SHUXUE FENXI ZHUANTI ZHI DIANXING LITI FENXI

数学分析专题之

典型例题分析

◎主　编　罗　群
◎副主编　朱智伟　黄民海

本书包括极限、一元函数连续性、一元函数微分学、一元函数积分学、级数、多元函数微积分学等七个专题，每个专题先介绍基本内容，然后着重分析一些典型题目的解题思路和方法。

中国出版集团
世界图书出版公司

数学分析专题之

典型例题分析

SHUXUE FENXI ZHUANTI ZHI
DIANXING LITI FENXI

主　编◎罗　群
副主编◎朱智伟　黄民海

中国出版集团
世界图书出版公司
广州·上海·西安·北京

图书在版编目（CIP）数据

数学分析专题之典型例题分析 / 罗群主编 . -- 广州 : 世界图书出版广东有限公司 , 2016.8

ISBN 978-7-5192-1751-8

Ⅰ . ①数… Ⅱ . ①罗… Ⅲ . ①数学分析 - 题解 Ⅳ . ① O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 205292 号

数学分析专题之典型例题分析

策划编辑　赵　泓
责任编辑　汪再祥
装帧设计　卢佳雯
出版发行　世界图书出版广东有限公司
地　　址　广州市新港西路大江冲 25 号
电　　话　020-84459702
印　　刷　虎彩印艺股份有限公司
规　　格　787mm × 1092mm　1/16
印　　张　22
字　　数　250 千
版　　次　2016 年 8 月第 1 版　2016 年 8 月第 1 次印刷
I S B N　978-7-5192-1751-8/O · 0051
定　　价　68.00 元

前 言

“数学分析”是数学类专业的一门重要基础课，也是全国硕士研究生入学考试中数学类专业的必考课程之一。《数学分析专题之典型例题分析》是数学分析系列课程参考书，该书共分为极限、一元函数连续性、一元函数微分学、一元函数积分学、级数、多元函数微分学、多元函数积分学等七个专题。对多数典型例题，本书着重分析解题的思路和方法，由读者自行完成证明或解答的详细书写，这样可以训练读者的书写表达能力。本书中许多题目是全国各高校历年研究生入学考试题中具有代表性、启发性和综合性的题目，这些解题的思路和方法对参加全国硕士研究生入学考试的读者会有一定的启发和帮助 .

本书的出版得到肇庆学院数学与统计学院的大力帮助和支持，在此表示深深的谢意！

由于编者水平的限制，本书还有不足之处，恳请读者批评指正，谢谢！

编　者

2016 年 1 月于砚园

目 录

第一专题 极限

本专题的重点内容是极限存在性的证明，求极限的方法与技巧．

1.1 极限的定义及性质

1.1.1 数列极限的定义

设$\{a_n\}$为数列，a为定数．

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N$，有$|a_n - a| < \varepsilon$；

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N > 0, \exists n > N$，使$|a_n - a| \geq \varepsilon_0$；

3. $\forall \varepsilon > 0$，若在邻域$U(a;\varepsilon)$之外数列$\{a_n\}$中的项至多只有有限项，则称数列$\{a_n\}$收敛于a；

4. 数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是存在实数A，使得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$；

5. 数列$\{a_n\}$发散充要条件是对任意实数A，都有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq A$；

6. 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则称数列$\{a_n\}$为无穷小数列；

7. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$的充要条件是$\{a_n - A\}$为无穷小数列；

8. 若数列$\{a_n\}$满足：$\forall M>0$，$\exists N>0, \forall n>N$，有$|a_n|>M$，则称数列$\{a_n\}$发散于无穷大，记为$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$；此时称数列$\{a_n\}$为无穷大数列或无穷大量；

9. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists N>0, \forall n>N$，有$a_n > M$；

10. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists N>0, \forall n>N$，有$a_n < -M$.

