大学数学信息化教学丛书

高等数学

（上册）

第二版

张明望　沈忠环　杨雯靖　主编

科学出版社

大学数学信息化教学丛书

高等数学

（上册）（第二版）

张明望　沈忠环　杨雯靖　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书第二版遵照教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会关于高等数学课程教学的基本要求，在第一版的基础上修订而成．本次修订广泛吸取教学研究成果及读者反馈意见，调整一些重要概念的论述，优化部分习题配置，使内容更精炼，系统更完整，便于教学．

本书采用“纸质教材＋数字资源”的出版形式，分上、下两册出版．上册内容为函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程六章；下册内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数五章．书末附有部分习题答案与提示．

本书可作为高等院校理工科各专业高等数学的教材，也可作为其他相关专业参考用书．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册/张明望，沈忠环，杨雯靖主编．—2版．—北京：科学出版社，2019.8

（大学数学信息化教学丛书）

ISBN 978-7-03-062019-4

Ⅰ．①高… Ⅱ．①张… ②沈… ③杨… Ⅲ．①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第161859号

责任编辑：谭耀文 张 湾/责任校对：高 嵘
责任印制：彭 超/封面设计：苏 波

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉市首壹印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
开本：787×1 092 1/16
2019年8月第 二 版 印张：17 3/4
2019年8月第一次印刷 字数：413 000

定价：52.00元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

《高等数学（上册）》（第二版）编委会

主　编　张明望　沈忠环　杨雯靖

副主编　朱永刚　周意元

编　委　（按姓氏笔画排序）

朱永刚　杨雯靖　沈忠环　张小华

张明珠　张明望　张渊渊　陈东海

陈继华　周意元　赵守江　崔　盛

第二版前言

本书第二版遵照教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会关于高等数学课程教学的基本要求，在第一版的基础上修订而成．本次修订广泛吸取教学研究成果及读者反馈意见，采用“纸质教材+数字资源”的方式对教材的内容进行了整体设计，力争使本书更适合教学模式改革的要求．本书这次再版主要具有以下特点：

（1）以“ε-N(ε-δ)”极限理论为基础展开编写，在保持数学学科本身的科学性、系统性的前提下，恰当处理有关定理的严谨性与适用性问题．

（2）在“互联网+”的时代背景下，为了适应大学数学教学模式改革的要求，本书针对高等数学部分知识点、方法及应用案例，融入微视频，使线上、线下课程教学有机结合．围绕着本书的网络教学平台的资源建设也将同步进行，并不断维护及更新．

（3）调整习题配备，使其具有明显的层次性．

（4）为与中学数学衔接，将反三角函数、极坐标及常见平面曲线的图形等内容作为附录，放在本书上册．

本书由张明望、沈忠环和杨雯靖主编．参加编写的主要人员有朱永刚、张小华、张明珠、张渊渊、陈东海、陈继华、周意元、赵守江、崔盛等．全书由杨雯靖、沈忠环负责统稿，张明望负责审阅．

三峡大学理学院、教务处和教材供应中心对本书的编写与出版给予了大力支持，对此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，敬请广大读者批评指正．

编　者

2019 年 4 月

第一版前言

本书是为理工科各专业编写的教材，分为上、下两册.上册包括一元函数微分学、一元函数积分学和微分方程，下册包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学和无穷级数论. 这些理论与方法为解决自然科学和工程技术领域的相关问题提供了有力的工具.

本书具有以下特点：

第一，按照精品课程教材的要求，努力反映国内外高等数学课程改革和学科建设的最新成果，从实例出发，引入微积分的一些基本概念，在保持数学学科本身的科学性、系统性的同时，简化了一些概念的叙述和烦琐的数学推理. 同时，对于那些学生必需的基本理论、基本知识和基本技能，我们则不惜篇幅，力求解说清楚，使学生容易接受和理解. 另外，本书还着重介绍了有关理论、方法在科学技术领域的应用，使学生了解数学与实际问题的紧密联系，以及学习数学对后续课程的重要性.

第二，第一章以张景中院士提出的非 ε 极限理论为基础展开编写. 所谓非 ε 极限理论，就是用科学严谨而又易于为学生接受的方式讲述极限概念的一种理论. 这种理论不讲述 ε 语言，讲述方式也不同于 ε 极限理论由极限到无穷小再到无穷大的次序，而是由无穷大到无穷小再到极限的次序来讲述极限理论. 我们的教学实践表明，教学效果良好.

