(1.4)中的元素 a_{ij}的第一个下标 i 表示行标,第二个下标 j 表示列标.

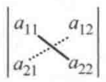

图 1-1

根据二阶行列式的定义,可用"对角线法则"来记忆,如图 1-1 所示.

把 a_{11}到 a_{22}的实连线称为主对角线,a_{12}到 a_{21}的虚连线称为副对角线. 于是二阶行列式的值等于主对角线上两个元素的乘积减去副对角线上两个元素的乘积所得的差.

利用二阶行列式的定义,二元一次线性方程组(1.1)中的唯一解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

其中,$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$是线性方程组(1.1)的系数所确定的二阶行列式,称为系数行列式. $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$是用线性方程组(1.1)的常数项 b_1,b_2 替换系数行列式 D 中的第一列元素 a_{11},a_{21}所得的二阶行列式. $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$是用线性方程组(1.1)的常数项 b_1,b_2 替换系数行列式 D 中的第二列元素 a_{12},a_{22}所得的二阶行列式.

例 1.1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2=1, \\ 2x_1+\ x_2=3. \end{cases}$$

解 因为系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1\times\square-(-2)\times\square=5\neq0$,所以方程组有唯一解.

又因为 $D_1=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1\times1-(-2)\times3=7$, $D_2=\begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix}=1\times3-1\times2=1$,

所以 $$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{7}{5},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{5}.$$

1.1.2 三阶行列式

参照二阶行列式的定义，下面给出三阶行列式的定义.

定义 1.2 设有 3×3 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.5}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{1.6}$$

则称式(1.6)为数表(1.5)所确定的**三阶行列式**.

视频讲解：三阶行列式的定义及计算

三阶行列式也可以用“对角线法则”(图 1-2a)或“沙路法则”(图 1-2b)来记忆.

图 1-2 的“对角线法则”：三条实连线上各三个元素的乘积后加“+”号，三条虚连线上的各三个元素乘积后再加“-”号，因此，三阶行列式的值等于三条实连线上的各三个元素乘积之和减去三条虚连线上的各三个元素乘积所得的差.

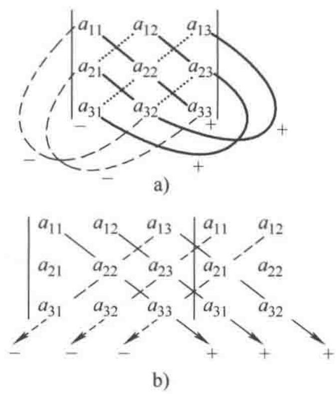

图 1-2

注意：“对角线法则”只适用于二阶与三阶行列式.

例 1.2 计算三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

解 由对角线法则，有

$$\begin{aligned} D &= 1 \times \boxed{\quad} \times \boxed{\quad} + 2 \times (-1) \times 1 + 1 \times \boxed{\quad} \times \boxed{\qquad} - 1 \times 1 \times 1 - \\ &\quad 1 \times \boxed{\qquad} \times \boxed{\qquad} - 2 \times 0 \times 0 \\ &= 0 - 2 + 0 - 1 - 1 - 0 \\ &= -4. \end{aligned}$$

例 1.3 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & x & x^2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$.

解 方程左端

$$\begin{aligned} D &= -x - x^2 + 0 - x - x^2 - 0 \\ &= -2x^2 - 2x, \end{aligned}$$

由 $-2x^2 - 2x = 0$ 解得 $x = \boxed{\quad}$ 或 $x = \boxed{\quad}$.

1.1.3 *n* 阶行列式

下面参照二阶、三阶行列式的定义，我们可以定义 n 阶行列式.

定义 1.3 有 $n \times n$ 个数排成 n 行 n 列的一个数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}, \end{matrix} \tag{1.7}$$

$$\text{记 } D_n = |a_{ij}|_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.8}$$

则称 D_n 为式(1.7)所确定的 n **阶行列式**.

视频讲解：

n 阶行列式的定义及计算

根据定义 1.3 可知，当 $n=1$ 时，规定 $|a_{11}|=a_{11}$，注意不要把这个行列式的记号与绝对值的记号相混淆.

二阶、三阶行列式的计算可以用对角线法则，**四阶以上**行列式的计算**不能**用对角线法则，那 n **阶行列式**如何计算？

对于三阶行列式来说，容易验证

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ &\quad a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) - (a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{21}a_{32}) \\ &\quad + (a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31} \\ &\quad (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ \square & \square \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

这样，三阶行列式的计算可以归结为二阶行列式的计算.