1.1.2 数列极限的性质

1.（唯一性）若数列$\{a_n\}$收敛，则其极限是唯一的；

2.（有界性）若数列$\{a_n\}$收敛，则$\{a_n\}$是有界数列；

3.（保号性）若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$，则对任何$r \in (0,|a|)$，存在正整数$N$，$\forall n>N$，有$|a_n|>r$；

特别地，若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$，则存在$N>0$，$\forall n>N$，有$a_n > \dfrac{a}{2}$；

4.（保不等式性）设数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均收敛.若存在$N_0>0$，$\forall n>N_0$，有$a_n \le b_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$；

5.（迫敛性）设$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$为三个数列.若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$，且存在$N_0>0$，$\forall n>N_0$，有$a_n \le c_n \le b_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$；

6.（四则运算）若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为收敛数列，则$\{a_n \pm b_n\}$，$\{a_n \cdot b_n\}$也

为收敛数列，且有

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty}b_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty}b_n$；

又若 $b_n \neq 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n \neq 0$，则有 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 也为收敛数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$；

7. 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：$\{a_n\}$ 的任何非平凡子列都收敛；

8.（单调有界定理）在实数系中，有界的单调数列必有极限；

9. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$；

10（柯西收敛准则）

数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，存在 $N>0$，$\forall n,m>N$，有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$；

数列 $\{a_n\}$ 发散 $\Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0$，对任意的 $N>0$，$\exists n,m>N$，使 $|a_n-a_m|\geq\varepsilon_0$.

1.1.3 一元函数极限的定义

1. 设 f 在 $U(+\infty)$ 有定义，A 为定数. 若 $\forall\varepsilon>0$，存在 $X>0$，使 $\forall x>X$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 f 当 x 趋于 $+\infty$ 时以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to+\infty)$.

可以简述为：

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，$\forall x>X$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq A \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0$，$\forall X>0$，$\exists x'>X$，使 $|f(x')-A|\geq\varepsilon_0$；

2. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \exists A\in R$，使 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$；

3. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在 $\Leftrightarrow \forall A\in R$，有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq A$；

同样可以定义当 $x\to\infty$，$x\to-\infty$ 时函数 f 的极限.

4. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$；

5. 设 f 在点 x_0 的某空心邻域 $U^0(x_0;\delta')$ 内有定义，A 为定数.若 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0(\delta<\delta')$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$有|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 f 当 x 趋于 x_0 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)；$$

特别，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称 f 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

6. 设 f 在 $U_+^\circ(x_0;\delta')$ 内有定义，A 为定数.若 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0(\delta<\delta')$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 f 当 x 趋于 x_0^+ 时以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0^+)$.

7. 设 f 在 $U_-^\circ(x_0;\delta')$ 内有定义，A 为定数.若 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0(\delta<\delta')$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 f 当 x 趋于 x_0^- 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^-)；$$

8. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$；

9. 对于自变量 x 的某种趋向，所有以 ∞，$+\infty$ 或 $-\infty$ 为非正常极限的函数，都称为无穷大量.

1.1.4 一元函数极限的性质

1.（唯一性）若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则此极限是唯一的；

2.（局部有界性）若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 f 在 x_0 的某个空心邻域 $U^0(x_0)$ 内有界；

注 若 f 在 x_0 的某个空心邻域 $U^0(x_0)$ 内有界，则称 f 为当 $x\to x_0$ 时的有界量.

3.（局部保号性）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，则对任何 $0<r<A$，存在 x_0 的某空心邻域 $U^0(x_0)$，使 $\forall x\in U^0(x_0)$，有 $f(x)>r>0$；

注：经常取 $r=\dfrac{A}{2}$.

4.（保不等式性质）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，且在 x_0 的某空心邻域 $U^0(x_0;\delta')$ 内有 $f(x)\le g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

5.（迫敛性）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，且在 x_0 的某空心邻域 $U^0(x_0;\delta')$ 内有 $f(x)\le h(x)\le g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$；

6.（四则运算性质）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，则函数 $f\pm g$，$f\cdot g$ 当 $x\to x_0$ 时极限也存在，且

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

（3）又若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$，则 $\dfrac{f}{g}$ 当 $x\to x_0$ 时极限也存在，且

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)/g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)/\lim_{x\to x_0}g(x).$$

7. 归结原则（海涅定理）

（1）设 f 在 x_0 的某空心邻域 $U^0(x_0;\delta')$ 内有定义．则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对任何含于 $U^0(x_0;\delta')$ 且以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在且相等；

（2）（简写形式）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对任何数列 $\{x_n\}$：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，都有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在且相等；

（3）（简写形式）$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对任何单调增加且以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在且相等．

