矩阵论及其应用

李 路 王国强 吴中成 编著

東華大學出版社

矩阵论及其应用

李　路　王国强　吴中成　编著

東華大學出版社
·上海·

内 容 简 介

本书共9章，主要包括线性空间与线性变换、内积空间、范数理论、矩阵的标准形、矩阵分析、矩阵分解、矩阵的广义逆、特殊矩阵、矩阵的 Kronecker 积与 Hadamard 积，各章均配有习题. 与传统的矩阵论教材相比，本书更加强调矩阵理论的应用，同时应用案例分析，以及数学软件 MATLAB 中有关矩阵理论的命令与函数的介绍，使读者能在较短时间内掌握较全面的矩阵理论及应用.

本书可作为理工科硕士研究生和工程硕士研究生的教材，以及高年级本科生选修课教材，也可供工程技术或研究人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论及其应用 / 李路，王国强，吴中成编著. —
上海：东华大学出版社，2019. 10
ISBN 978-7-5669-1639-6

Ⅰ.①矩… Ⅱ.①李… ②王… ③吴… Ⅲ.①矩阵论
—研究生—教材 Ⅳ.①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 189345 号

矩阵论及其应用
JUZHENLUN JIQI YINGYONG

编　　著：李　路　王国强　吴中成
出　　版：东华大学出版社(上海市延安西路 1882 号，200051)
网　　址：http://dhupress.dhu.edu.cn
天猫旗舰店：http://dhdx.tmall.edu.cn
营 销 中 心：021-62193056　62373056　62379558
印　　刷：苏州望电印刷有限公司
开　　本：787 mm×1092 mm　1/16　印张：11.75
字　　数：290 千字
版　　次：2019 年 10 月第 1 版
印　　次：2019 年 10 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5669-1639-6
定　　价：35.00 元

前　言

矩阵论是理工科硕士研究生和工程硕士研究生重要的学位课程. 本课程的学习可使研究生较系统地掌握矩阵论课程的基本概念和基本理论知识，并具备一定的抽象概括能力、逻辑推理能力和数学应用能力，为后续课程学习奠定扎实的数学基础.

矩阵论已成为处理大量有限维空间形式与数量关系的强有力工具，其不仅使得问题描述可以具有简洁的形式，而且能使问题的研究深入系统地开展. 特别是计算机软硬件技术的快速发展，不仅为矩阵论的应用开辟了广阔的前景，也为工程技术的研究开拓了新的研究途径. 矩阵论和方法对培养学生的科学素质、数学思维能力、数值计算与数据处理能力等具有不可替代的作用，对于将来从事工程技术工作的理工科硕士研究生和工程硕士研究生来说，掌握矩阵论和方法极其重要.

矩阵论课程的理论性强，概念比较抽象，研究生在学习矩阵论时，往往感到概念多、算法多，难以将理论知识应用于工程实践. 为了使研究生更好地掌握该课程的基本理论和应用，编者根据多年从事矩阵论课程教学工作的经验，在简明的理论介绍及方法总结之后，通过有代表性的应用案例，揭示矩阵论的思想和方法. 本书的案例针对性强，能够充分展示矩阵论的实际应用. 部分案例选自研究生数学建模的赛题，不仅能强化研究生对矩阵论课程体系的掌握，也能培养研究生的创新能力.

全书共9章：第1章，线性空间与线性变换；第2章，内积空间；第3章，范数理论；第4章，矩阵的标准形；第5章，矩阵分析；第6章，矩阵分解；第7章，矩阵的广义逆；第8章，特殊矩阵；第9章，矩阵的Kronecker积与Hadamard积. 各章配备了相应的习题，讲完全书约需48学时.

本书出版得到了上海工程技术大学研究生处和数理与统计学院的大力支持. 本书在编写过程中，参考了同行的工作，他们的工作不仅为本书的编写提供了丰富的素材，也提供了有益的借鉴. 周雷老师为本书的排版工作提供了帮助，研究生舒时克、邓晶参与了文稿的输入与校对工作，在此，作者对他们表示衷心的感谢.