下面先介绍余子式和代数余子式的概念.

定义 1.4 在 n 阶行列式 D_n 中，删除元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素，剩余的元素按照原来的相对位置所确定的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}，而令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例 1.4 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$，求 $M_{23}, A_{23}, M_{33}, A_{33}$.

解 $M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & \square \\ 0 & \square \end{vmatrix}=1, A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-1,$

$$M_{33}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=5, A_{33}=\boxed{\phantom{(-1)^{3+3}M_{33}}}=5.$$

为了给出 n 阶行列式的计算方法,先来分析前面介绍的二阶、三阶行列式以及结构.

二阶行列式是由 2×2 个元素排成 2 行 2 列而构成,其结构为

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12},$$

其中 A_{11} 是 D_2 中元素 a_{11} 的代数余子式,A_{12} 是 D_2 中元素 a_{12} 的代数余子式.

三阶行列式是由 3×3 个元素排成 3 行 3 列而构成,其结构为

$$\begin{aligned} D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31} \\ &\quad -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \\ &=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32}) \\ &\quad +a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}) \\ &=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}M_{11}-\boxed{\qquad}+a_{31}M_{31} \\ &=a_{11}A_{11}+\boxed{\qquad}+a_{31}A_{31}, \end{aligned}$$

其中,M_{11},M_{21},M_{31} 分别为元素 a_{11},a_{21},a_{31} 的余子式,A_{11},A_{21},A_{31} 分别为元素 a_{11},a_{21},a_{31} 的代数余子式.

根据二阶、三阶行列式展开公式,可以将此理论推广得 n 阶行列式的展开公式.

定理 1.1 n 阶行列式等于该行列式中任一行(列)的各元素与其对应代数余子式的乘积之和,即

$$\begin{aligned} D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \\ &=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}(i=1,2,\cdots,n), \end{aligned} \tag{1.9}$$

或 $\quad D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}(j=1,2,\cdots,n).$

定理 1.1 称为 n 阶行列式按行(列)展开定理,根据定理 1.1 可以将任何一个高阶行列式按某一行(列)展开,逐步降低行列式的阶数,从而计算出行列式的值.

例 1.5 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

解 方法1:利用对角线法则,可得

$$D=1\times\square\times\square+3\times0\times(-2)+(-1)\times\square\times\square-(-1)\times1\times(-2)-1\times\square\times\square-3\times\square\times\square=-1;$$

方法2:利用定理1.1按第2行展开,可得

$$D=0\times A_{21}+1\times A_{22}+0\times A_{23}=1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ \square & \square\end{vmatrix}=-1.$$

例1.6 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & -1 & 1\\ 4 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$.

解 先将行列式按第四行展开,然后得到新的三阶行列式又按第三行展开,

$$\begin{aligned}D&=0\times A_{41}+0\times A_{42}+1\times A_{43}+0\times A_{44}=1\times(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ \square & \square & \square\end{vmatrix}\\&=-(4\times A_{31}+0\times A_{32}+0\times A_{33})\\&=-1\times4\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ \square & \square\end{vmatrix}=(-4)\times4=-16.\end{aligned}$$

注意:在利用定理1.1来计算行列式时,任何一个行列式都可以按行列式的任意一行(列)展开,为了计算简便,一般情况下选择含有零元素比较多的行(列)展开.

下面给出几种特殊的行列式:

1. 上三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

如果我们遇到特殊的行列式,则可以直接给出行列式的值.

上三角行列式 D_n 是指主对角线以上的元素不全为零,主对角线以下的元素全部为零的行列式.上三角行列式 D_n 的值等于 n 个主对角线元素的乘积.

2. 下三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

下三角行列式 D_n 是指主对角线以下的元素不全为零,主对角线以上的元素全部为零的行列式.下三角行列式 D_n 的值等于 n 个主对角线元素的乘积.

3. 对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

4. 对称与反对称行列式

$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中,若 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,称 D_n 为对称行列式. 若 $a_{ij}=-a_{ji}, a_{ii}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$,称 D_n 为反对称行列式.

习题 1.1

1. 填空题

(1)已知二阶行列式为 $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$,元素 a_{12} 为________,元素 a_{21} 为________.