8. 设 f 为定义在 $U_+^0(x_0;\delta')$ 内的单调有界函数，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在；

注 另外三种情形 $x\to x_0^-$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$ 也有类似的结论．

9. 柯西收敛准则

（1）设 f 在 x_0 的某空心邻域 $U^0(x_0;\delta')$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，存在正数 $\delta(<\delta')$，使对任何 $x',x''\in U^0(x_0;\delta)$，都有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$．

（2）（简写形式）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在 $\Leftrightarrow$ 存在 $\varepsilon_0>0$，对任何正数 $\delta(<\delta')$，都存在 $x',x''\in U^0(x_0;\delta)$，使 $|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$；

（3）（简写形式）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，存在 $X>0$，对任何 $|x'|,|x''|>X$，都有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$；

（4）（简写形式）$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在 $\Leftrightarrow$ 存在 $\varepsilon_0>0$，对任何 $X>0$，存在 $|x'|,|x''|>X$，使 $|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$.

10. 两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$.

11. 无穷大量与无穷小量的性质

（1）相同类型的有限个无穷小量之和（积）仍为无穷小量；

（2）相同类型的无穷小量与有界量之积仍为无穷小量；

12. 无穷小量的阶的比较（略）.

1.2 求（判断）极限（存在性）的方法

1. 2. 1 用定义证明极限的存在性

例 1.1 设 $a>0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

分析：（1）当 $a=1$，显然成立；

（2）当 $a>1$ 时，有 $\sqrt[n]{a}>1$，若记 $h=\sqrt[n]{a}-1$，则 $h>0$，利用二项式展开且有 $a=(1+h)^n\geq 1+hn=1+n(\sqrt[n]{a}-1)$，所以

$$0<\sqrt[n]{a}-1\leq\frac{a-1}{n}$$

$\forall\varepsilon>0$，由 $\dfrac{a-1}{n}<\varepsilon$，得 $n>\dfrac{a-1}{\varepsilon}$，因此只需取 $N=[\dfrac{a-1}{\varepsilon}]+1\geq\dfrac{a-1}{\varepsilon}$，当 $n>N$ 时，有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ 成立.

（3）当 $0<a<1$ 时，记 $b=\dfrac{1}{a}$，则 $b>1$，于是有

$$|\sqrt[n]{a}-1|=\frac{|\sqrt[n]{b}-1|}{\sqrt[n]{b}}\le|\sqrt[n]{b}-1|,$$

由（2）知，结论成立 .

注： 思考能否用上例 1.1 的方法证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$？

例 1.2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}=0$.

分析: 若直接使用不等式 $|\sin\pi\sqrt{n^2+1}-0|\le\pi\sqrt{n^2+1}$，显然放得太大，而不能证明想要结论 . 然而注意到 $\sin\pi n=0$，所以

$$\begin{aligned}&|\sin\pi\sqrt{n^2+1}-0|=|\sin\pi\sqrt{n^2+1}-\sin\pi n|\\&=|2\cos\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{2}\pi\cdot\sin\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{2}\pi|\le|\sqrt{n^2+1}-n|\pi\\&=\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}<\frac{\pi}{n},\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0$，由 $\frac{\pi}{n}<\varepsilon$，有 $n>\frac{\pi}{\varepsilon}$，取 $N=\frac{\pi}{\varepsilon}>0$，当 $n>N$ 时，有 $|\sin\pi\sqrt{n^2+1}-0|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}=0$.

注： 对求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$ 来说，由于

$$\sin^2(n\pi-\pi\sqrt{n^2+n})=\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}),$$

而

$$\sin^2(n\pi-\pi\sqrt{n^2+n})=\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-\pi n)=\sin^2(\frac{\pi^2 n}{\pi\sqrt{n^2+n}+\pi n}),$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi^2 n}{\pi\sqrt{n^2+n}+\pi n}=\frac{\pi}{2}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=1$.

例 1.3 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

分析： 因为只有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 条件，从而只能利用有界性及定义 .

由有界性，存在$M>0$，使$|a_n-a|\le M$，$n=1,2,3,\cdots$.

