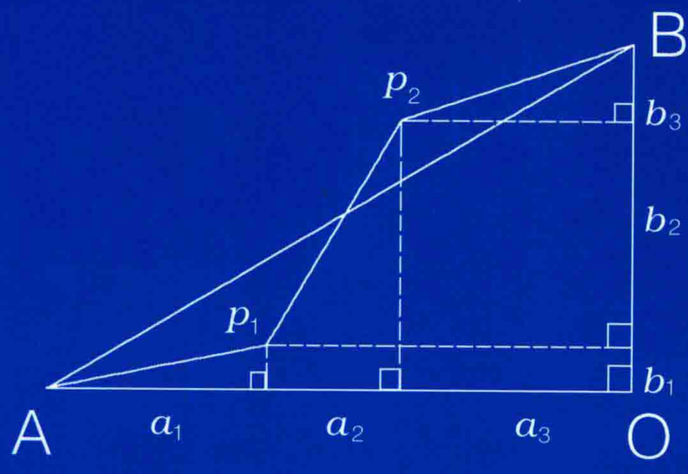
SHUXUE SIWEI YU XINGQU TUOZHAN DUBEN

数学思维与兴趣·拓展读本

巢传友　编著



江西人民出版社
Jiangxi People's Publishing House
全国百佳出版社

SHUXUE SIWEI YU XINGQU TUOZHAN DUBEN

数学思维与兴趣拓展读本

巢传友　编著

江西人民出版社
Jiangxi People's Publishing House
全国百佳出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学思维与兴趣拓展读本/巢传友编著. — 南昌:江西人民出版社,
2016.9

ISBN 978-7-210-08819-6

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①巢… Ⅲ. ①中学数学课-教学参考
资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 241022 号

数学思维与兴趣拓展读本

巢传友　编著

责任编辑:万莲花

封面设计:同异文化传媒

出版:江西人民出版社

发行:各地新华书店

地址:江西省南昌市三经路 47 号附 1 号

编辑部电话:0791-86898650

发行部电话:0791-86898815

邮编:330006

网址:www.jxpph.com

E-mail:jxpph@tom.com　web@jxpph.com

2016 年 10 月第 1 版　2016 年 10 月第 1 次印刷

开本:787 毫米 × 1092 毫米　1/16

印张:19

字数:372 千字

ISBN 978-7-210-08819-6

赣版权登字—01—2016—641

定价:46.00 元

承印厂:南昌市红星印刷有限公司

赣人版图书凡属印刷、装订错误,请随时向承印厂调换

序　言

如今我国在国际数学奥林匹克竞赛中已经取得优异的可喜成绩,但不可否认的是全国中、小学数学的整体基础教学水平与先进的美、俄、英、日等国家相比仍存在一定的差距。令人感怀的是中国古代经典文化的四书五经、唐诗宋词等,现在通过百家讲坛和多种途径加大了社会普及宣讲力度,得到了广大群众的喜爱。殊不知中国的算经十书包括《九章算术》《孙子算经》《周髀算经》《五曹算经》《夏侯阳算经》《张丘建算经》《海岛算经》《五经算术》《祖冲之缀术》《辑古算经》是汉唐一千多年间的著名数学教科书,也是中国传统文化的精髓。是勤劳智慧的中华民族对人类数学史奉献的灿烂辉煌篇章。如何让"河图"、"洛书","勾三股四弦五","哥德巴赫猜想"中的"陈氏定理"诸如此类数学经典,也能像经书诗词一样走进寻常百姓家,成为人们津津乐道的话题,这也是后来数学教育工作者义不容辞的职责。或许本书《数学思维与兴趣拓展读本》能为此起到抛砖引玉的作用,则幸甚矣!这亦是作者的尝试和初衷。

正如著名数学家朱悟桐所言:"数学有两种品格,一是工具品格,二是文化品格。那铭刻于头脑的数学精神和数学文化理念,会长期在他们的事业中发挥重要的作用,并受益终生。这就是数学的文化品格,文化理念与文化素质原则之深远意义和至高的价值所在。"诚然数学的工具品格体现在应用数学知识解决实际问题,而数学的文化品格体现于数学的理性与严谨,数学蕴涵的真、善、美,对促进人的素质全面发展有重要的影响。