第三，第五章将定积分的基本概念、基本计算方法以及定积分的应用等知识点整合在一起，使教材的结构得到优化.

第四，为了适应大学数学改革以及创新人才培养模式的要求，也为了将数学实验引入课堂，本书在每一章中，针对相关内容，引入了 Mathematica 进行微积分的基本计算，并且利用 Mathematica 强大的数值计算功能和图形功能，演示、验证了微积分的概念和理论.

第五，本书的习题按节配备，每章后面有总习题，总习题中有填空题、选择题、计算题以及证明题. 题目遵循循序渐进的原则，既注意到对基本概念、基本理论和基本方法的考查，又注重加强对概念的理解和一些解题技巧的训练. 另外，为了更好地与中学数学教学相衔接，本书将极坐标系简介作为附录，放在本书的最后.

本书不仅可供高等学校理工类学生作为教材使用，也可供其他学科学生选用或参考.

本书由张明望、沈忠环和杨雯靖主编. 参加编写的主要人员有：朱永刚、赵克健、张小华，另外，崔盛、陈将宏等也参与了一部分后期的编写工作. 全书由杨雯靖、沈忠环负责统稿，张明望负责审阅.

三峡大学理学院、教务处和教材供应中心对本书的编写与出版给予了大力支持，对此我们表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中难免有不妥甚至错误之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

2012 年 5 月

目　　录

第一章　函数与极限

函数是数学的基本概念之一，是高等数学(微积分)的主要研究对象. 极限概念是微积分的理论基础，极限方法是高等数学的基本分析方法. 因此，掌握、运用好极限方法是学好高等数学的关键. 连续是函数的一个重要性态. 本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础.

第一节　函　数

一、预备知识

1. 集合

集合是数学中的基本概念之一，几乎所有的数学分支都与集合密切相关，我们所学的这门课与实数集就是紧密相关的. 虽然我们在这里只能给出其描述性定义，但这并不影响它在本课程及其他数学课程中的地位和它发挥的作用. 一般地，由事物组成的集体，无论它们是由其成员直接表示出来的，还是由其成员所具有的某些本质属性表示出来的，都称为集合. 例如，我们能够说“正在这里听课的所有同学的集合”“所有整数的集合”等. 集合也常称为集.

某事物 a 是集合 A 的一个成员，则称 a 为 A 的一个元素，记作 $a\in A$. 若事物 a 不是 A 的元素，记作 $a\notin A$. 显然，对于任一个集合 A 和任一元素 a，$a\in A$ 与 $a\notin A$ 有且仅有一个关系成立.

注　若一个集合只有有限个元素，就称为有限集；否则称为无限集.

若能写出集合 A 的所有元素，则我们用一个括号将它们括起来表示这个集合，如由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合，可记作

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

例如，$A=\{1,3,7\}$，$B=\{11,23,45,85,77\}$. 这种表示集合的方法称为枚举法. 而对不易用枚举法表示的集合，通常用以下记号表示：设集合 A 由具有某种性质 P 的元素 x 所组成，就记作

$$A=\{x\mid x具有性质P\}.$$

例如，$\mathbf{N}=\{n\,|\,n\text{为自然数}\}$代表全体自然数组成的集合，$\mathbf{R}=\{x\,|\,x\text{为实数}\}$代表全体实数所组成的集合，$\mathbf{Z}=\{x\,|\,x\text{为整数}\}$代表全体整数所组成的集合，$\mathbf{Q}=\{x\,|\,x\text{为有理数}\}$代表全体有理数所组成的集合．我们约定，这几个记号在本门课程中是固定的．这种表示集合的方法称为描述法．若集合A的任一元素都是集合B的元素，即若$x\in A$，则$x\in B$，就称集合A是集合B的子集，记作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$．若$A\subseteq B$且$A\neq B$，则称集合A是集合B的真子集，记作$A\subset B$或$B\supset A$．例如，

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}\subset\mathbf{Q},\ \mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

若$A\subseteq B$，且$B\subseteq A$，则称集合A等于集合B，记作$A=B$．

不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$．空集是任何集合的子集．在研究具体问题时，若考虑的集合总是某个特定集合的子集，则称这个特定的集合为全集．

