

胡金德 谭泽光 梁恒 考研数学系列

命题人与阅卷人 联袂打造

2018 考研数学

历年真题
名师点评

(数学二)

清华大学 胡金德

清华大学 谭泽光 主编

清华大学 梁恒

- 专题解读——条分缕析历年真题
- 题型丰富——科学归纳海量题目
- 名师点拨——深度揭秘真题本质
- 解读多维——全面掌握解题技巧



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

2018 考研数学

历年真题
名师点评

(数学二)

清华大学

清华大学

清华大学

胡金德

谭洋

梁恒



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书精心编排了2001年至2017年共17年的数学二考研真题,依照考试大纲的要求,按知识点对所有题目进行讲解,体系清晰,分析细致,讲解详尽,便于考生系统复习。本书可作为广大考生复习阶段模拟练习的重要题库,起到查漏补缺、指导复习方向的作用。

本书可供将参加2018年研究生入学考试数学二的考生备考使用。

图书在版编目(CIP)数据

2018 考研数学历年真题名师点评. 数学二 / 胡金德, 谭泽光, 梁恒主编. -- 北京: 北京航空航天大学出版社, 2017. 2

ISBN 978-7-5124-2343-5

I. ①2… II. ①胡… ②谭… ③梁… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 031624 号

版权所有,侵权必究。

2018 考研数学历年真题名师点评(数学二)

胡金德 谭泽光 梁恒 主编

责任编辑 刘晓明

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:bhwaiyu@163.com 邮购电话:(010)82316936

北京兴华昌盛印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1092 1/16 印张:22.75 字数:582千字

2017年3月第1版 2017年3月第1次印刷

ISBN 978-7-5124-2343-5 定价:40.80元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

前 言

全国工学、经济学硕士研究生入学统一考试(数学)实施多年来,每年命题都紧扣大纲,形成了相对稳定、完整的模式。对这种模式的深入了解,有助于考生掌握命题规律,熟悉考试题型,并争取优异成绩。因此,在每一套考研数学辅导丛中,真题解析类的图书都是重要的组成部分之一。通过练习真题,可以有效地帮助考生把握数学考试大纲的命题指导思想、原则和趋势。真题是广大考生和教师了解试题信息、分析命题重点、总结命题规律和揣摩命题动态的重要依据。本书可作为考生复习阶段模拟练习的重要题库,起到查漏补缺、指导复习方向的作用。

因此,一本经典的历年考试真题解析教程应当是内容完整、分析细致、求解详尽、总结全面的,这也是广大考生所热切期待的。本丛书作者就是依据上述精神,精心编纂了本册《2018 考研数学历年真题名师点评(数学二)》。本书布局巧妙,内容精细,综合了众多相关教程和复习指导书的优点,具有如下几个特点:

1. 内容细致,题型丰富

本书共分三篇。第一篇为 2001—2016 年真题汇编。第二篇为历年真题分类解析,本部分依照考试大纲的要求,按知识点归纳,对所有题目分专题进行讲解,体系清晰,便于考生系统复习。每一专题的题目都按选择、填空、简答排序,内容由浅入深,方便考生循序渐进地领会各个知识点。第三篇将 2017 年最新真题及解析单列出来,方便读者熟悉最新考题,对真题的题量、题型和难度有初步的认识。同时本书也综合了其他几类试卷(如数学一、数学三)中的一些经典真题,以求对考研大纲知识点的全面覆盖。

2. 解析详尽,总结全面

对于每一道题目,编者都为广大考生设计了两个重要板块:【解析】和【知识点归纳】。【解析】是依据考研名师提供的经典讲义教案,提供最新的解题思路、方法和技巧,给出详细准确的求解过程,以帮助考生开拓思路,提高解题能力。【知识点归纳】则是对每一道题目所涉及的知识进行归纳总结,让考生对每一道题目所需的知识点有一个直接的认知,方便查漏补缺、完善知识体系。此外,【大纲导读】为考生提供了过去一年的考试大纲,对考生细致了解考试内容、把握重点将起到重要的作用。【本章小结】则全面回顾了本章所涉及的知识,有助于考生系统总结,温故知新。