曾几何时,我酷爱数学,痴迷于钻研数学问题。记得有一次为了证出一道几何题:以一个凸四边形的四边为边长,分别向形外做正方形,求证相对正方形的中心连线相等且垂直。几乎花去了我近一周的所有课内外学习时间。固乃数学需要这种坚持不懈的学习精神,但严重的偏科钻牛角尖却是应试教育的大忌!这也从另一方面说明了勤学好问与名师指点的重要性。我的知识来源除了课堂外主要得益课后广泛的阅读。我自幼父亲病故,家境贫寒,在学校偶尔买牙膏的钱都没有,常常是自己挑着柴火去学校抵交学费,并把换来的零用钱,用于征订数学刊物,或购买数学资料。当由学校奔跑着去一公里开外的乡供销社抢购了一本《高中数学题海》——谭浩著,我如获至宝,十分兴奋。每发现其他同学有数学课外书时,我都会想办法借来阅读。就这样秉持这份兴趣与热情我坚实地走进了数学的乐园。极大

地开拓了知识的视野,并在 1981 年读师范时,研究发现了一组递归数列求通项、求和定理。当时稚嫩的我把稿子寄给了省教育厅,尽管被退稿了,但是同样使我有成就感的愉悦。

后来我成为一名数学教师,在长年累月的教学实践活动中,深刻体会到了提高教学质量的第一要素是积极培养学生的学习兴趣,指导学生提高阅读理解水平和解决问题的能力,通过精选例题、精辟讲解,让学生能学、会学、乐学,形成良好的思维习惯。切忌通过题海战术使学生出现厌学或厌倦情绪。使学生充分认识到学习数学的最高境界不仅仅是为了能解题而考取高分数,而是为了在变化莫测的数学问题中,发现知识间的紧密联系,揭示其内在规律,总结经验,并由此及彼不断地推陈出新,能够提出新问题,创新解题方法和途径,从而获得学习的最大乐趣,促进其身心健康发展!

我极目远眺,浩瀚的数学海洋里抒卷着一层层波光粼粼的浪花,美丽的浪花中央矗立着一座座流光溢彩的灯塔,辉煌的灯塔上端镶嵌着一顶顶精美绝伦的皇冠,珍贵的皇冠旁边点缀着一串串晶莹剔透的明珠……令人陶醉与向往的无限风光美景。我忘情地冲向大海,但是我无法遨游大海去采撷哪怕是一点滴浪花。只是留连忘返在被海水冲积的海滩上,拾掇、洗涤、沉淀在沙滩上的贝壳。再经过一丝不苟的琢磨,编制成完美的图案,呈现给亲爱的读者。衷心祝愿每一位读者可以从中有所收获,有所裨益! 而有所创建,有所奉献是我人生的夙愿与追求。该作品历经多年酝酿构思至与江西省人民出版社签约付梓时,欣然吟诗一首为感:书山有路勤为径,数海无涯乐作舟。不使韶光空过隙,弥坚矢志再耕耘。一生的夙愿,经两年的反复酝酿,慎密构思,精心编撰,终于成就了处女作《数学思维与兴趣拓展读本》。

该书难免有诸多不足或错误之处,恳请读者不吝赐教。另在该书的撰写及发行过程中,得到了不少领导和朋友的关心与帮助。特此深表感谢!

巢传友
2016 年夏

目　录

第一章　趣味数学 …… 1

第 1 讲　趣味数字及等式 …… 1

第 2 讲　有趣的数字谜 …… 9

第 3 讲　记数法及其二进制 …… 23

第 4 讲　数学速算法 …… 28

第二章　基础奥数 …… 44

第 1 讲　整数的奇偶性 …… 44

第 2 讲　数的整除 …… 53

第 3 讲　带余除法及同余 …… 58

第 4 讲　因数与倍数及相关数 …… 65

第 5 讲　完全平方数及其性质 …… 74

第三章　经典数学 …… 86

第 1 讲　一笔画问题 …… 86

第 2 讲　不定方程的整数解 …… 93

第 3 讲　经典不定方程问题 …… 106

第 4 讲　统筹与优化 …… 118

第 5 讲　鸽巢原理 …… 130

第四章　数学故事 …… 136

第 1 讲　数学家的故事 …… 136

第 2 讲　数学故事 …… 149

第3讲　数学诡论与悖论 …… 160

第五章　数学好玩 …… 166
第1讲　发现数学之美 …… 166
第2讲　怎样玩好数学 …… 176
第3讲　一个不等式定理的再现及应用 …… 197

第六章　数学游戏 …… 206
第1讲　扑克类思维游戏 …… 206
第2讲　猜数游戏 …… 213
第3讲　猜年龄游戏 …… 220
第4讲　对策问题游戏 …… 225
第5讲　对策游戏中的递归序列 …… 238