2．区间与邻域

区间和邻域是我们以后常要用到的两个特殊数集．区间分为有限区间和无限区间．

设$a,b\in\mathbf{R}$，且$a<b$，有限区间有以下几种形式：

(1) 开区间(a,b)，即数集$\{x|a<x<b\}$；

(2) 闭区间$[a,b]$，即数集$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

(3) 半开半闭区间$[a,b)$与$(a,b]$，分别对应数集$\{x|a\leqslant x<b\}$与$\{x|a<x\leqslant b\}$．

以上区间对应数轴上的一段线段，如图1-1所示．

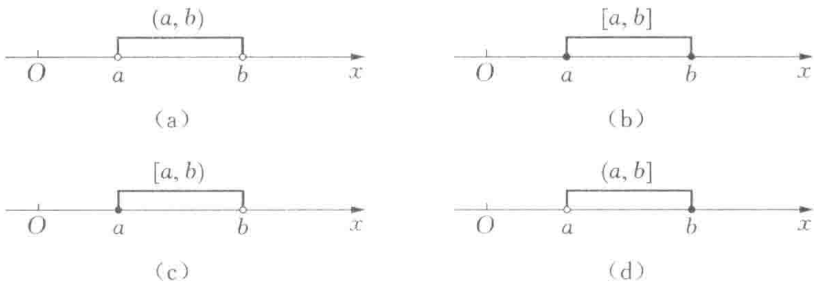

图 1-1

设$a\in\mathbf{R}$，无限区间有以下几种形式：

(1) 无限开区间$(-\infty,a)$与$(a,+\infty)$，分别对应数集$\{x|x<a\}$与$\{x|x>a\}$，这里，记号$-\infty$和$+\infty$分别读作“负无穷大”和“正无穷大”；

(2) 无限闭区间$(-\infty,a]$与$[a,+\infty)$，分别对应数集$\{x|x\leqslant a\}$与$\{x|x\geqslant a\}$；

(3) 全体实数的集合$\mathbf{R}$也常记作区间$(-\infty,+\infty)$，它在几何上对应整个数轴．

以上无限开区间和无限闭区间在数轴上如图1-2所示．

邻域也是一个经常用到的概念．设$a\in\mathbf{R}$，$\delta\in\mathbf{R}$且$\delta>0$，数集$\{x\,\|x-a|<\delta\}$称为点a的δ邻域，记作$U(a,\delta)$．点a叫作该邻域的中心，δ叫作该邻域的半径，如图1-3所示．

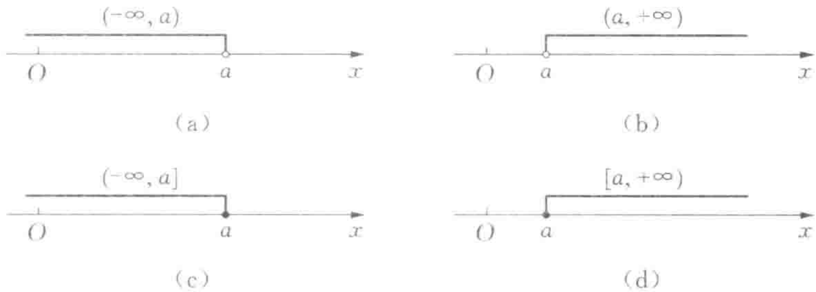

图 1-2

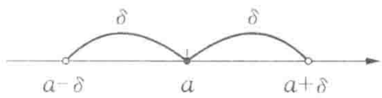

图 1-3

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 的距离，所以 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的集合. 点 a 的 δ 邻域去掉中心后，称为点 a 的去心邻域，记作 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$，即

$$\overset{\circ}{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

二、函数的概念

1. 变量与函数

在介绍函数概念之前，我们先介绍变量. 变量就是在某一过程中可以取不同值的量. 相反，在某一过程中保持不变的量称为常量.

通常用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x,y,z,u,v,t 等表示变量.

在自然现象中，对同一个问题，往往同时出现几个变量，而这些变量又是相互联系、相互依赖的，以下就两个变量的情形举几个例子(多于两个变量的情形以后在下册讨论).

例 1-1　在自由落体运动中，路程 s 随时间 t 的变化而变化，它们之间的依赖关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

表示，当 t 在 $[0,T]$ 内任意取定一个数值时，由上式就可确定 s 的相应数值.