本书第1、2、4、5、6章由李路编写，第3、7章由王国强编写，第8、9 章由吴中成编写，全书由李路统稿. 由于时间匆忙，书中难免有错误和不当之处，敬请读者批评指正.

编　者

符 号 说 明

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵$\boldsymbol{A}$的转置
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$	矩阵$\boldsymbol{A}$的共轭转置
$\boldsymbol{A}^{*}$	矩阵$\boldsymbol{A}$的共轭
$\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)$	n 阶对角矩阵
$\det(\boldsymbol{A})$	矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式
$\dim V$	线性空间V 的维数
$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})$	矩阵$\boldsymbol{A}$的条件数
$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$	矩阵$\boldsymbol{A}$的秩
$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$	矩阵$\boldsymbol{A}$的迹
$P[t]$	一元多项式集合
$P_n[t]$	不超过n次的一元多项式集合
$C[a,b]$	连续函数集合
$\rho(\boldsymbol{A})$	矩阵$\boldsymbol{A}$的谱半径
$\Vert\boldsymbol{A}\Vert$	矩阵$\boldsymbol{A}$的范数
$\boldsymbol{I}$	单位矩阵
$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{C}$	复数域
$\mathbf{R}^n$	n维实数域
$\mathbf{C}^n$	n维复数域
$\mathbf{R}^{m\times n}$	实$m\times n$ 矩阵集合
$\mathbf{C}^{m\times n}$	复$m\times n$ 矩阵集合
$\mathbf{R}_r^{m\times n}$	秩为r的实$m\times n$ 矩阵集合
$\mathbf{C}_r^{m\times n}$	秩为r的复$m\times n$ 矩阵集合
$\boldsymbol{A}^{+}$	矩阵$\boldsymbol{A}$ 的Moore-Penrose 逆
$\boldsymbol{A}^{i,j,\cdots,l}$	矩阵$\boldsymbol{A}$的$\{i,j,\cdots,l\}$ 逆
$\boldsymbol{J}$	矩阵的Jordan标准形
$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$	方阵$\boldsymbol{A}$的最小多项式
$\deg(f(\lambda))$	多项式$f(\lambda)$ 的次数
$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$	矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$ 的Kronecker积
$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$	矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$ 的Hadamard积
$\mathrm{vec}(\boldsymbol{A})$	矩阵$\boldsymbol{A}$的列拉直

目　　录

第 1 章　线性空间与线性变换 …… 1
1.1　线性空间 …… 1
1.1.1　集合、数域与映射 …… 1
1.1.2　线性空间的定义与性质 …… 2
1.1.3　线性空间的基、维数与坐标 …… 3
1.1.4　子空间的定义 …… 8
1.1.5　子空间的交与和 …… 9
1.2　线性变换 …… 13
1.2.1　线性变换的定义 …… 13
1.2.2　线性变换的性质 …… 14
1.2.3　线性变换的运算 …… 15
1.2.4　线性变换的值域与核 …… 16
1.2.5　线性变换与矩阵 …… 18
1.2.6　特征值与特征向量 …… 22
1.2.7　线性变换的特征值与特征向量 …… 23
1.3　应用案例 …… 24
1.3.1　电路设计问题 …… 24
1.3.2　平面图形的几何变换 …… 26
习题 1 …… 30

第 2 章　内积空间 …… 34
2.1　内积空间的定义与性质 …… 34
2.2　欧氏空间的正交基与 Schmidt 正交化方法 …… 36
2.3　正交变换 …… 40
2.3.1　定义与性质 …… 40
2.3.2　Givens 变换 …… 42
2.3.3　HouseHolder 变换 …… 43
2.4　对称变换 …… 44
2.5　酉空间简介 …… 44
2.5.1　酉空间的定义 …… 44
2.5.2　酉空间的特殊矩阵 …… 45
2.6　应用案例:数据拟合 …… 46

习题 2 …… 48

第 3 章　范数理论 …… 50
3.1　向量范数 …… 50
3.1.1　向量范数的定义 …… 50
3.1.2　向量范数的等价性 …… 51
3.1.3　向量序列的收敛性 …… 52
3.2　矩阵范数 …… 53
3.2.1　方阵的范数 …… 53
3.2.2　向量范数与矩阵范数的关系 …… 54
3.2.3　长方阵的范数 …… 56
3.3　条件数 …… 56
3.4　应用案例 …… 58
3.4.1　基于监控视频的前景目标提取 …… 58
3.4.2　人脸识别的稀疏表示 …… 60
习题 3 …… 64