第七章　奇妙的幻方 …… 242
第1讲　幻方的起源及发展 …… 242
第2讲　3阶幻方构制法及探究 …… 244
第3讲　奇数阶幻方构制法汇总 …… 247
第4讲　偶数阶幻方构制法汇总 …… 254
第5讲　4阶完美幻方概述 …… 268

第八章　数学趣题 …… 272
第1讲　古代经典趣题精选 …… 272
第2讲　典型数学趣题精选 …… 282
第3讲　游戏性数学问题精选 …… 292

第一章
趣味数学

数字是数学的基础,看上去简单明了,却又神秘深奥,既严肃平淡,又生动活泼,显得趣味盎然。本章着重从数字的特性、数的记法,数学速算法以及数字谜的相关问题,引导读者走进妙趣横生的数字世界,感受趣味数学的魅力!

第1讲　趣味数字及其等式

数学是从学“数”数开始的,而数的概念也是逐渐发展形成的,数字还有许多鲜为人知的特性,有待我们去探索发现,这也是神奇数字的乐趣。

一、自守数

如果一个数和它自身相乘后,所得的乘积尾数不变,那么这个数就叫“自守数”。

在自然数中,凡尾数是1、5、6的数,无任自乘多少次,得到的积尾数仍然为1、5、6,如21、31、56、135……都是自守数。

例如:$21\times21=441$,$21\times21\times21=9261$。它们积的尾数,即个位数都为1。

二、镜反数

在数学中把一个数倒读后所得的数称为原数的镜反数。镜反数是两个数的一种相互关系,在数学中,一些镜反数特别有趣,具有以下特殊的性质。

其一:镜反数的平方仍然为镜反数。

例如:12与21是互为镜反数,可用符号↔表示互为镜反数的关系,即12↔21。

各自平方后分别为:144↔441,而144与441仍为镜反数144↔441。

再如:13↔31,且169↔961

其二:镜反数相乘所得的积仍然是镜反数。

例如：$12\times13=156$，其镜反数乘积为 $31\times21=651$，

这里 156 和 651 互为镜反数，

即 $12\times13=156\leftrightarrow31\times21=651$。

可以验证这样有趣的镜反数还有：

$11\times12=132\leftrightarrow21\times11=231$，$21\times22=462\leftrightarrow22\times12=264$，

$102\times103=10506\leftrightarrow301\times201=60501$，

$1012\times1031=1043372\leftrightarrow1301\times2101=2733401$。

其三：镜反数均为质数的情况。

如：$13\leftrightarrow31$，13 和 31 都是质数。

具有这种特点的质数称为镜反质数或回文质数，当然寻找确认镜反质数也绝不是轻易之事。

常见的还有：$17\leftrightarrow71$、$113\leftrightarrow311$、$347\leftrightarrow743$、$769\leftrightarrow967$，等等。

三、回文数

如果一个数的镜反数等于本身，那么这个数就被称为回文数，回文数是一种结构优美的自然数，也叫对称数，这种数从左向右读或从右向左读数字都一样。

如：121、23432、10501、6666……都是回文数。

特殊的回文数相乘得到的乘积也是回文数。

如：$11\times11=121$，$1001\times1001=1002001$，$1111\times1111=1234321$……

四、无 8 数

数字 12345679 有些特别，它有八位数字，由数字 1 至 9，唯独没有数字 8，从高位到低位，依次排列而成，可以称之为无 8 数，虽然是由普通的八个数字组成，但是它有许多乘积的特性。

其一：无 8 数与 90 以内的 9 的倍数相乘，即乘以 9、$18=9\times2$、$27=9\times3$、$36=9\times4$、……$81=9\times9$ 时，结果会由相同的数字组成：

$12345679\times9=111111111$，$12345679\times18=222222222$，$12345679\times27=333333333$，……$12345679\times81=999999999$。

其二：无 8 数如果与 3 的倍数（不含 9 的倍数）相乘，即乘以 12、15、21、42……，能得出由 3 个数字重复出现的结果。

$12345679\times12=148148148$，$12345679\times15=185185185$，$12345679\times21=259259259$，$12345679\times42=518518518$，