由定义，$\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当$n>N$时，有$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|=\frac{|(a_1-a)+\cdots+(a_N-a)+(a_{N+1}-a)+\cdots+(a_n-a)|}{n}$$

$$\le\frac{|(a_1-a)+\cdots+(a_N-a)|}{n}+\frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\le\frac{NM}{n}+\frac{\varepsilon}{2},$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{NM}{n}=0$，所以存在$N^*>N$，当$n>N^*$时，有$0<\frac{NM}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$，从而有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon，结论得证.$$

例 1.4 由上例 1.3 可求或证明下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i^p}=0$，$p>0$，取$a_n=\frac{1}{n^p}$，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{i+1}\right)^p=1$，$p>0$，取$a_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^p$，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1$.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[i]{i}=1$，取$a_n=\sqrt[n]{n}$，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

（4）设$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=A$，证明极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}$$

存在，并求之.

分析：若记$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=A$，由例 1.3 的结论有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}=A.$$

而$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=nS_n-(S_1+S_2+\cdots+S_{n-1})$，所以

$$\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=\frac{nS_n-(S_1+S_2+\cdots+S_{n-1})}{n}$$
$$=S_n-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}}{n-1},$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$.

例 1.5 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ ，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}=\frac{a}{2}$.

分析：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ ，由定义，$\forall\varepsilon>0$ ，存在 $N>0$ ，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$ ，且存在 $M>0$ ，使对任意 $i=1,2,\cdots$ ，有 $|a_i-a|\le M$ ，于是当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}-\frac{a}{2}\right|=\left|\frac{2a_1+4a_2+\cdots+2na_n-n(n+1)a}{2n(n+1)}\right|$$
$$=\left|\frac{2(a_1-a)+4(a_2-a)+\cdots+2N(a_N-a)+2(N+1)(a_{N+1}-a)+\cdots+2n(a_n-a)}{2n(n+1)}\right|$$
$$\le\frac{(2+4+\cdots+2N)M}{2n(n+1)}+\frac{n(n+1)-(2+4+\cdots+2N)}{2n(n+1)}\varepsilon$$
$$<\frac{P}{n(n+1)}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

其中，$P=\frac{(2+4+\cdots+2N)M}{2}$ ，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P}{n(n+1)}=0$，仿上例 1.3，所以结论成立 .

注：对例 1.3 及例 1.5，若使用施笃兹公式，会更简单 .

例 1.6 设 $a_n>0$ ，$n=1,2,\cdots$ ，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=B,$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=B$.

分析：因为$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，由有界性及定义知，存在$M>0$，使得

$$|b_n-B|\le M\text{ ,}\quad n=1,2,\cdots\text{ ,}$$

且$\forall\varepsilon>0$，存在$N>0$，$\forall n>N$，有$|b_n-B|<\varepsilon$，所以

$$\left|\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}-B\right|=\left|\frac{a_1(b_n-B)+a_2(b_{n-1}-B)+\cdots+a_n(b_1-B)}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right|$$

$$=\left|\frac{a_1(b_n-B)+a_2(b_{n-1}-B)+\cdots+a_{n-N}(b_{N+1}-B)+a_{n-N+1}(b_N-B)+\cdots+a_n(b_1-B)}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right|$$

$$\le\frac{a_1|b_n-B|+a_2|b_{n-1}-B|+\cdots+a_{n-N}|b_{N+1}-B|+a_{n-N+1}|b_N-B|+\cdots+a_n|b_1-B|}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

$$\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-N}}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\cdot\varepsilon+\frac{a_{n-N+1}+\cdots+a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\cdot M$$

$$<\varepsilon+\left(\frac{a_{n-N+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-N+1}}+\frac{a_{n-N+2}}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-N+2}}+\cdots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)M\text{ ,}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=0$，所以下列$N$ 项和的极限为零，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n-N+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-N+1}}+\frac{a_{n-N+2}}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-N+2}}+\cdots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)M=0\text{ ,}$$

于是结论成立.

例 1.7 设实数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.

分析：记$a_n=|x_n-x_{n-1}|$，则$|a_n-a_{n-1}|\le|x_n-x_{n-2}|$，由于$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$

所以$\forall\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$n>N$时，有$|a_n-a_{n-1}|\le|x_n-x_{n-2}|<\varepsilon$，于是

$$\frac{|x_n-x_{n-1}|}{n}=\frac{a_n}{n}=\frac{|a_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+a_{n-2}-\cdots-a_N+a_N|}{n}$$