第 4 章　矩阵的标准形 …… 65
4.1　线性代数基础 …… 65
4.1.1　矩阵的二次型 …… 65
4.1.2　相似对角化 …… 65
4.2　矩阵的 Jordan 标准形 …… 66
4.2.1　Jordan 标准形的定义 …… 66
4.2.2　Jordan 标准形的计算 …… 67
4.3　Jordan 标准形的其他算法 …… 67
4.3.1　λ 矩阵及其 Smith 标准形 …… 67
4.3.2　Jordan 标准形的初等变换法 …… 69
4.3.3　Jordan 标准形的行列式因子法 …… 71
4.4　Jordan 块的幂运算 …… 73
4.5　最小多项式 …… 74
4.6　应用案例:人口迁移 …… 77
习题 4 …… 80

第 5 章　矩阵分析 …… 82
5.1　矩阵级数 …… 82
5.1.1　矩阵序列的极限 …… 82
5.1.2　矩阵级数的定义 …… 84
5.1.3　矩阵幂级数 …… 85
5.2　矩阵函数 …… 86

5.2.1 矩阵函数的定义 …… 86
5.2.2 矩阵函数的计算 …… 87
5.2.3 常用矩阵函数的性质 …… 91
5.3 矩阵的微分和积分 …… 92
5.3.1 函数矩阵的微分和积分 …… 92
5.3.2 矩阵数量值函数对矩阵变量的导数 …… 94
5.3.3 矩阵值函数对矩阵变量的导数 …… 95
5.4 一阶线性常系数微分方程组 …… 97
5.4.1 一阶线性常系数齐次微分方程组 …… 97
5.4.2 一阶线性常系数非齐次微分方程组 …… 99
5.4.3 Lyapunov 方程 …… 101
5.5 应用案例:虫子爬行轨迹 …… 102
习题 5 …… 105

第 6 章 矩阵分解 …… 108
6.1 矩阵的 LU 分解 …… 108
6.1.1 LU 分解及存在唯一性定理 …… 108
6.1.2 三角分解的紧凑格式算法 …… 109
6.1.3 对称矩阵的三角分解 …… 110
6.1.4 MATLAB 实现 …… 110
6.2 矩阵的 QR 分解 …… 111
6.2.1 QR 分解的定义 …… 111
6.2.2 MATLAB 实现 …… 113
6.3 矩阵的满秩分解 …… 114
6.3.1 MATLAB 实现 …… 115
6.4 矩阵的奇异值分解 …… 115
6.4.1 奇异值的定义与性质 …… 115
6.4.2 奇异值分解的计算 …… 116
6.4.3 MATLAB 实现 …… 118
6.5 奇异值的几何意义 …… 119
6.6 应用案例:奇异值分解在图像处理中应用 …… 121
习题 6 …… 124

第 7 章 矩阵的广义逆 …… 125
7.1 广义逆的定义 …… 125
7.2 广义逆 $\boldsymbol{A}^{-}$ …… 125
7.3 广义逆 $\boldsymbol{A}^{+}$ …… 128
7.4 最小二乘问题 …… 130
7.4.1 最小二乘解 …… 130

7.4.2 极小范数最小二乘解 …… 132
7.5 应用案例:功率放大器非线性特性及预失真建模 …… 133
习题 7 …… 139

第 8 章 特殊矩阵 …… 140
8.1 非负矩阵 …… 140
8.1.1 非负矩阵的定义与性质 …… 140
8.1.2 本原矩阵 …… 143
8.1.3 不可约非负矩阵 …… 144
8.2 Perron 定理 …… 146
8.3 随机矩阵 …… 153
8.4 协方差矩阵与相关矩阵 …… 155
8.5 Fourier 矩阵 …… 157
8.6 应用案例:随机矩阵在 Markov 链中的应用 …… 159
习题 8 …… 161