……

其三：无 8 数若是与几个各数位上的数字和为 10 的两位数相乘，积会让 1、2、3、4、

5、6、7、9、0 轮流环转：

$12345679\times10=123456790$，$12345679\times19=234567901$，$12345679\times28=345679012$，……$12345679\times73=901234567$。

再令人惊奇的是：$12345679\times82=1012345678$，所得的积成了一个缺数字 9 的数。

五、九缺一数

由八个数字组成的数 98765432 是九个非零数字中缺一个数字“1”，所以叫它“九缺一数”，该类数有如下奇妙的特性：

其一：九缺一数除以 2 的商仍为九缺一

如：$98765432\div2=49382716$，数字 1 ~ 9 九个数字中只缺 5，

又再把商 $49382716\div2=24691358$，只缺数字 7，

再把商 $24691358\div2=12345679$，只缺数字 8。

其二：乘法与加法的特性

乘法：把以上的商 12345679 乘以 5，

$12345679\times5=61728395$，只缺数字 4。

加法：以上有两个九缺一数相加的和仍为九缺一数，

即：$61728395+24691358=86419753$，只缺数字 2。

其三：如果再用 9 分别去乘上述 6 个九缺一数，所得乘积的结果是由相同的数字组成：

$98765432\times9=888888888$，$49382716\times9=444444444$，

$24691358\times9=222222222$，$12345679\times9=111111111$，

$61728395\times9=555555555$，$86419753\times9=777777777$。

由此可以看出：如果原数缺数字 n，那么它与 9 的乘积，就是由 $(9-n)$ 所得的那个数字重复组成的九位数。

六、奇妙的 666

666 是一个有趣的数字，它能由算式：$1+2+3+4+\cdots\cdots+36$ 得到。由于结果容易记忆，常用它做珠算的加法练习，666 还有以下有趣的计算等式：

其一：666 可以由 1—9 这九个自然数以不同的形式相加而得：

$1+2+3+4+567+89=666$，$123+456+78+9=666$，

$9+87+6+543+21=666$。

其二：还与它各数位上的数字 6 之间有一些巧妙的联系：

$6+6+6+6^3+6^3+6^3=666$，

$1^6-2^6+3^6=666$，

$(6+6+6)+(6+6+6)^2+(6+6+6)^2=666$。

其三:666 可以是最小的 7 个质数的平方和:

即:$2^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2+17^2=666$。

七、完美之数

如果一个数,它所有的真因子(包括 1)之和正好等于这个数的本身,则称该数为完美之数。

例如:6 的所有真因子是 1、2、3,而 $6=1+2+3$。

28 的所有真因子是 1、2、4、7、14,其和为 $1+2+4+7+14=28$。

496 的所有真因子是 1、2、4、8、16、31、62、124、248,其和为 $1+2+4+8+16+31+62+124+248=496$。

其中 6 和 28 是最小的两个完美数。

由于 6 是古时传说中上帝创造世界的天数,而 28 是月亮绕地球一周所需的天数,所以人们把这样的数又称上帝之数。完美之数具有如下性质:

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$,$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=2$,且 $28=1+2+3+4+5+6+7$,$496=1+2+3+\cdots\cdots+30+31$。可见完美之数能写成连续的最小自然数之和。

八、神奇的数字 9

在构成数的十个数字 0、1、2……9 中,9 是最大的数字,它有许多神奇的功能。

其一:利用 9 的特性,化无限循环小数为分数。

例如:把下列循环小数化为分数。

①$0.\dot{8}$、②$0.\dot{7}\dot{8}$、③$23.\dot{7}\dot{8}$、④$0.23\dot{7}\dot{8}$。

解:①因为:$9\times0.\dot{8}=(10-1)\times0.\dot{8}$

$=10\times0.\dot{8}-0.\dot{8}=8.\dot{8}-0.\dot{8}=8$,

所以:$0.\dot{8}=\frac{8}{9}$。

②因为 $99\times0.\dot{7}\dot{8}=100\times0.\dot{7}\dot{8}-0.\dot{7}\dot{8}=78.\dot{7}\dot{8}-0.\dot{7}\dot{8}=78$,

所以:$0.\dot{7}\dot{8}=\frac{78}{99}=\frac{26}{33}$。

③$23.\dot{7}\dot{8}=23+0.\dot{7}\dot{8}=23+\frac{78}{99}=\frac{23\times99+78}{99}$