3. 精心设计,完美自测

除上述经典部分之外,编者还在第一篇历年真题汇编中设计了“参考答案及自测表”,对所有真题进行题型归类,方便考生归纳总结复习的薄弱点,及时发现并弥补自身知识体系的不足。

考生在使用本书时,应该按章节先结合教材、复习全书同步复习相关知识点,同时选取 5 套左右的真题试卷作为阶段性模拟测验。在完成第一次系统复习后,再选取 5 套左右的真题试卷进行模拟演练,并仔细填写自测表,总结错误类型,进行第二轮专项突破复习。在完成第二轮复习之后,做完剩下的考研真题试卷,再次检查自身的错误,进一步完善自己的知识结构。在每次做模拟试卷时,都应严格按照考试时间进行,稳步提升对考试时间的掌控能力。另外,在每次做

完一套考研真题试卷之后,考生都应当对自己的答卷进行详细的归纳总结,查清出错原因,总结自己是在基本理论、基本概念和基本方法方面有欠缺,还是在做题技巧、知识的综合和灵活运用等方面存在不足。总之,这样的归纳总结过程对于考生的复习来说是十分必要的,其重要程度与做题无异,考生应当认真对待这一复习环节。

编者力求编写一套更为优秀的辅导丛书,但因水平有限,难免有不足之处,恳请广大考生读者批评指正。

最后,真诚地祝愿广大考生通过辛勤的努力,取得良好的成绩,考入理想的学府。

编者

2017年1月

目 录

第一篇 历年真题汇编(2001—2016)

2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题	3
2016 年数学二真题参考答案及自测表	5
2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题	7
2015 年数学二真题参考答案及自测表	9
2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题	11
2014 年数学二真题参考答案及自测表	13
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题	15
2013 年数学二真题参考答案及自测表	17
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题	19
2012 年数学二真题参考答案及自测表	21
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题	23
2011 年数学二真题参考答案及自测表	25
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题	27
2010 年数学二真题参考答案及自测表	29
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题	31
2009 年数学二真题参考答案及自测表	34
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题	36
2008 年数学二真题参考答案及自测表	38
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题	40
2007 年数学二真题参考答案及自测表	42
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题	45
2006 年数学二真题参考答案及自测表	47
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题	49
2005 年数学二真题参考答案及自测表	51
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题	53
2004 年数学二真题参考答案及自测表	55
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题	57
2003 年数学二真题参考答案及自测表	59
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题	61
2002 年数学二真题参考答案及自测表	63
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题	65
2001 年数学二真题参考答案及自测表	67

第二篇 真题分类解析(2001—2016)

第一部分 高等数学	71
第一章 函数、极限、连续	71
§ 1 函数的性质	71
§ 2 极限的概念与性质	72
§ 3 求数列的极限	74
§ 4 求函数的极限	76
§ 5 无穷小及其阶的比较	84
§ 6 极限中参数的求解	91
§ 7 函数的连续性与间断点	94
§ 8 函数的渐近线问题	99
第二章 一元函数微分学	104
§ 1 导数与微分的概念	104
§ 2 导数的物理和几何意义	107
§ 3 导数与微分的计算	113
§ 4 隐函数、反函数及参数函数求导	114
§ 5 分段函数求导	118
§ 6 n 阶导数	119
§ 7 函数单调性、极值和最值	121
§ 8 拐点与凹凸性	127
§ 9 函数零点与方程根的讨论	134
§ 10 微分中值定理	136
§ 11 不等式	142
§ 12 带拉格朗日余项的泰勒公式	147
第三章 一元函数积分学	149
§ 1 原函数与不定积分的概念和性质	149
§ 2 求解不定积分	151
§ 3 定积分的概念和性质	154
§ 4 求解定积分	160
§ 5 变限积分函数的性质	162
§ 6 反常积分的性质和计算	169
§ 7 一元函数积分学的几何、物理应用	173
第四章 多元函数微积分学	189
§ 1 偏导数与全微分的基本概念	189
§ 2 偏导数与全微分的计算	192
§ 3 多元复合函数求导	194
§ 4 隐函数求导	200
§ 5 多元函数的极值和最值	204