第 9 章 矩阵的 Kronecker 积与 Hadamard 积 …… 162
9.1 Kronecker 积的定义与性质 …… 162
9.1.1 Kronecker 积的定义 …… 162
9.1.2 MATLAB 实现 …… 162
9.1.3 Kronecker 积的性质 …… 163
9.2 Kronecker 积的应用 …… 167
9.2.1 矩阵的拉直 …… 167
9.2.2 线性矩阵方程 …… 169
9.3 Hadamard 积 …… 172
9.4 应用案例:基于 Kronecker 积的图像放大 …… 175
习题 9 …… 178

参考文献 …… 179

第 1 章　线性空间与线性变换

线性空间是几何空间与n 维向量空间的推广. 线性变换反映了线性空间中元素的一种联系. 线性空间和线性变换的概念比较抽象.

几何方法与代数方法的融合是数学自身的需要和数学统一性的体现，也是处理工程问题的有力手段. 学习本章时一定要注意思想的来源，并联系所讨论的问题在平面和空间直角坐标系中的原型，将抽象的代数概念几何直观化.

1.1 线性空间

线性空间是矩阵论最基本的概念之一，是对各种具体线性系统的一种统一的抽象. 下面首先介绍基础概念.

1.1.1 集合、数域与映射

设给定n 个集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$，由$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的所有元素组成的集合称为这些集合的**并集**，记为$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. 由$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的公共元素组成的集合称为这些集合的**交集**，记为$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.

设A, B 是两个集合，由所有属于A 但不属于B 的元素组成的集合称为集合A 与B 的**差**，记作$A - B$.

设A, B 是两个集合，集合$A \times B = \{(a,b)|a \in A, b \in B\}$ 称为A 与B **积**.

定义 1.1.1 设P 是至少包含一个非零数的数集，如果P 中任意两个数的和、差、积、商(分母不为零) 仍属于P，称数集P 为一个**数域**.

显然，全体整数集不构成数域. 全体有理数集$\mathbf{Q}$，全体实数集$\mathbf{R}$，全体复数集$\mathbf{C}$ 都构成数域，其中实数域$\mathbf{R}$ 和复数域$\mathbf{C}$ 是工程上较常用的两个数域.

定义 1.1.2 设A, B 是两个非空集合，A 到B 的一个**映射** T 是指一个对应法则，通过该法则，集合A 中的任一元素x，都有集合B 中唯一确定的元素 y 与之对应，记作$T: x \mapsto y$ 或者$T(x) = y$. y 称为x 在映射T 下的**像**，x 称为y 在映射T 下的**原像**. 集合A 的所有元素的像的集合记作$T(A) = \{T(x)|x \in A\}$.

定义 1.1.3 设T 是集合A 到B 的一个映射，如果对任意的$x_1, x_2 \in A$，当$x_1 \neq x_2$ 时，有$T(x_1) \neq T(x_2)$，称T 是**单射**. 如果对任意的$y \in B$，有$x \in A$，使得$T(x) = y$，称T 是**满射**. 如果T 既是单射又是满射，称为**一一对应**，又称为**双射**.

例 1.1.1 实数域$\mathbf{R}$上的$n\times n$阶矩阵全体$\mathbf{R}^{n\times n}$，定义

$$T_1(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{A}),\quad T_2(\boldsymbol{A})=a\boldsymbol{I}_n,\quad T_3(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n,$$

其中$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$a\in\mathbf{R}$是常数，$\det(\boldsymbol{A})$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式，$\boldsymbol{I}_n$是$n$阶单位矩阵，则$T_1$是$\mathbf{R}^{n\times n}$到$\mathbf{R}$的满射，但不是单射；$T_2$是$\mathbf{R}^{n\times n}$到$\mathbf{R}^{n\times n}$的单射，但不是满射；$T_3$是$\mathbf{R}^{n\times n}$到$\mathbf{R}^{n\times n}$的一一对应.