$=\frac{23(100-1)+78}{99}=\frac{2300-23+78}{99}=\frac{2378-23}{99}$

$=\frac{2355}{99}=\frac{785}{33}=23\frac{26}{33}$。

④$0.23\dot{7}\dot{8}=23.\dot{7}\dot{8}\div100=\frac{785}{33}\div100=\frac{785}{3300}=\frac{157}{660}$。

由此可得无限循环小数写成分数的方法：

(1)将纯循环小数写成分数，分子是一个循环节的数字组成的数，分母各位数字都是9，9的个数与循环节中的数字个数相同。

(2)将混循环小数写成分数，分子是不循环部分与循环节连成的数字组成的数，减去不循环部分数字组成的数之差；分母的头几位数字是9，9的个数与循环节的数字个数相同，末几位数字是0，0的个数与不循环部分的数字个数相同。

再举例验算如下：

如：$0.\dot{2}37\dot{8}=\frac{2378}{9999}$，$0.2\dot{3}8\dot{0}=\frac{2380-2}{9990}=\frac{2378}{9990}$，故 $2.\dot{3}8\dot{0}=\frac{2378}{999}$，

$0.24\dot{0}\dot{2}=\frac{2402-24}{9900}=\frac{2378}{9900}$，故 $24.\dot{0}\dot{2}=\frac{2378}{99}$，

$0.264\dot{2}=\frac{2642-264}{9000}=\frac{2378}{9000}$，故 $264.\dot{2}=\frac{2378}{9}$。

值得说明的是，对于循环小数化成分数的问题，关键在于理解和掌握方法，而不要死记硬背，当然最后的结果还需进行约分化简。

其二：任意一个大于5的质数，都等于某个由数字9组成的自然数除以另一个自然数的商。

例如：$7=\frac{999999}{142857}$，$13=\frac{999999}{76923}$，$17=\frac{9999999999999999}{588235294117647}$。

设M是质数，$M>5$，

因为M不能被10n整除（n为自然数），而$\frac{1}{M}$是有理数，所以$\frac{1}{M}$必定是无限循环小数。

再按以上所述的化循环小数为分数的法则，可设$\frac{1}{M}=\frac{A}{B}$（其中A为一个自然数，而B的前面数字是连续的9，后面数字是连续的0），故M的形式为：$M=\frac{B}{A}$。

这里M为质数，A能被B整除，故数B后面连续的0必可约去，约去0后，分子B就剩下前面连续的数字9，于是必定有：$M=\frac{9\cdots\cdots9（共k个9）}{N}$，N为自然数，

则：$\frac{1}{M}=\frac{N}{9\cdots\cdots9（共k个9）}$，即$\frac{1}{M}$必为纯循环小数。

故N是这个纯循环小数的循环节数，且N是数位不多于k位的多位数。

其三：和为9。

任意写一个多位数，把这个数乘以9的若干倍，乘积记为A，再把A的各位数字相加，得到的和记为B，最后再把B的各位数字相加，这样进行下去，最后所得到的数字之和为9。

例如：2017×3456，3456是9的倍数，

$2017\times3456=6970752=A$

而 6970752 中的各位数字相加得到：

$B=6+9+7+0+7+5+2=36$，

把 36 中的数字相加 $3+6=9$。

再如：$2017\times9\times34567=627494751=A$，

$B=6+2+7+4+9+4+7+5+1=45$，

结果的数字之和为 $4+5=9$。

为什么最后一定得到 9 呢？这是因为 A 显然能被 9 整除，因此，其数字和 B 也能被 9 整除，这样最后的结果数字之和必定是 9。

九、轮回数

用一个多位数乘以某个数，如果所得乘积的数字恰好是这个多位数原数字的一种依次轮流回转，则称这样的多位数为轮回数。

例如：(1) $142857\times1=142857$，(2) $142857\times2=285714$，

(3) $142857\times3=428571$，(4) $142857\times4=571428$，

(5) $142857\times5=714285$，(6) $142857\times6=857142$。

可以看出轮回数 142857 分别乘以 1、2、3、4、5、6 后，该数的六个数字分别作为乘积的最高位数字，其余数字则依次轮流回转。

再由(1)+(6)=(2)+(5)=(3)+(4)可得：$142857\times7=999999$ 结果为 6 个相同的数字 9 组成。

进而可得：$\frac{1}{7}=\frac{142857}{999999}=0.\dot{1}4285\dot{7}$，巧的是原来 142857 恰为$\frac{1}{7}$的循环节数。