§ 6	二重积分的概念与性质	211
§ 7	计算二重积分	214
§ 8	二重积分的极坐标变换	219
§ 9	利用区域对称和函数奇偶性求解二重积分	223
§ 10	交换积分次序	226
第五章	常微分方程	231
§ 1	可分离变量的微分方程	231
§ 2	齐次方程	232
§ 3	一阶线性微分方程	233
§ 4	可降阶的高阶微分方程	235
§ 5	线性微分方程的特解和通解	238
§ 6	微分方程的应用	244
第二部分	线性代数	253
第一章	行列式	253
§ 1	行列式的计算	253
§ 2	三对角线行列式的计算	255
§ 3	抽象型行列式的计算	256
第二章	矩 阵	260
§ 1	矩阵的基本运算	260
§ 2	矩阵求逆	261
§ 3	分块矩阵	263
§ 4	伴随矩阵	265
§ 5	初等变换	266
§ 6	矩阵的秩	269
§ 7	求解矩阵方程	273
第三章	向 量	278
§ 1	线性相关性与线性表示	278
§ 2	特征向量与向量组的线性相关性	281
§ 3	向量组的秩与线性相关性	283
§ 4	极大线性无关组	286
§ 5	向量组的等价问题	289
第四章	线性方程组	291
§ 1	线性方程组解的判定、性质与结构	291
§ 2	齐次线性方程组的基础解系与通解	293
§ 3	非齐次线性方程组的通解	297
§ 4	两方程组的公共解与同解问题	305
第五章	矩阵的特征值与特征向量	308
§ 1	矩阵特征值与特征向量的求解	308
§ 2	相似矩阵的性质及其判定	310
§ 3	方阵的对角化	313

§ 4 实对称矩阵及其对角化	319
第六章 二次型	326
§ 1 二次型的基本概念	326
§ 2 正交变换化二次型为标准形	330
§ 3 合同矩阵的判定	335
§ 4 正定矩阵与正定二次型	336

第三篇 最新考研真题及答案解析

2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题	341
2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学二答案解析	344
后 记	353

第一篇

历年真题汇编 (2001—2016)



2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $a_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1)$, $a_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x})$, $a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是 【 】

- (A) a_1, a_2, a_3 . (B) a_2, a_3, a_1 .
 (C) a_2, a_1, a_3 . (D) a_3, a_2, a_1 .

(2) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是 【 】

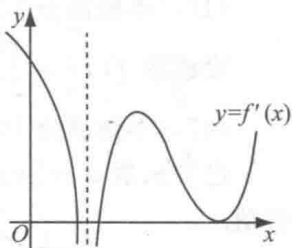
- (A) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1. \end{cases}$ (B) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1. \end{cases}$
 (C) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$ (D) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$

(3) 反常积分 ① $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$, ② $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ 的敛散性为 【 】

- (A) ① 收敛, ② 收敛. (B) ① 收敛, ② 发散.
 (C) ① 发散, ② 收敛. (D) ① 发散, ② 发散.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,其导函数的图形如图所示,则 【 】

- (A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.
 (B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点.
 (C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点.
 (D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.



(5) 设函数 $f_i(x) (i=1,2)$ 具有 2 阶连续导数,且 $f''_i(x_0) < 0 (i=1,2)$,若两条曲线 $y = f_i(x) (i=1,2)$ 在点 (x_0, y_0) 处具有公切线 $y = g(x)$,且在该点处曲线 $y = f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y = f_2(x)$ 的曲率,则在 x_0 的某个邻域内,有 【 】

- (A) $f_1(x) \leq f_2(x) \leq g(x)$. (B) $f_2(x) \leq f_1(x) \leq g(x)$.
 (C) $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$. (D) $f_2(x) \leq g(x) \leq f_1(x)$.

(6) 已知函数 $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$, 则 【 】

- (A) $f'_x - f'_y = 0$. (B) $f'_x + f'_y = 0$.
 (C) $f'_x - f'_y = f$. (D) $f'_x + f'_y = f$.

(7) 设 A, B 是可逆矩阵,且 A 与 B 相似,则下列结论错误的是 【 】

- (A) A^T 与 B^T 相似. (B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似.