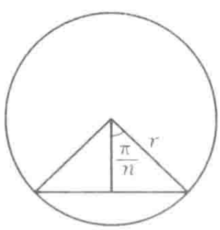

图 1-4

例 1-2　设有半径为 r 的圆，考虑圆内接正 n 边形的周长 S_n (图 1-4)，由初等数学知识易知 $S_n=2nr\sin\frac{\pi}{n}$，此式表达了圆内接正 n 边形周长 S_n 与边数 n 之间的相互依赖关系.

上面两个例子都反映了同一过程中有着相互联系的两个变量，当一个量在某个数集中变化时，按一定的规则，另一个量有唯一的一个值与它对应，函数概念正是从这一事实中抽象出来的.

定义 1-1　设$\varnothing \subset D \subseteq \mathbf{R}$，若有一个对应规则$f$，使对于$D$内每一个实数$x$，都能由$f$唯一地确定一个实数$y$，则称对应规则$f$为定义在$D$上的一个函数，记为

$$y=f(x)\ (x\in D),$$

其中x称为自变量，y称为因变量．数集D称为函数的定义域，记为$D(f)$．$f(x)$称为x所对应的函数值，全体函数值的集合称为函数的值域，记为$R(f)$，即

$$R(f)=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}.$$

例如，例 1-1 确定了一个定义在区间$[0,T]$上的以t为自变量的函数，例 1-2 确定了数集$\{n \mid n\in \mathbf{N}, n\geqslant 3\}$上以$n$为自变量的函数．

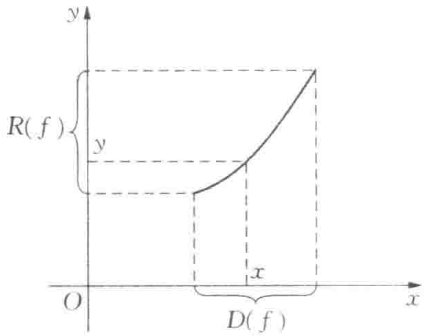

图 1-5

注　如果一个函数是用一个数学式子给出的，则其定义域约定为使这个式子有意义的自变量所取值的全体．两个函数相同是指它们有相同的定义域和对应法则．

对函数$y=f(x)$，任取$x\in D(f)$，对应函数值$y=f(x)$，这样，以x为横坐标，y为纵坐标就确定了xOy平面上的一点，点集

$$C=\{(x,y) \mid y=f(x),\ x\in D(f)\}$$

一般描述出一条平面曲线，称为$f(x)$的图形，如图 1-5 所示．

2．函数的表示法

表示函数的方法主要有三种．

1) 解析法

当函数的对应法则用方程式给出时，称这种表示函数的方法为解析法(分析法)，如例 1-1 和例 1-2，这种方法是表示函数的主要方法．

有时一个函数在其定义域的不同部分用不同的解析式表示，如以下例子：

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

此函数称为符号函数，其定义域$D(f)=(-\infty,+\infty)$，值域$R(f)=\{1,0,-1\}$，如图 1-6 所示．

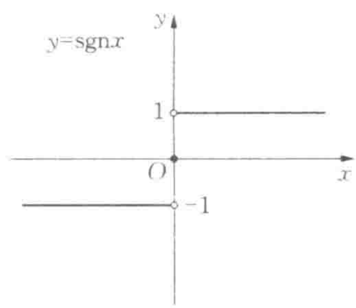

图 1-6

这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同数学式子表示的函数，称为分段函数．

2) 列表法

若函数$f(x)$可用一个含有自变量x与对应的函数值$f(x)$的表格来表示，则称这种表示函数的方法为列表法．通常所用的三角函数表、对数表等可视为用列表法表达的函数．

3) 图像法

由图像给出函数的对应法则的方法称为图像法.

有些函数不能用上述三种方法表示, 只能给予描述(参见下面的狄利克雷(Dirichlet)函数).

3. 几个特殊的函数

(1) 取整函数 $y=[x]$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 对于取整函数 $y=[x]$(图 1-7), 可以证明: 对任意的实数 x, 有不等式

$$[x]\leqslant x<[x]+1.$$

(2) 狄利克雷函数:

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{是有理数},\\0, & x\text{是无理数}.\end{cases}$$

狄利克雷函数与我们初等数学中熟悉的函数有所不同, 它不是用一个解析表达式给出的, 也无法画出它的图形, 但它的确反映了函数的本质: 函数是变量与变量之间的对应关系.