再如：$76923\times3=230769$，$76923\times4=307692$，

$76923\times9=692307$，$76923\times10=769230$，

$76923\times12=923076$，$76923\times13=999999$。

故有$\frac{1}{13}=\frac{76923}{999999}=0.\dot{0}7692\dot{3}$。

再如：$588235294117647\times2=1176470588235294$

$588235294117647\times3=1764705882352941$

……

$588235294117647\times16=9411764705882352$，

$588235294117647\times17=9999999999999999$。

由此可得：$\frac{1}{17}=\frac{588235294117647}{9999999999999999}=0.\dot{0}58823529411764\dot{7}$。

像这样，数中的每个数字都可在任意位置上轮回（含 0），则称这个数为全轮回数，可以验算“无 8”数：12345679 也是全轮回数，另外还有只能部分轮回的轮回数。

如 $153846\times3=461538$，$153846\times4=615384$。

再令人玩味的是：用同一个数与另一些因数相乘，所得的积将出现其他数字轮回的现象。如：

$76923\times2=153846$，$76923\times5=384615$，$76923\times6=461538$，

$76923\times7=538461$，$76923\times8=615384$，$76923\times11=846153$。

十、趣味数字等式

其一：特殊数字等式的匀称相等。

下面给出的几组等式让人有美轮美奂的感觉：

第 1 组等式：

$$1\times8+1=9$$
$$12\times8+2=98$$
$$123\times8+3=987$$
$$1234\times8+4=9876$$
$$\cdots\cdots$$
$$123456789\times8+9=987654321$$

第 2 组等式：

$$1\times9+2=11$$
$$12\times9+3=111$$
$$123\times9+4=1111$$
$$1234\times9+5=11111$$
$$\cdots\cdots$$
$$123456789\times9+10=1111111111$$

第 3 组等式：

$$9\times9+7=88$$
$$98\times9+6=888$$
$$987\times9+5=8888$$
$$9876\times9+4=88888$$
$$\cdots\cdots$$
$$98765432\times9+0=888888888$$

第 4 组等式：

$$1\times1=1$$
$$11\times11=121$$
$$111\times111=12321$$
$$1111\times1111=1234321$$
$$\cdots\cdots$$
$$111111111\times111111111=12345678987654321$$

其二:杨辉三角中的对称关系。

在初等数学中,有一个重要的二项式定理:

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$(n 为自然数)。

其中组合数 C_n^r 为展开式中各项的系数(n、r 为自然数),

$C_n^r = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r\cdot(r-1)\cdot(r-2)\cdots\cdots 3\times 2\times 1}$ 且 $C_n^r = C_n^{n-r}$。

当 n = 0、1、2、3、4、5……所有这些系数组成的数字图常被称为杨辉三角,如下:

$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = a+b$	1 1
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5 = a^3 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	1 5 10 10 5 1
……	

观察每一行的数字,不难发现,它们是对称的,是关于"杨辉三角"底边上的高为对称轴,在每一行左右对称的数字是相等的,并且两个 1 之间的数字,都等于上一行相应两肩数字之和,以及第 n 行的数字和为 2^n。

即:

$$1 = 1 = 2^0$$
$$1+1 = 2 = 2^1$$
$$1+2+1 = 4 = 2^2$$
$$1+3+3+1 = 8 = 2^3$$
$$1+4+6+4+1 = 16 = 2^4$$

……

并由此可得一个重要的组合等式:

因为:$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$,令 a = b = 1,所以:$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots\cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$。

另外:如果将杨辉三角每行数字顺次排写,每个数字占一位(满 10 者进位),如第 5 行的各数依次为:

1、5、10、10、5、1,把它写成一个六位数时,后 10 向前一位进 1,前 10 加 1 = 11,再进一位前 5 加 1 为 6。

故这个数为:$161051 = 11^5$

由此又可以发现一组奇妙的等式,第 n 行数排列所得到的结果等于 11 的 n 次方。

用等式表示为:$C_n^0 \times 10^n + C_n^1 \times 10^{n-1} + \cdots\cdots + C_n^{n-1} \times 10^1 + C_n^n \times 10^0 = 11^n$