(C) $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似.(D) $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似.

(8) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的正负惯性指数分别为 1, 2, 则

(A) $a > 1$.(B) $a < -2$.(C) $-2 < a < 1$.(D) $a = 1$ 或 $a = -2$.

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $y = \frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为_____.

(10) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2\sin \frac{2}{n} + \cdots + n\sin \frac{n}{n} \right) =$ _____.

(11) 以 $y = x^2 - e^x$ 和 $y = x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为_____.

(12) 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t) dt$, 则当 $n \geq 2$ 时, $f^{(n)}(0) =$ _____.

(13) 已知动点 P 在曲线 $y = x^3$ 上运动, 记坐标原点与点 P 间的距离为 l . 若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 v_0 , 则当点 P 运动到点 $(1, 1)$ 时, l 对时间的变化率是_____.

(14) 设矩阵 $\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 等价, 则 $a =$ _____.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^2}}$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$, 求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

(17) (本题满分 10 分)

已知函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$ 确定, 求 $z = z(x, y)$ 的极值.

(18) (本题满分 10 分)

设 D 是由直线 $y = 1, y = x, y = -x$ 围成的有界区域, 计算二重积分 $\iint_D \frac{x^2 - xy - y^2}{x^2 + y^2} dx dy$.

(19) (本题满分 10 分)

已知 $y_1(x) = e^x, y_2(x) = u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$ 的解, 若 $u(-1) = e, u(0) = -1$, 求 $u(x)$, 并写出该微分方程的通解.

(20) (本题满分 11 分)

设 D 是由曲线 $y = \sqrt{1-x^2} (0 \leq x \leq 1)$ 与 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$ 围成的平面区域, 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

(21) (本题满分 11 分)

已知 $f(x)$ 在 $[0, \frac{3\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0, \frac{3\pi}{2})$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数, 且 $f(0) = 0$.

(I) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值;

(II) 证明 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

(22)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{bmatrix}$, 且方程组 $Ax = \beta$ 无解.

(I) 求 a 的值;

(II) 求方程组 $A^T Ax = A^T \beta$ 的通解.

(23)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

(I) 求 A^{99} ;

(II) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$. 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

2016 年数学二真题参考答案及自测表

一、选择题

(1)B. (2)D. (3)B. (4)B. (5)A. (6)D. (7)C. (8)C.

二、填空题

(9) $y = x + \frac{\pi}{2}$. (10) $\sin 1 - \cos 1$. (11) $y' - y = 2x - x^2$.

(12) $2^{n-1} \times 5$. (13) $2\sqrt{2}v_0$. (14) 2.

三、解答题

(15) $e^{\frac{1}{3}}$. (16) 最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

(17) 极大值点为 $(-1, -1)$, 且极大值为 $z(-1, -1) = 1$. (18) $1 - \frac{\pi}{2}$.

(19) $u(x) = -c_1(2x+1)e^{-x} + c_2$; 通解为 $y(x) = C_1 e^x + C_2(2x+1)$, C_1, C_2 为任意实数.

(20) $V = \frac{18}{35}\pi, S = \frac{16\pi}{5}$. (21)(I) $\bar{f} = \frac{1}{3\pi}$; (II) 略.

(22)(I) $a = 0$; (II) 通解为 $k \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

(23)(I) $A^{99} = \begin{bmatrix} -2 + 2^{99} & 1 - 2^{99} & 2 - 2^{99} \\ -2 + 2^{100} & 1 - 2^{100} & 2 - 2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$$(II) \begin{cases} \beta_1 = (-2 + 2^{99})\alpha_1 + (-2 + 2^{100})\alpha_2, \\ \beta_2 = (1 - 2^{99})\alpha_1 + (1 - 2^{100})\alpha_2, \\ \beta_3 = (2 - 2^{98})\alpha_1 + (2 - 2^{99})\alpha_2. \end{cases}$$