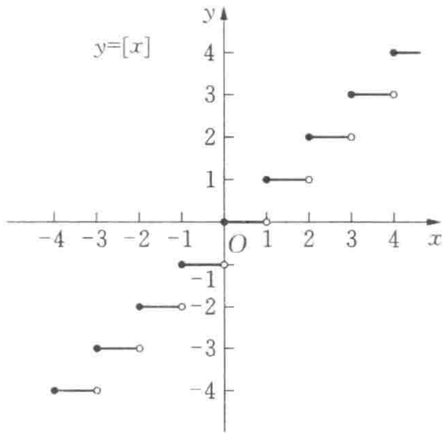

图 1-7

三、函数的主要性质

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$, $D\subseteq D(f)$, 若存在常数 M, 对一切 $x\in D$, 总有 $f(x)\leqslant M$ (或 $f(x)\geqslant M$), 则称 $f(x)$ 在 D 上有上界(或下界), 称数 M 为它的上界(或下界). 若函数 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界, 则称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数, 否则, 称 $f(x)$ 是 D 上的无界函数. 因此, 若 $f(x)$ 是 D 上的有界函数, 则存在某正数 M, 使对一切 $x\in D$, 恒有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立.

例如, 函数 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\operatorname{sgn} x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界函数, 而函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是无界函数, 函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上仅有下界.

有界函数图像的特点是它完全落在平行于 x 轴的两条直线 $y=\pm M$ 之间.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$, $D\subseteq D(f)$, 如果对任意 $x_1,x_2\in D$, 且 $x_1<x_2$, 都有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在 D 上是单调增加(或单调减少)的, 或者称 $f(x)$ 是 D 上的单调递增(或单调递减)函数, 单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数.

例如, 函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调减少, 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加, 而在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调的. 函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加的, 如图 1-8 和图 1-9 所示. 符号函数和取整函数均不是单调递增函数.

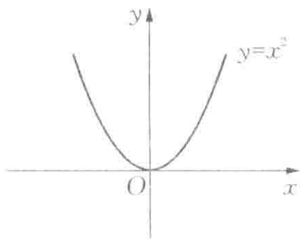

图 1-8

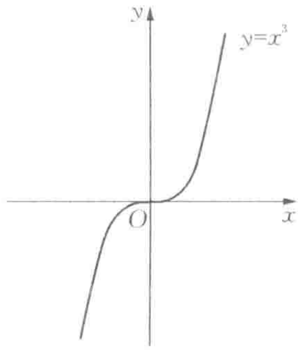

图 1-9

3．奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 为关于原点对称的数集，即若 $x \in D(f)$，则 $-x \in D(f)$．如果对于任一点 $x \in D(f)$，有

$$f(-x) = f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 是偶函数，如果对于任一 $x \in D(f)$，有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 是奇函数.

例如，函数 $y = x^2$，$y = |x|$ 是偶函数；函数 $y = x^3$，$y = \operatorname{sgn} x$ 是奇函数；函数 $y = [x]$ 既不是奇函数又不是偶函数；既奇又偶的函数只有 $y = 0$．

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称，如图 1-10 和图 1-11 所示.

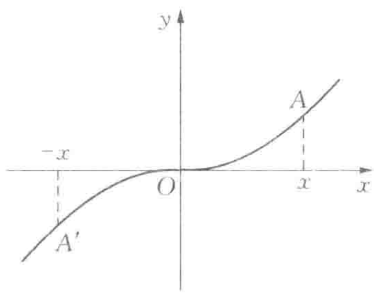

图 1-10

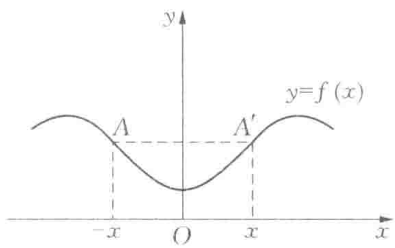

图 1-11

4．周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，如果存在正数 T，使对任意 $x \in D(f)$，有 $x + T \in D(f)$，且

$$f(x+T) = f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，称 T 为 $f(x)$ 的周期．由定义知道，若 T 为 $f(x)$ 的周期，则 nT 也为其周期．通常，我们称 T 为 $f(x)$ 的周期，是指 T 是 $f(x)$ 的最小正周期．例如，三