具体表示为：

第 0 行	1	$1=11^0$
第 1 行	1　1	$11=11^1$
第 2 行	1　2　1	$121=11^2$
第 3 行	1　3　3　1	$1331=11^3$
第 4 行	1　4　6　4　1	$14641=11^4$
第 5 行	1　5　10　10　5　1	$161051=11^5$

……

其三：奇异的等式。

若 ab、bc 分别表示一个两位数，a、b、c 均为数字，当$\frac{ab}{bc}=\frac{a\cdot b}{b\cdot c}=\frac{a}{c}$时，你会感到惊奇吗？

全世界有很大影响的两份杂志曾联合邀请全世界的数学家们评选“近 50 年的最佳数学问题”，其中有一道相当简单的问题，有哪些分数$\frac{ab}{bc}$，不合理地约去 b 得到$\frac{a}{c}$，结果却是对的？

经过一种简单计算，可以找到四个分数：$\frac{16}{64}$、$\frac{26}{65}$、$\frac{19}{95}$、$\frac{49}{98}$。

这个问题涉及运算谬误，结果却歪打正着地正确了，正体现了数学具有特殊性的趣味。

第 2 讲　有趣的数字谜

数字是永远值得探索的谜。有一种起源于中国古代而风靡世界的数字谜问题：即在数字有关的算式或问题中，给出它们的联系，通过推理破解算式中的未知数或符号，有一定的趣味性，对培养学生的学习兴趣、提高数学逻辑思维能力和判断能力大有裨益。

一、找规律填数

如果有一列数，按照一定的规律排列，请找出中间空缺的某项或者求出某项的值，这时需要观察这列数项与项之间的数值特征与联系，根据变化情况，找出其排列规律，从而求出答案。

例题 1：按规律填数。

(1)1、2、3、5、8、13、(　　)、(　　)。

解析：可以发现这列数从第三项开始，每项等于前两项的和。

$3=2+1$、$5=3+2$、$8=5+3$、$13=8+5$。

因此括号里应填 21、34。

(2)2、3、5、8、12、(　　)、(　　)。

解析:很容易看出这列数的排列规律是:

$3=2+1$,$5=3+2$,$8=5+3$,$12=8+4$。

即:$a_2=a_1+1$,$a_3=a_2+2$,$a_4=a_3+3$……

因此括号里应填 17、23。

(3)1、$\frac{1}{2}$、2、1、3、$1\frac{1}{2}$、(　　)、(　　)。

解析:考察其奇数项 1、2、3……是自然数排列,其偶数项$\frac{1}{2}$、1、$1\frac{1}{2}$是公差为$\frac{1}{2}$的等差数列。

因此括号里应填 4、2。

(4)0、3、8、15、24、(　　)、48、63。

解析:通过计算各项与它前一项的差依次是:3、5、7、9,呈奇数排列规律,接着 $24+11=35$,且 $48-35=13$、$63-48=15$,故括号里应填 35。

(5)2、3、5、9、17、(　　)、65。

解析:通过比较各项与前一项的关系,可得:$3=2+2^0$、$5=3+2^1$、$9=5+2^2$、$17=9+2^3$,

以此规律递推:$17+2^4=33$,且满足 $65=33+2^5$

所以:括号里应填的值为 33。

例题 2:按规律填数,并求出第 100 项的值。

(1)1、5、11、19、29、41、(　　)……

解析:由 $1=0+1\times1$,$5=1+2\times2$,$11=2+3\times3$,

$19=3+4\times4$,$29=4+5\times5$,$41=5+6\times6$。

可知括号里应填 $6+7\times7=55$。

所以:第 100 项的值为 $99+100\times100=10099$。

(2)6、6、4、0、−6、−14、(　　)……

解析:注意到这列数有个共同的特点是:每个数都可以分解成两个因数的积。

这列数可写成:3×2、2×3、1×4、0×5、$(-1)\times6$、$(-2)\times7$,进而可发现其中的规律是:每个积的两个因数的和是 5,有一个因数是由 3 始,按减 1 递减,另一个因数是由 2 始,按加 1 递增。

故括号里的值为 $-3\times8=-24$。

它的第 100 项的值为:$(-96)\times101=-9696$。

数字推理综述:像这种给出一列数(也叫数列),通过观察、分析,找出其中排列规律的问题,一般地称为数字推理问题。这对于培养学生的逻辑思维的敏锐性、提高学