1.1.2 线性空间的定义与性质

定义 1.1.4 设P是一个数域，V是一个非空集合，定义集合$V\times V$到V上的加法'+'及集合$P\times V$到V上的数乘'·'两种映射，且这两种映射是封闭的，即运算后的结果仍在V中. 如果这两种运算对任意的$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$和$k,l\in P$，满足下面8条运算律，那么称集合$V$为数域$P$上的**线性空间**：

(1) 加法交换律：$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

(2) 加法结合律：$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

(3) 零元素存在，即存在元素$\mathbf{0}$，使得$\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

(4) 负元素存在，即对任意元素$\boldsymbol{\alpha}$，存在$-\boldsymbol{\alpha}$，使得$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$；

(5) 数乘分配律：$k\cdot(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\cdot\boldsymbol{\alpha}+k\cdot\boldsymbol{\beta}$；

(6) 分配律：$(k+l)\cdot\boldsymbol{\alpha}=k\cdot\boldsymbol{\alpha}+l\cdot\boldsymbol{\alpha}$；

(7) 数乘结合律：$(kl)\cdot\boldsymbol{\alpha}=k\cdot(l\cdot\boldsymbol{\alpha})$；

(8) 单位元存在：存在元素1，使得$1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

如果V是P上的线性空间，称V中的元素为向量，P中的元素为纯量. 当P为实数域$\mathbf{R}$ (复数域$\mathbf{C}$) 时，称V为**实(复) 线性空间**.

注：数乘符号'·'通常省略不写.

例 1.1.2 数域P上的全体n 维向量构成的集合P^n按通常的加法与数乘，构成线性空间P^n. 特别的，实数域$\mathbf{R}$上的n维向量全体，按向量加法与向量的数乘运算构成线性空间$\mathbf{R}^n$，复数域$\mathbf{C}$上的n维向量全体，按向量加法与向量的数乘运算构成线性空间$\mathbf{C}^n$.

例 1.1.3 实数域$\mathbf{R}$上的$m\times n$阶矩阵全体，按矩阵的加法和数乘，构成实数域$\mathbf{R}$上的线性空间$\mathbf{R}^{m\times n}$.

例 1.1.4 设$\mathbf{R}^+$表示全体正实数集合，对任意的$x,y\in\mathbf{R}^+$，定义加法 $\oplus$ 与数乘 $\circ$ 分别为

$$x\oplus y=ab,\quad k\circ x=a^k(a,b\in\mathbf{R}^+,k\in\mathbf{R}),$$

可验证$\mathbf{R}^+$ 对加法$\oplus$ 和数乘$\circ$ 构成实数域上的线性空间.

例 1.1.5 数域P 上多项式全体按照多项式的加法，以及数与多项式的乘法构成P 上的线性空间，记作$P[x]$.

例 1.1.6 数域P 上次数小于等于n 的一元多项式再加上零多项式按照多项式的加法，以及数与多项式的乘法构成P 上的线性空间，记作$P_n[x]$.

例 1.1.7 区间$[a,b]$ 上全体连续实值函数全体按通常函数的加法和数与函数的乘法构成线性空间，记作$C[a,b]$.

例 1.1.8 齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的所有解的集合构成实数域$\mathbf{R}$ 上的线性空间，称为矩阵$\boldsymbol{A}$ 的**零空间**(或**核空间**)，记作$\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A})$. 即

$$\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n|\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0},\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}\}. \tag{1-1}$$

非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的所有解的集合一般不构成实数域$\mathbf{R}$ 上的线性空间，因为该集合对加法运算不封闭.

例 1.1.9 给定矩阵$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$，集合$\{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\}$ 构成实数域$\mathbf{R}$ 上的线性空间，称为矩阵$\boldsymbol{A}$ 的**值域**，也称为$\boldsymbol{A}$ 的**像**(空间)，记作$\mathbf{R}(\boldsymbol{A})$.

例 1.1.10 集合$V_1=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,0)^{\mathrm{T}},x_1\in\mathbf{R},x_2\in\mathbf{R}\}$ 是一个线性空间. 但集合$V_2=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,1)^{\mathrm{T}},x_1\in\mathbf{R},x_2\in\mathbf{R}\}$ 不是一个线性空间，因为V_2 对加法运算不封闭.