(2)已知三阶行列式为 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$,元素 a_{21} 的余子式 $M_{21}=$________,代数余子式 $A_{21}=$________.

(3)设 D 为一个三阶行列式,第三列元素分别为 $-2,3,1$,其余子式分别为 $9,6,24$,则 $D=$________.

2. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$;

(6) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$.

3. 解下列二元一次线性方程组:

(1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 = -1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, \\ -2x_1 + 4x_2 = -2. \end{cases}$

4. 计算下列行列式的值：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$；

（2）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & n-2 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

5. 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4-x^2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$，求 x 的值.

1.2 行列式的性质

上节介绍了 n 阶行列式的定义，利用定理 1.1 可以对任意一个行列式按照任一行（列）展开降阶从而计算 n 阶行列式的值. 但对于较高阶的行列式利用定理 1.1 计算相当繁琐，计算量也比较大. 因此非常有必要讨论行列式的性质，利用这些性质将使行列式的运算大为简化.

为此，先介绍转置行列式的概念.

视频讲解：行列式的性质

定义 1.5 将 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的第 i 行变为第 i 列（$i=1,2,\cdots,n$）所得的行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为 D 的**转置行列式**，用 D^{T} 表示.

性质 1.1 行列式和它的转置行列式相等，即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

例如，

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix},$$

则 D 的转置行列式就是

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} \boxed{} & 1 \\ \boxed{} & 3 \end{vmatrix}.$$

容易算出 $D = D^{\mathrm{T}} = \boxed{}$. 所以不失一般性有 $D = D^{\mathrm{T}}$.

由性质 1.1 可知，行列式的行与列的地位是等同的，行列式的性质凡是对行成立的，对列也同样成立，反之亦然.

性质 1.2 互换行列式 D 的任意两行（列）元素的位置，则行

列式的值变号,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则有 $D=-D_1$.

推论 1.1 如果行列式有两行(列)元素完全相同,那么这个行列式等于零.

证明 假设行列式 D 的第 i 行与第 j 行($i\neq j$)相同. 根据性质 1.2,互换行列式的第 i 行与第 j 行后,行列式的值改变符号,所以新的行列式等于 $-D$. 因为互换相同的两行,行列式并没有改变. 由此得 $D=-D$,即 $2D=0$,所以 $D=0$.

注意:行列式的第 i 行可记为 r_i,行列式的第 i 列可记为 c_i,则互换行列式的第 i 行与第 j 行可记为 $r_i\leftrightarrow r_j$,互换行列式的第 i 列与第 j 列可记为 $c_i\leftrightarrow c_j$.

性质 1.3 用一个数 k 乘以行列式的某一行(列)的所有元素,等于用数 k 乘以该行列式.

注意:数 k 乘以行列式的第 i 行(列)记为 $kr_i(kc_i)$.

由性质 1.3,可以得出以下推论:

推论 1.2 行列式中某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1.3 如果行列式中有一行(列)的所有元素全部是零,则该行列式等于零.

由性质 1.2 和性质 1.3,容易得到此推论.

推论 1.4 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例,则该行列式等于零.

性质 1.4 如果行列式中某一行(列)中的所有元素都可表示成两项之和,则该行列式等于两个行列式之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 1.7 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 102 & 99 & 101 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 102 & 99 & 101 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 100+2 & 100-1 & 100+1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 100 & 100 & 100 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \boxed{\quad} & \boxed{\quad\quad} & \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} & \boxed{\quad\quad} & \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} & \boxed{\quad\quad} & \boxed{\quad} \end{vmatrix}$$

$$=-100+\boxed{\quad\quad}=-102.$$

利用性质 1.4 和推论 1.4,可以得到:

思考:性质 1.5 通常称为倍加不变性.运用该性质(第 j 行元素乘数 k 加到第 i 行元素)作用于行列式时,是第 i 行的元素不变?还是第 j 行的元素不变?

性质 1.5 行列式中某一行(列)的所有元素同乘上同一个常数 k,然后再加到该行列式的另外一行(列)的对应元素上去,所得的行列式值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i+kr_j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注意:行列式的第 j 行(列)所有元素同乘上同一个常数 k,然后再加到该行列式的第 i 行(列)的对应元素上可记为 $r_i+kr_j(i\neq j)$(或 c_i+kc_j).

性质 1.6 行列式中某一行(列)的各元素与该行列式的另外一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0(i\neq j,i,j=1,2\cdots,n),$$