题号	题目类型	详解页码	分值	得分	错误分析
1	等价无穷小替换	P84	4		
2	原函数的概念	P160	4		
3	反常积分的敛散性判定	P169	4		
4	导数与函数性态	P127	4		
5	曲率的概念、二阶导数与拐点	P127	4		
6	二元函数偏导数的计算	P192	4		
7	相似矩阵的定义及性质	P310	4		
8	惯性指数的定义与计算	P326	4		
9	函数的渐近线	P101	4		
10	利用定积分定义求数列极限	P74	4		
11	微分方程解的结构	P240	4		
12	变上限积分求导与函数的 n 阶导数	P120	4		
13	导数的物理应用	P109	4		
14	矩阵等价的定义	P271	4		
15	求解幂指型函数极限	P80	10		
16	分段函数求导与一元函数的最值	P123	10		
17	隐函数求导与二元函数极值	P207	10		
18	利用对称性求解二重积分	P214	10		
19	微分方程解的结构	P243	10		
20	定积分的几何意义	P175	11		
21	定积分的物理应用与函数的零点问题	P176	11		
22	非齐次线性方程组解的结构、性质及判定	P297	11		
23	矩阵对角化与向量的线性表示	P313	11		

2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列反常积分收敛的是

【 】

(A) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$

(B) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx.$

(C) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx.$

(D) $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx.$

(2) 函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内

【 】

(A) 连续.

(B) 有可去间断点.

(C) 有跳跃间断点.

(D) 有无穷间断点.

(3) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$), 若 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则

【 】

(A) $\alpha - \beta > 1.$

(B) $0 < \alpha - \beta \leq 1.$

(C) $\alpha - \beta > 2.$

(D) $0 < \alpha - \beta \leq 2.$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示, 则曲线 $y = f(x)$ 的拐点的个数为

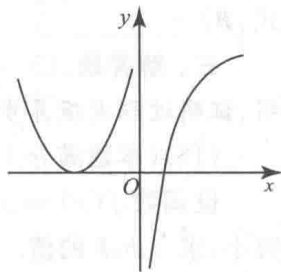
【 】

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.



(5) 设函数 $f(u, v)$ 满足 $f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$, 则 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1 \\ v=1}}$ 与 $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1 \\ v=1}}$

【 】

依次是

(A) $\frac{1}{2}, 0.$

(B) $0, \frac{1}{2}.$

(C) $-\frac{1}{2}, 0.$

(D) $0, -\frac{1}{2}.$

(6) 设 D 是第一象限由曲线 $2xy = 1, 4xy = 1$ 与直线 $y = x, y = \sqrt{3}x$ 围成的平面区域, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy =$

【 】

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr.$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr.$

(7) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{bmatrix}$. 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 有无穷

多解的充分必要条件为

- (A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$. (B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$.
 (C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$. (D) $a \in \Omega, d \in \Omega$.

(8) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换为 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = (e_1, e_2, e_3)$. 若 $Q = (e_1, -e_3, e_2)$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为

- (A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$. (B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.
 (C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. (D) $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = 3t + t^3, \end{cases}$ 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} =$ _____.

(10) 函数 $f(x) = x^2 \cdot 2^x$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) =$ _____.

(11) 设 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^{x^2} xf(t)dt$, 若 $\varphi(1) = 1, \varphi'(1) = 5$, 则 $f(1) =$ _____.

(12) 设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的解, 且在 $x = 0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3, 则 $y(x) =$ _____.

(13) 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 确定, 则 $\left. dz \right|_{(0,0)} =$ _____.

(14) 若 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2, -2, 1$, $B = A^2 - A + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 则行列式 $|B| =$ _____.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x, g(x) = kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 是等价无穷小, 求 a, b, k 的值.

(16) (本题满分 10 分)

设 $A > 0, D$ 是由曲线段 $y = A \sin x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 及直线 $y = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域, V_1, V_2 分别表示 D 绕 x 轴与 y 轴旋转所成旋转体的体积, 若 $V_1 = V_2$, 求 A 的值.

(17) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x, y)$ 满足

$$f''_{xy}(x, y) = 2(y+1)e^x, \quad f'_x(x, 0) = (x+1)e^x, \quad f(0, y) = y^2 + 2y,$$

求 $f(x, y)$ 的极值.

(18) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D x(x+y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$.