注：

(1) 线性空间不能离开某一数域来定义. 实际上，对于不同数域，同一个集合构成的线性空间会不同，甚至一种能成为线性空间而另一种不能成为线性空间. 如$\mathbf{C}$ 作为$\mathbf{C}$ 上的线性空间与$\mathbf{C}$ 作为$\mathbf{R}$ 上的线性空间是不同的，$\mathbf{R}^n$ 在复数域$\mathbf{C}$ 上不构成线性空间.

(2) 数域P 中的运算是具体的四则运算，而V 中所定义的加法运算和数乘运算可以是熟悉的一般运算，也可以是各种特殊的运算，如例1.1.4.

(3) 唯一性一般较显然，封闭性通常需要证明.

(4) 线性空间中的元素可以是向量、矩阵、多项式、函数等.

1.1.3 线性空间的基、维数与坐标

定义 1.1.5 设V 是数域P 上的线性空间. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\in V$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in P$，则称

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个线性组合. 如果存在一组不全为零的常数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in P$，使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots,+\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0},$$

则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ **线性相关**，否则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ **线性无关**.

例 1.1.11 讨论$\mathbf{R}^{2\times2}$ 中，向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}-1&5\\1&12\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}5&5\\-2&4\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}4&-2\\5&-12\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}5&-3\\2&-8\end{bmatrix}$$

的线性相关性.

解 设$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in\mathbf{R}$，使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3+\lambda_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0},$$

即

$$\lambda_1\begin{bmatrix}-1&5\\1&12\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}5&5\\-2&4\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}4&-2\\5&-12\end{bmatrix}+\lambda_4\begin{bmatrix}5&-3\\2&-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

由矩阵相等的定义，可得如下线性方程组

$$\begin{cases}-\lambda_1+5\lambda_2+4\lambda_3+5\lambda_4=0,\\5\lambda_1+5\lambda_2-2\lambda_3-3\lambda_4=0,\\\lambda_1-2\lambda_2+5\lambda_3+2\lambda_4=0,\\12\lambda_1+4\lambda_2-12\lambda_3-8\lambda_4=0.\end{cases}\tag{1-2}$$

由于方程组(1-2) 的系数行列式为零，所以有非零解，故向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

定义 1.1.6 设线性空间V 是数域P 上的线性空间，V 中满足以下条件的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 称为线性空间V 的一组**基**：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关；

(2) 线性空间V 中任意向量都能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

基中的向量个数n 称为线性空间V 的**维数**，记为$\dim(V)=n$.

注：

(1) 基是线性空间V 的最大线性无关组；V 的维数是基中所含元素的个数.

(2) 基是不唯一的，但不同的基所含元素个数相等.

(3) 线性空间不一定是有限维的，如$P[x], C[a,b]$ 是无限维的，这时基中的元素也是无限的.

例 1.1.12 对线性空间P^n，令$\boldsymbol{e}_i$ 为第i 个分量为1，其他分量为零的向量，则$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 是线性空间P^n 的一组基(自然基).

例 1.1.13 对线性空间$\mathbf{R}^{m\times n}$，令$\boldsymbol{E}_{i,j}$ 为这样的一个$m\times n$ 阶矩阵，其(i,j) 元素为1，其余元素为零. 显然，这样的矩阵共有mn 个，构成了线性空间$\mathbf{R}^{m\times n}$ 的一组基(自然基).

例 1.1.14 数域P 上次数小于等于n 的一元多项式线性空间

$$P_n[x] = \{p(x) \mid p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n | a_i \in P\},$$

则$1, x, \cdots, x^n$ 是一组基(自然基)，$P_n[x]$ 是$n+1$ 维的.

例 1.1.15 对齐次线性方程组$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的零空间$\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A})$，任意一组基础解系即为一组基.

定理 1.1.1 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间V^n 的一组基，则V^n 的任意向量都可以唯一表示成向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合，即V^n 可以表示为

$$V^n = \{\boldsymbol{\alpha} | \boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n, x_1, x_2, \cdots, x_n \in P\}.$$

定义 1.1.7 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间V^n 的一组基，对V^n 的任意向量$\boldsymbol{\alpha}$，有

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为向量$\boldsymbol{\alpha}$ 在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的**坐标**.

建立坐标后，线性空间V^n 中的向量$\boldsymbol{\alpha}$ 与向量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 建立了一一对应的关系. 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间V^n 的一组基，对任意的$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V^n$，有

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n, \quad \boldsymbol{\beta} = y_1\boldsymbol{\alpha}_1 + y_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{\alpha}_n.$$

即$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V^n$在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标分别为$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 和$(y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$，则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} &= (x_1 + y_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_2 + y_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (x_n + y_n)\boldsymbol{\alpha}_n, \\ k\boldsymbol{\alpha} &= kx_1\boldsymbol{\alpha}_1 + kx_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + kx_n\boldsymbol{\alpha}_n. \end{aligned} \tag{1-3}$$

即$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为$(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)^{\mathrm{T}}$，$k\boldsymbol{\alpha}$ 在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为$(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n)^{\mathrm{T}}$.

这种一一对应保持了线性运算的对应关系，可以说线性空间V^n 与P^n 具有相同的结构，称为**同构**. 因为这种同构关系，只需要主要研究元素为向量的线性空间P^n.

下面研究基改变时坐标变化的规律.

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是线性空间V^n 的两组基. 由于两者都是基，所以可以相互线性表示，即

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \boldsymbol{\beta}_2=a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n=a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.\end{cases}\tag{1-4}$$

设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\tag{1-5}$$

则式(1-4)可以简记为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},\tag{1-6}$$

称$\boldsymbol{A}$ 为由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的**过渡矩阵**. 式(1-6) 给出了基变换关系.

定理 1.1.2 设$\boldsymbol{A}$ 是线性空间V^n 由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵，则$\boldsymbol{A}$ 是可逆的，且由基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的过渡矩阵为$\boldsymbol{A}^{-1}$.

证 由已知条件，有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},$$

于是

$$|(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)|=|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)|\cdot|\boldsymbol{A}|,$$

因为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$均为基，所以有

$$|(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)|\neq 0,\quad |(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)|\neq 0,$$

所以$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即矩阵$\boldsymbol{A}$ 可逆. (1-6) 式两边右乘$\boldsymbol{A}^{-1}$，有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),$$

即基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的过渡矩阵为$\boldsymbol{A}^{-1}$.

证毕

定理 1.1.3 设V^n是数域P上的一个线性空间，$\boldsymbol{A}$是由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵，向量$\boldsymbol{\alpha}$关于基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的坐标为$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，关于基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的坐标为$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$，或者$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$.

证 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}&=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\beta}_n\\&=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{y}\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{y},\end{aligned}$$

又因为

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{x},$$

由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是一组基，得

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}.$$

证毕

例 1.1.16 已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性空间$V^3$的一组基，向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$满足

$$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(1) 证明向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$也是一组基；

(2) 求由基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的过渡矩阵；

(3) 求向量$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标.

解 (1) 由已知条件，有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix},\tag{1-7}$$

由于上式两边矩阵均可逆，所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关，即$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$也是一组基.

(2) 由式(1-7)，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&-1&2\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

所以，由基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵为$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(3) 由题意，有

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以，向量$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为$(2,-5,1)$.

1.1.4 子空间的定义

整体有时太庞大，所以通过“部分来获知整体”. 对线性空间的研究亦是如此，通过对线性空间的局部进行深入的研究，能够更加深刻地揭示整个线性空间的结构.

定义 1.1.8 设V 是数域P 上的线性空间, S 为V 的一个非空子集，若S 对V 已有的加法和乘法运算也构成一个线性空间，称S 为V 的一个**线性子空间**，简称**子空间**.

定理 1.1.4 线性空间V 的一个非空子集S 构成子空间的充分必要条件为S 对V 已有的线性运算封闭.

证 必要性显然成立. 下面证明充分性.

已知S 对加法与数乘运算封闭，则线性空间定义的运算律(1)，(2)，(5)~(8) 均成立. 又$\mathbf{0}\in S,-\boldsymbol{\alpha}\in S$，故运算律(3)(4) 也成立，即$S$ 构成线性空间.

证毕

定理 1.1.5 设V 是数域P 上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\in V$，则由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的一切线性组合构成V 的一个线性子空间，称为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的生成子空间，记作

$$\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}. \tag{1-8}$$

推论 1.1.1 线性空间$\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的维数等于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩.